

ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО № 11 (83)
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА 2007

ISSN 1990-8504

СЕРИЯ

«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

Выпуск 9

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Редакционная коллегия:

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ
Тверской М.М. (отв. редактор), д.т.н., профессор Павлюк Ю.С.,
д.т.н., профессор Прокопьев В.Н., д.т.н., профессор Рождественский Ю.В.,
д.т.н., профессор Спиридонов Е.К., д.ф.-м.н., профессор Телегин А.И.,
д.т.н., профессор Чернявский О.Ф., д.т.н., профессор Шеркунов В.Г.,
к.т.н., доцент Смирнов В.А. (отв. секретарь)

СОДЕРЖАНИЕ

Расчет и конструирование

ТЕЛЕГИН А.И. Общий и частные виды уравнения динамики систем абсолютно твёрдых тел	3
ПРОКОПЬЕВ В.Н., ГАВРИЛОВ К.В. Методика и результаты оптимизации параметров сложнагруженных подшипников скольжения	14
ПОЖБЕЛКО В.И. Формализация структурного анализа и синтеза механизмов с кинематическими, гибкими и динамическими связями	21
КОНДАКОВ С.В. Исследование управляемости быстроходной гусеничной машины при установке гидроаккумулятора в состав гидрообъёмного механизма поворота	33
ПОЖБЕЛКО В.И., КОВНАЦКИЙ А.В. Создание планетарных вибрационных смесителей автоколебательного типа с уравновешенными сателлитами	36
ШАГИАХМЕТОВ А.И. Динамика зубчато-рычажных механизмов на основе эллиптических колес	42

Содержание

Контроль и испытания

ЗАХЕЗИН А.М., МАЛЫШЕВА Т.В. Определение износа шлифовального круга по параметрам вибрации станка 48

Технология

ШИПИЛОВ Р.Д., ЧЕРНЯВСКИЙ А.О. О влиянии технологических остаточных напряжений на величину упругой отдачи в штамповочных гибочных процессах 54

ТВЕРСКОЙ М.М. Станок с параллельными приводами координатных перемещений рабочего органа 61

ЧАПЛЫГИН А.Б., РАЙТ В.В., ШЕРКУНОВ В.Г., СУДАКОВ Н.В., МАРЧЕНКО С.В. Способы повышения прочности скоростных рельсошлифовальных кругов 67

ЩУРОВ И.А., ВОРОНА В.В. Расчет минимальной величины вспомогательного заднего угла резца при точении цилиндрических поверхностей с некруглыми направляющими 69

ДЯТЛОВ В.Н., ШЕРКУНОВ В.Г., МАРЧЕНКО С.В., ЧАПЛЫГИН А.Б. К вопросу производства высоких абразивных кругов 73

Сведения об авторах 77

Расчет и конструирование

УДК 531.3

ОБЩИЙ И ЧАСТНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ АБСОЛЮТНО ТВЁРДЫХ ТЕЛ

А.И. Телегин

Получены общие виды уравнений динамики (УД) для нескольких классов систем абсолютно твёрдых тел (СТТ), на основе которых просто и быстро выписываются УД конкретных СТТ и вычисляются реакции связей. Приведены примеры.

Введение. Для описания структурных и других параметров СТТ можно воспользоваться понятием кинематической цепи, конструктивной схемы СТТ и сопряженными с ним понятиями, которые широко используются в теории механизмов и машин [1]. Кинематической цепью (КЦ) называют совокупность звеньев (тел), образующих подвижные соединения [1]. Пусть p – число подвижных соединений одного звена. Если $p=1$, то звено называют однопарным (полуповодком), если $p=2$, то двухпарным (поводком), если $p>2$ – многопарным. В схемах КЦ однопарные и двухпарные звенья изображают отрезками прямых, а многопарные звенья – многоугольниками. КЦ, состоящие только из однопарных и двухпарных звеньев, называются простыми цепями. Они бывают открытыми (например, двойной маятник) и замкнутыми (например, манипулятор с ключом в захвате, затягивающий гайку). КЦ, содержащие многопарные звенья, называются сложными цепями. Их классифицируют на открытые, например, шагающий аппарат (ША) в фазе полёта, полуоткрытые, полужамкнутые и замкнутые. Соответствующие примеры и изображения КЦ можно найти в цитируемой литературе. Здесь же, как принято в аналитической механике, приводятся формальные определения структурных и других параметров СТТ без их графической иллюстрации.

Предлагаемая статья продолжает исследования, начатые в статьях [2, 3] в части поиска новых форм представления УД СТТ и областей их эффективного использования. Но изучение текста этой статьи, за исключением доказательства утверждения 1, не требует знаний статей [2, 3].

1. Параметры СТТ. Одно из свободных тел СТТ или образующих с землёй (стойкой) подвижное сочленение, считают первым по порядку телом и обозначают его и его массу через m_{01} , а землю обозначают через m_0 . СТТ с полуоткрытой, полужамкнутой или замкнутой КЦ может иметь тела, от которых до m_0 существуют различные «пути», т. е. последовательности сочленённых друг с другом тел. Для устранения этой неоднозначности мысленно разрывают связи тел так, чтобы получилась открытая (простая или сложная) КЦ, т. е. чтобы каждое тело имело единственный путь до m_0 , который называют несущей цепочкой этого тела. В УД СТТ мысленно разорванные связи и внешние воздействия заменяют соответствующими реакциями. В дальнейшем будем считать, что путём разрыва минимального количества связей и изоляции СТТ от воздействий внешней среды получена СТТ с открытыми КЦ, на тела которой действуют соответствующие силы и моменты сил реакции.

Для идентификации тел выполняют их нумерацию. Тело с номером i ($i=1, 2, \dots, n$, где n – количество тел СТТ) и его массу обозначают через m_{0i} . Тело, непосредственно следующее за m_{0i} на пути к m_0 , называют базовым телом (базой для m_{0i}). Все остальные тела, связанные с m_{0i} (если они есть), называют смежными телами для m_{0i} . Тело, не имеющее смежных тел, называют концевым. Все тела, образующие путь от m_0 до m_{0i} , несут на себе m_{0i} , поэтому эти тела по отношению к m_{0i} называют несущими телами. Несомыми для m_{0i} называют тела, которые несёт на

Расчет и конструирование

себе тело m_{0i} , т. е. от которых путь до стойки (до тела m_0) проходит через m_{0i} . Тело m_{0i} вместе со своими несомыми телами образует i -ю подсистему.

В УД СТТ используются следующие знаки суммирования: $\sum_j^{i-1} a_j$ – знак суммирования по номерам несущей цепочки i -го тела, где индекс суммирования j величины a_j пробегает номера всех тел, несущих i -е тело, здесь $j \neq i$ и, следовательно, для первого тела ($i=1$), в этой сумме слагаемых нет; $\sum_{j \geq i} a_j$ – знак суммирования по номерам тел i -й подсистемы, т. е. здесь индекс суммирования j величины a_j пробегает номера всех несомых тел для i -го тела, начиная со значения $j=i$; $\sum_{j, j \neq i} a_j$ – знак суммирования по номерам тел смежных i -му телу, здесь $j \neq i$ и, следовательно, для конечного тела в этой сумме слагаемых нет. Следует заметить, что операция декремента индекса является относительной, т. е. индекс $i-1$ любой величины равен номеру базы i -го тела.

Для описания движения СТТ в каждом теле m_{0i} выбирают точку O_i и называют её полюсом i -го тела. В начальном положении i -го тела относительно своей базы полюс O_i занимает положение O_{0i} в этой базе. Точку O_{0i} , жёстко связанную с базой i -го тела, называют базовой точкой i -го тела. Через m_j обозначают массу j -й подсистемы, т. е. сумму массы j -го тела и масс всех его несомых тел. Если тела m_{0j} , m_{0k} , ..., m_{0l} являются смежными для m_{0i} , то, мысленно поместив в их базовые точки O_{0j} , O_{0k} , ..., O_{0l} массы m_j , m_k , ..., m_l соответственно, получают i -е дополненное тело (ДТ).

2. УД классов СТТ. Формулу (26) статьи [2] можно преобразовать и получить

Утверждение 1. Относительные силовые факторы k -го тела СТТ, т. е. сила \bar{F}_k и момент силы \bar{M}_k относительно точки O_{0k} , действующие на k -е тело со стороны его базы, вычисляются по формулам

$$\begin{cases} m_k \bar{W}_{ok} + \bar{F}_{ok} = \bar{F}_k + m_k \bar{g} + \sum_{i \geq k} \bar{F}_{ri}, & (1) \\ \bar{m}_k \times (\bar{W}_{ok} + \bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk}) + I_k \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k \cdot \bar{\omega}_k + \sum_{j, k} \bar{R}_j \times \bar{F}_{oj} = \\ = \bar{M}_k - \sum_{j, k} \bar{M}_j + \bar{m}_k \times \bar{g} + \bar{M}_{rk} + \sum_{j, k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} \bar{F}_{ri}, & (2) \end{cases}$$

где $k=1, 2, \dots, n$;

$$\bar{W}_{ok} = \sum_i^{k-1} [\bar{W}_{ri} + 2\bar{\omega}_i \times \bar{V}_{ri} + \bar{\varepsilon}_i \times \bar{R}_{i+1} + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{R}_{i+1})] \quad (3)$$

– абсолютное ускорение базовой точки k -го тела (точки O_{0k});

$$\bar{F}_{ok} = \sum_{i \geq k} [m_i (\bar{W}_{ri} + 2\bar{\omega}_i \times \bar{V}_{ri}) + \bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i)] \quad (4)$$

– инерционная сила, обусловленная движением тел k -й подсистемы; \bar{V}_{ri} , \bar{W}_{ri} – скорость и ускорение полюса i -го тела (точки O_i) относительно своей базовой точки O_{0i} ; $\bar{\omega}_i$, $\bar{\varepsilon}_i$ – абсолютные угловые скорость и ускорение i -го тела; \bar{g} – ускорение свободного падения; \bar{F}_{ri} , \bar{M}_{ri} – главный вектор и момент (относительно точки O_{0i}) внешних сил и сил реакций, действующих на i -е тело со стороны внешней среды и мысленно разорванных связей при переходе от СТТ, взаимодействующей с внешней средой, к изолированной СТТ с открытыми КЦ.

В (1)–(4) используются следующие массо-геометрические величины:

$$\bar{m}_i = m_{0i} \bar{r}_i + \sum_{j, j \neq i} m_j \bar{R}_j = m_i \bar{O}_i \bar{C}_{di} \quad (5)$$

– статический момент i -го ДТ относительно точки O_{0i} , $\bar{r}_i = \overline{O_{0i}C_i}$, $\bar{R}_j = \overline{O_{0j-1}O_j}$ – радиус-вектор с началом в базовой точке базы j -го тела и с концом в базовой точке j -го тела, C_i – центр масс (ЦМ) i -го тела, C_{di} – ЦМ i -го ДТ.

$$I_i = I_i^c + m_{0i}(r_i^2 E - \bar{r}_i \bar{r}_i) + \sum_{j,i} m_j (R_j^2 E - \bar{R}_j \bar{R}_j) \quad (6)$$

– тензор инерции i -го ДТ относительно точки O_{0i} , I_i^c – тензор инерции i -го тела относительно точки C_i , a^2 – квадрат длины вектора \bar{a} , $\bar{a}\bar{a}$ – диадное произведение вектора \bar{a} на вектор \bar{a} , E – единичная матрица.

Большое практическое значение имеют следствия этого утверждения. Поэтому доказательство утверждения отложим до конца статьи и перейдём к рассмотрению его следствий и примеров их практического использования для выписывания УД конкретных СТТ.

Если первое тело СТТ свободное, а остальные могут быть связаны друг с другом только шаровыми шарнирами, центры которых приняты за полюсы тел, то из утверждения 1 получим

Следствие 1. УД СТТ с шаровыми шарнирами (СТШШ) на свободном основании имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} M\bar{W} + \sum_{j,1} \bar{F}_{oj} &= \bar{F} + M\bar{g} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ri}, & (7) \\ \bar{m}_k \times \bar{W} + \bar{m}_k \times \sum_{i=1}^{k-1} [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{R}_{i+1} + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{R}_{i+1})] + I_k \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k \cdot \bar{\omega}_k + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \bar{F}_{oj} &= \\ &= \bar{M}_k - \sum_{j,k} \bar{M}_j + \bar{m}_k \times \bar{g} + \bar{M}_{rk} + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} \bar{F}_{ri}, \quad k=1, 2, \dots, n, & (8) \end{aligned} \right.$$

где \bar{F} – сила, под действием которой свободное основание (тело) совершает поступательное движение относительно земли; \bar{W} – ускорение переносного движения свободного основания; M – масса СТТ. Здесь за полюс первого свободного тела принята точка C_{d1} , и она совмещена с началом переносной системы координат, т. е. $\bar{m}_1 = 0$. В отличие от (4)–(6) в (7)–(8)

$$\bar{F}_{oj} = \sum_{i \geq j} [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i)],$$

$$\bar{m}_i = m_{0i} \bar{r}_i + \sum_{j,i} m_j \bar{R}_j = m_i \overline{O_i C_{di}} \text{ – статический момент } i\text{-го ДТ относительно точки } O_i,$$

$$\bar{r}_i = \overline{O_i C_i}, \quad \bar{R}_j = \overline{O_{j-1} O_j},$$

$$I_i = I_i^c + m_{0i}(r_i^2 E - \bar{r}_i \bar{r}_i) + \sum_{j,i} m_j (R_j^2 E - \bar{R}_j \bar{R}_j) \text{ – тензор инерции } i\text{-го ДТ относительно точки } O_i,$$

так как $O_{0i} = O_i$ для всех i .

Замечание 1. Если за полюс свободного тела принята произвольная точка (не обязательно C_{d1}), то $\bar{m}_1 \neq 0$ и сумму в левой части уравнения (7) следует записывать в виде

$$\sum_{i=1}^n [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i)].$$

Как частный случай из уравнений (7), (8) получаются известные виды УД свободного твёрдого тела. Действительно, если в (7), (8) положить $k = n = 1$ и за полюс тела принять его ЦМ, то получим

Следствие 2. Тело, совершающее поступательное движение относительно земли (стойки) под действием силы \bar{F} и вращение под действием момента силы \bar{M} (относительно ЦМ), имеет следующие УД: $M\bar{W} = \bar{F} + M\bar{g}$, $I \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times I \cdot \bar{\omega} = \bar{M}$.

В следствии 2 записаны известные УД. Из них или непосредственно из (8) получаем

Следствие 3. УД тела с одной закреплённой точкой имеет вид $I \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times I \cdot \bar{\omega} = \bar{M}$. Если закреплённая точка не совпадает с ЦМ тела, то его УД имеет вид $I \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times I \cdot \bar{\omega} = \bar{M} + \bar{m} \times \bar{g}$, что следует из (8).

Расчет и конструирование

Если связи СТТ не допускают поступательных перемещений тел относительно своих баз, т. е. $\bar{V}_{rk} = 0$, $\bar{W}_{rk} = 0$ для всех k , то из утверждения 1 получим

Следствие 4. УД СТПШШ имеют вид

$$\begin{aligned} & \bar{m}_k \times \sum_i^{k-1} [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{R}_{i+1} + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{R}_{i+1})] + I_k \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k \cdot \bar{\omega}_k + \\ & + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i)] = \bar{M}_k - \sum_{j,k} \bar{M}_j + \bar{m}_k \times \bar{g} + \bar{M}_{rk} + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} \bar{F}_{ri}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$.

УД (9) имеют следующие преимущества по сравнению с УД СТПШШ, которые получены в [4] (см. стр. 125–126). Во-первых, в (9) значительно меньше векторно-матричных операций. Во-вторых, структурные свойства в УД (9) выражены в явном виде и представлены суммами по номерам несущей цепочки k -го тела, по номерам тел смежных k -му и по номерам j -й подсистемы. В-третьих, все постоянные массо-геометрические параметры СТПШШ представлены расстояниями между полюсами тел (\bar{R}_i), статическими моментами (\bar{m}_i) и тензорами инерции (I_i) ДТ и выражены в УД (9) в явном виде. В-четвёртых, на основе УД (9) можно достаточно просто решать задачи синтеза СТТ с заданными динамическими свойствами, например, динамически развязанных или интегрируемых СТТ с шаровыми, цилиндрическими и шаровыми с пальцем шарнирами.

3. УД СТТ на плоскости с цилиндрическими шарнирами (СТПЦШ) в абсолютных угловых скоростях и ускорениях тел. Тела СТПЦШ, например, двойного маятника, плоского трёхзвенного манипулятора, n -звенника (цепи), образуют друг с другом цилиндрические шарниры, причём оси вращения всех тел параллельны друг другу и перпендикулярны одной плоскости, которую обозначим через P , а через \bar{k} обозначим орт перпендикуляра к P , направленный в сторону наблюдателя (исследователя). В УД СТПЦШ используются следующие величины: $m_{di} = m_i d_i$; $d_i = O_i C_{di}$; $\bar{R}_j = \overline{O_{j-1} O_j}$; $\bar{e}_j = \bar{R}_j / R_j$; R_j – длина \bar{R}_j ; $\bar{i}_i = \overline{O_i C_{di}} / d_i$; M_k – движущий момент силы, действующий на k -е тело со стороны его базы, приведенный к оси вращения k -го тела (к оси $O_k \bar{k}$). С учётом замечания 1 из следствия 1 легко получить

Следствие 5. Для выписывания УД СТПЦШ на свободном основании можно использовать формулы

$$M\ddot{x} - \sum_{i=1}^n m_{di} (s_i \ddot{\alpha}_i + c_i \dot{\alpha}_i^2) = F_x + \bar{i} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ri}, \quad (10)$$

$$M\ddot{y} + \sum_{i=1}^n m_{di} (c_i \ddot{\alpha}_i - s_i \dot{\alpha}_i^2) + Mg = F_y + \bar{j} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ri}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & m_{dk} (c_k \ddot{y} - s_k \ddot{x}) + m_{dk} \sum_i^{k-1} R_{i+1} (c_{i+1,k} \ddot{\alpha}_i + s_{i+1,k} \dot{\alpha}_i^2) + J_k \ddot{\alpha}_k + \sum_{j,k} R_j \sum_{i \geq j} m_{di} (c_{ji} \ddot{\alpha}_i - s_{ji} \dot{\alpha}_i^2) + \\ & + m_{dk} g \sin \alpha_{ok} = M_k - \sum_{j,k} M_j + \bar{k} \cdot \left(\bar{M}_{rk} + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} \bar{F}_{ri} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (12)$$

где \ddot{x}, \ddot{y} – проекции на горизонтальную и вертикальную оси ускорения \bar{W} поступательного движения свободного основания; $\dot{\alpha}_i, \ddot{\alpha}_i$ – абсолютные угловая скорость и ускорение i -го тела; J_k – момент инерции k -го ДТ относительно оси вращения k -го тела; $s_k = \sin \alpha_k$, $c_k = \cos \alpha_k$, α_k – угол, откладываемый от горизонтальной оси (от \bar{i}) до \bar{i}_k ; $s_{ij} = \sin \alpha_{ij}$, $c_{ij} = \cos \alpha_{ij}$, α_{ij} – угол, откладываемый от \bar{e}_i до \bar{i}_j ; α_{ok} – угол, откладываемый от \bar{e}_o до \bar{i}_k ($\bar{e}_o = \bar{g}/g$), g – ускорение свободного падения; $F_x = \bar{i} \cdot \bar{F}$, $F_y = \bar{j} \cdot \bar{F}$, \bar{i} – орт горизонтали, \bar{j} – орт вертикали, $O_i \bar{j} \bar{k}$ – правый репер.

Доказательство. Из принятых обозначений следует, что для СТПЦШ $\bar{m}_k = m_{dk} \bar{i}_k$, $\bar{R}_i = R_i \bar{e}_i$, $\bar{W} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j}$, $\bar{\omega}_i = \dot{\alpha}_i \bar{k}$, $\bar{\varepsilon}_i = \ddot{\alpha}_i \bar{k}$. Следовательно, умножив (7) скалярно на \bar{i} и \bar{j} , получим

$$M\bar{i} \cdot (\ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j}) + \sum_{i=1}^n m_{di} [\ddot{\alpha}_i \bar{i} \cdot \bar{k} \times \bar{i}_i + \dot{\alpha}_i^2 \bar{i} \cdot \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{i}_i)] - M\bar{g} \cdot \bar{i} = \bar{i} \cdot \bar{F} + \bar{i} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{F}_n,$$

$$M\bar{j} \cdot (\ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j}) + \sum_{i=1}^n m_{di} [\ddot{\alpha}_i \bar{j} \cdot \bar{k} \times \bar{i}_i + \dot{\alpha}_i^2 \bar{j} \cdot \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{i}_i)] - M\bar{g} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{F} + \bar{j} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{F}_n.$$

Теперь, учитывая равенство $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$, получим

$$\bar{i} \cdot \bar{k} \times \bar{i}_i = -\bar{j} \cdot \bar{i}_i = -\cos(\alpha_i - \pi/2) = -\sin \alpha_i = -s_i,$$

$$\bar{i} \cdot \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{i}_i) = -\bar{j} \cdot (\bar{k} \times \bar{i}_i) = -\bar{i} \cdot \bar{i}_i = -\cos \alpha_i = -c_i,$$

$$\bar{j} \cdot \bar{k} \times \bar{i}_i = \bar{i} \cdot \bar{i}_i = c_i, \quad \bar{j} \cdot \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{i}_i) = \bar{i} \cdot (\bar{k} \times \bar{i}_i) = -s_i, \quad \bar{g} \cdot \bar{j} = -g, \quad \bar{g} \cdot \bar{i} = 0.$$

Подставив эти выражения в предшествующие уравнения, получим искомые УД (10), (11).

Умножив (8) скалярно на орт \bar{k} оси вращения тел, получим

$$\bar{k} \cdot \bar{m}_k \times \bar{W} + \bar{k} \cdot \bar{m}_k \times \sum_{i=1}^{k-1} [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{R}_{i+1} + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{R}_{i+1})] =$$

$$= m_{dk} \bar{k} \cdot \bar{i}_k \times (\ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j}) + m_{dk} \bar{k} \cdot \bar{i}_k \times \sum_{i=1}^{k-1} R_{i+1} [\bar{k} \times \bar{e}_{i+1} \ddot{\alpha}_i + \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{e}_{i+1}) \dot{\alpha}_i^2],$$

$$\bar{k} \cdot I_k \cdot \bar{\varepsilon}_k = \bar{k} \cdot I_k \cdot \bar{k} \ddot{\alpha}_k = J_k \ddot{\alpha}_k, \quad \bar{k} \cdot \bar{\omega}_k \times (I_k \cdot \bar{\omega}_k) = \dot{\alpha}_k (\bar{k} \times \bar{k}) \cdot I_k \cdot \bar{\omega}_k = 0,$$

$$\bar{k} \cdot \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i)] = \bar{k} \cdot \sum_{j,k} R_j \bar{e}_j \times \sum_{i \geq j} m_{di} [\bar{k} \times \bar{i}_i \ddot{\alpha}_i + \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{i}_i) \dot{\alpha}_i^2].$$

Очевидно, что

$$\bar{k} \cdot \bar{i}_k \times \bar{i} = \bar{j}_k \cdot \bar{i} = \cos(\alpha_k + \pi/2) = -\sin \alpha_k = -s_k, \quad \bar{k} \cdot \bar{i}_k \times \bar{j} = \bar{j}_k \cdot \bar{j} = \cos \alpha_k = c_k,$$

$$\bar{k} \cdot \bar{i}_k \times (\bar{k} \times \bar{e}_{i+1}) = \bar{j}_k \cdot \bar{k} \times \bar{e}_{i+1} = \bar{i}_k \cdot \bar{e}_{i+1} = \cos \alpha_{i+1,k} = c_{i+1,k},$$

$$\bar{k} \cdot \bar{i}_k \times [\bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{e}_{i+1})] = \bar{i}_k \cdot \bar{k} \times \bar{e}_{i+1} = -\bar{j}_k \cdot \bar{e}_{i+1} = -\cos(\alpha_{i+1,k} + \pi/2) = \sin \alpha_{i+1,k} = s_{i+1,k},$$

$$\bar{k} \cdot \bar{e}_j \times (\bar{k} \times \bar{i}_i) = \bar{k} \cdot \bar{e}_j \times \bar{j}_i = -\bar{k} \cdot \bar{j}_i \times \bar{e}_j = \bar{i}_i \cdot \bar{e}_j = \cos \alpha_{ji} = c_{ji},$$

$$\bar{k} \cdot \bar{e}_j \times [\bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{i}_i)] = \bar{k} \cdot \bar{e}_j \times (\bar{k} \times \bar{j}_i) = -\bar{k} \cdot \bar{e}_j \times \bar{i}_i = \bar{j}_i \cdot \bar{e}_j = \cos(\alpha_{ji} + \pi/2) = -s_{ji}.$$

Следовательно,

$$\bar{k} \cdot \bar{m}_k \times \bar{W} + \bar{k} \cdot \bar{m}_k \times \sum_{i=1}^{k-1} [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{R}_{i+1} + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{R}_{i+1})] = m_{dk} \sum_{i=1}^{k-1} R_{i+1} (c_{i+1,k} \ddot{\alpha}_i + s_{i+1,k} \dot{\alpha}_i^2),$$

$$\bar{k} \cdot (I_k \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k \cdot \bar{\omega}_k) = J_k \ddot{\alpha}_k,$$

$$\bar{k} \cdot \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} [\bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i)] = \sum_{j,k} R_j \sum_{i \geq j} m_{di} (c_{ji} \ddot{\alpha}_i - s_{ji} \dot{\alpha}_i^2),$$

$$\bar{k} \cdot \bar{m}_k \times \bar{g} = m_{dk} \bar{k} \cdot \bar{i}_k \cdot \bar{g} = m_{dk} \bar{j}_k \cdot \bar{g} = m_{dk} g \cos(\bar{e}_o, \bar{j}_k) = m_{dk} g \cos(\alpha_{ok} + \pi/2) = -m_{dk} g s_{ok},$$

что доказывает справедливость левой части уравнения (12).

Так как $\bar{k} \cdot \bar{M}_i = M_i$ – момент движущей силы относительно оси $O_i \bar{k}$, действующий на i -е тело со стороны его базы, получим правую часть уравнения (12). *Следствие доказано.*

Замечание 2. В следствии 5 считается, что СТПЦШ движется в вертикальной плоскости P . Если эта плоскость образует с горизонтом угол α , то вместо g необходимо подставить величину $g \sin \alpha$.

Если первое тело СТПЦШ не является свободным, т. е. образует с землёй цилиндрический шарнир с осью, перпендикулярной плоскости движения P , то из следствия 5 получим

Следствие 6. Для выписывания УД СТПЦШ можно использовать формулы

$$m_{dk} \sum_{i=1}^{k-1} R_{i+1} (c_{i+1,k} \ddot{\alpha}_i + s_{i+1,k} \dot{\alpha}_i^2) + J_k \ddot{\alpha}_k + \sum_{j,k} R_j \sum_{i \geq j} m_{di} (c_{ji} \ddot{\alpha}_i - s_{ji} \dot{\alpha}_i^2) + m_{dk} g \sin \alpha_{ok} =$$

$$= M_k - \sum_{j,k} M_j + \bar{k} \cdot \left(\bar{M}_{rk} + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} \bar{F}_n \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Расчет и конструирование

СТПЦШ с простой открытой КЦ, для которой $\bar{i}_i = \bar{e}_{i+1}$, часто называют n -звенником. Для него $\alpha_{i+1,k} = \alpha_k - \alpha_i$. Следовательно, из (13) получим

Следствие 7. УД n -звенника имеют вид

$$m_k d_k \sum_{i=1}^{k-1} L_i \left[\cos(\alpha_k - \alpha_i) \ddot{\alpha}_i + \sin(\alpha_k - \alpha_i) \dot{\alpha}_i^2 \right] + J_k \ddot{\alpha}_k + \\ + L_k \sum_{i=k+1}^n m_i d_i \left[\cos(\alpha_i - \alpha_k) \ddot{\alpha}_i - \sin(\alpha_i - \alpha_k) \dot{\alpha}_i^2 \right] + m_k d_k g \sin(\alpha_k) = M_k - M_{k+1}, \quad (14)$$

где $k=1, 2, \dots, n$, $L_i = O_i O_{i+1}$ – длина i -го звена, M_k – момент движущей силы относительно оси $O_k \bar{k}$, действующий на k -е звено со стороны предшествующего звена, α_k – абсолютный угол поворота k -го звена, откладываемый от \bar{e}_o до \bar{i}_k .

Замечание 3. Из (14) видно, что если тела n -звенника являются однородными стержнями с равномерно распределённой (по длине) и одинаковой массой, то его УД не упрощаются. Эти УД не упрощаются и в случае часто используемой идеализации, в соответствии с которой массы звеньев сосредоточены в точках. Тем не менее, эту идеализацию ошибочно используют с целью упрощения вида УД n -звенника, в частности, двойного маятника. УД последнего элементарно выписываются из (14).

4. Примеры выписывания УД СТПЦШ. Для выписывания УД СТПЦШ с простой КЦ эффективно использовать следствие 7. В качестве иллюстрации рассмотрим

Пример 1. Выпишем УД двойного маятника в вертикальной плоскости.

Для двойного маятника $n=2$, $M_1 = M_2 = 0$. Следовательно, из (14) для $k=1$, $k=2$ в процессе развёртывания сумм получим УД двойного маятника

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\alpha}_1 + L_1 m_2 d_2 \left[\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \ddot{\alpha}_2 - \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \dot{\alpha}_2^2 \right] + m_1 d_1 g \sin \alpha_1 = 0, \\ m_2 d_2 L_1 \left[\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \ddot{\alpha}_1 + \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \dot{\alpha}_1^2 \right] + J_2 \ddot{\alpha}_2 + m_2 d_2 g \sin \alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Пример 2. Выпишем УД манипулятора, состоящего из плеча ($k=1$), предплечья ($k=2$) и кисти с захватом ($k=3$). Манипулятор снабжён электроприводами прямого действия, которые расположены в цилиндрических шарнирах и развивают движущие моменты сил плеча M_1 , предплечья M_2 и кисти M_3 соответственно. ЦМ звеньев расположены на осях $O_i X_i$ (с ортами \bar{i}_i), проходящих через оси вращения смежных звеньев. Манипулятор работает в горизонтальной плоскости.

Подставляя в (14) $n=3$ и развёртывая суммы для $k=1$, $k=2$ и $k=3$, получим УД манипулятора:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\alpha}_1 + L_1 \left[m_2 d_2 (c_{21} \ddot{\alpha}_2 - s_{21} \dot{\alpha}_2^2) + m_3 d_3 (c_{31} \ddot{\alpha}_3 - s_{31} \dot{\alpha}_3^2) \right] + m_1 d_1 g \sin \alpha_1 = M_1 - M_2, \\ m_2 d_2 L_1 (c_{21} \ddot{\alpha}_1 + s_{21} \dot{\alpha}_1^2) + J_2 \ddot{\alpha}_2 + L_2 m_3 d_3 (c_{32} \ddot{\alpha}_3 - s_{32} \dot{\alpha}_3^2) + m_2 d_2 g \sin \alpha_2 = M_2 - M_3, \\ m_3 d_3 \left[L_1 (c_{31} \ddot{\alpha}_1 + s_{31} \dot{\alpha}_1^2) + L_2 (c_{32} \ddot{\alpha}_2 + s_{32} \dot{\alpha}_2^2) \right] + J_3 \ddot{\alpha}_3 + m_3 d_3 g \sin \alpha_3 = M_3. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $c_{21} = \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$, $s_{21} = \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$, $c_{31} = \cos(\alpha_3 - \alpha_1)$, $s_{31} = \sin(\alpha_3 - \alpha_1)$, $c_{32} = \cos(\alpha_3 - \alpha_2)$, $s_{32} = \sin(\alpha_3 - \alpha_2)$.

Замечание 4. Вывод УД трёхзвенного манипулятора на плоскости по любому из классических формализмов, например, по формализму Лагранжа, Аппеля, Нильсена, займёт несколько страниц машинописного текста, и для записи их в виде (16) потребуется громоздкая работа по приведению подобных, тригонометрическим упрощениям, введению переобозначений и по другим преобразованиям.

Пример 3. Рассмотрим пример, изложенный в учебном пособии [5] на страницах 96–97.

Тело может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей. На нём установлен маятник. Выведем УД этой системы и найдём реакцию F , направляющей.

Используем следствие 5, совмещая переносную систему координат с телом. Маятник является единственным несомым телом. Следовательно, подставляя в (10), (11) $n=1$ и в (12) $k=1$, получим

$$\begin{cases} M\ddot{x} - m_{d1}(s_1\ddot{\alpha}_1 + c_1\dot{\alpha}_1^2) = 0, \\ M\ddot{y} + m_{d1}(c_1\ddot{\alpha}_1 - s_1\dot{\alpha}_1^2) + Mg = F_r, \\ m_{d1}(c_1\ddot{y} - s_1\ddot{x}) + J_1\ddot{\alpha}_1 + m_{d1}g \sin \alpha_{o1} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $s_1 = \sin \alpha_1$, $c_1 = \cos \alpha_1$, α_1 – угол поворота маятника, откладываемый от горизонтальной оси. Для сопоставления результатов с известными формулами [5] (см. стр. 97) введём замену $\alpha_1 = 270^\circ + \varphi$, где $\varphi = \alpha_{o1}$ – угол, откладываемый от \bar{e}_o до стержня маятника. Тогда $\ddot{\alpha}_1 = \ddot{\varphi}$, $\dot{\alpha}_1^2 = \dot{\varphi}^2$, $\cos \alpha_1 = \cos(270^\circ + \varphi) = \sin \varphi$, $\sin \alpha_1 = \sin(270^\circ + \varphi) = -\cos \varphi$. Если положить $\dot{y} = 0$, то второе уравнение системы (17) даст формулу вычисления искомой реакции $F_r = m_{d1}(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + Mg$, а первое и третье образуют систему для определения функций $x(t)$, $\varphi(t)$: $M\ddot{x} + m_{d1}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0$, $m_{d1}\ddot{x} \cos \varphi + J_1\ddot{\varphi} + m_{d1}g \sin \varphi = 0$, что совпадает с результатами, изложенными в учебном пособии [5].

Пример 4. Рассмотрим пример, изложенный в учебном пособии [5] на страницах 65–66.

Составим УД математического маятника, точка O_1 подвеса которого совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости по закону $OO_1 = a \sin \omega t$ вдоль прямой, наклонённой под углом α к горизонту.

Используем следствие 5, совмещая переносную систему координат с точкой O_1 . Подставляя в (12) $n=1$, $k=1$, получим следующее УД маятника: $m_{d1}(c_1\ddot{y} - s_1\ddot{x}) + J_1\ddot{\alpha}_1 + m_{d1}g \sin \alpha_{o1} = 0$, где $s_1 = \sin \alpha_1$, $c_1 = \cos \alpha_1$, α_1 – угол поворота маятника, откладываемый от горизонтальной оси. Для сопоставления результатов с известной формулой УД [5] (см. стр. 66) введём замену $\alpha_1 = 270^\circ + \varphi$, где $\varphi = \alpha_{o1}$ – угол, откладываемый от \bar{e}_o до стержня маятника. Тогда $\ddot{\alpha}_1 = \ddot{\varphi}$, $\dot{\alpha}_1^2 = \dot{\varphi}^2$, $\cos \alpha_1 = \cos(270^\circ + \varphi) = \sin \varphi$, $\sin \alpha_1 = \sin(270^\circ + \varphi) = -\cos \varphi$. Абсолютные координаты точки O_1 вычисляются по формулам $x = OO_1 \cos \alpha = a \cos \alpha \sin \omega t$, $y = a \sin \alpha \sin \omega t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\omega \cos \alpha \cos \omega t, \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t, \quad \dot{y} = a\omega \sin \alpha \cos \omega t, \quad \ddot{y} = -a\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t, \\ c_1\ddot{y} - s_1\ddot{x} &= -\sin \varphi a\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t - \cos \varphi a\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t = \\ &= -a\omega^2 \sin \omega t (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = -a\omega^2 \sin \omega t \cos(\varphi - \alpha). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в УД, получим: $J_1\ddot{\alpha}_1 - m_{d1}a\omega^2 \sin \omega t \cos(\varphi - \alpha) + m_{d1}g \sin \varphi = 0$, что совпадает с результатом, представленным в учебном пособии [5] на странице 66.

Пример 5. Рассмотрим пример, изложенный в учебном пособии [5] на стр. 93.

На конец двойного маятника (на точку A) наложена связь, не позволяющая точке A покидать вертикальную ось. Найдём силу F_r реакции связи и выведем УД этой системы.

Обозначим левые части УД, выписанные в примере 1, через H_1 , H_2 . Тогда по формуле (13) для $k=1$ получим $H_1 = \bar{k} \cdot \bar{R}_2 \times \bar{F}_{r2}$, для $k=2$ $H_2 = \bar{k} \cdot \bar{M}_{r2}$, где $\bar{R}_2 = \overline{O_1O_2} = L_1\bar{i}_1$, $\bar{F}_{r2} = F_r\bar{i}$, $\bar{M}_{r2} = \overline{O_2A} \times \bar{F}_{r2} = L_2F_r\bar{i}_2 \times \bar{i}$. Очевидно, что $\bar{k} \cdot \bar{i}_2 \times \bar{i} = -\bar{j} \cdot \bar{i}_2$, $\bar{k} \cdot \bar{i}_1 \times \bar{i} = -\bar{j} \cdot \bar{i}_1 = -\cos(\pi + \varphi) = \cos \varphi$, где $\varphi = \alpha_1 = \alpha_{o1}$ – угол, откладываемый от \bar{e}_o до 1-го звена маятника. Как и в [5] будем считать, что длины звеньев маятника равны, т. е. $L_1 = L_2 = L$. Тогда $\varphi = -\psi$, где $\psi = \alpha_2$ – угол, откладываемый от \bar{e}_o до 2-го звена маятника и $\bar{j} \cdot \bar{i}_2 = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$. Следовательно, $H_1 = H_2 = LF_r \cos \varphi$. Подставим в H_1 , H_2 , т. е. в левые части уравнений (15), следующие величины: $\dot{\alpha}_1 = \dot{\varphi}$, $\ddot{\alpha}_1 = \ddot{\varphi}$, $\dot{\alpha}_2 = -\dot{\varphi}$, $\ddot{\alpha}_2 = -\ddot{\varphi}$, $\alpha_2 - \alpha_1 = -2\varphi$, $L_1 = L$. Тогда получим

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi} + Lm_2 d_2 (-\ddot{\varphi} \cos 2\varphi + \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi) + m_1 d_1 g \sin \varphi = LF_r \cos \varphi, \\ m_2 d_2 L (\ddot{\varphi} \cos 2\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi) - J_2 \ddot{\varphi} - m_2 d_2 g \sin \varphi = LF_r \cos \varphi. \end{cases} \quad (18)$$

Вычитая из первого уравнения (18) второе, получим УД рассматриваемой системы

$$(J_1 + J_2 - 2Lm_2 d_2 \cos 2\varphi) \ddot{\varphi} + 2Lm_2 d_2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = -(m_1 d_1 + m_2 d_2) g \sin \varphi.$$

Складывая между собой уравнения системы (18), получим искомое выражение для силы реакции: $F_r = (J_1 - J_2) \ddot{\varphi} / 2L \cos \varphi + (m_1 d_1 - m_2 d_2) g \operatorname{tg} \varphi / 2L$.

Пример 6. Рассмотрим пример, изложенный в учебном пособии [6] на страницах 235, 236.

Два однородных сплошных цилиндра, жёстко закреплённые на оси, образуют скат, опирающийся на горизонтальные опоры. На этой же оси свободно насажен стержень маятника. Выведем УД этой системы, считая, что цилиндры катятся по опорам без скольжения и трение в цилиндрическом шарнире отсутствует.

Используем следствие 5, совмещая начало переносной системы координат с точкой на оси. Скат и маятник являются двумя несомыми телами с номерами $k=1$ и $k=2$ соответственно. Для ската $m_{d1} = 0$, так как его ЦМ лежит на оси. Следовательно, подставляя в (10) $n=2$ и в (12) $k=1, k=2$, получим

$$\begin{cases} M\ddot{x} - m_{d2}(s_2\ddot{\alpha}_2 + c_2\dot{\alpha}_2^2) = \bar{F}_{r1} \cdot \bar{i} = -F_r, \\ J_1 \ddot{\alpha}_1 = \bar{k} \cdot \bar{M}_{r1} = -F_r R, \\ -m_{d2} s_2 \ddot{x} + J_2 \ddot{\alpha}_2 + m_{d2} g \sin \alpha_{o2} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где F_r – сила трения, действующая на скат в точке его контакта с горизонтальной опорой, R – радиус ската, $s_2 = \sin \alpha_2$, $c_2 = \cos \alpha_2$, α_2 – угол поворота маятника, откладываемый от горизонтальной оси. Введём замену $\alpha_2 = 270^\circ + \varphi$, где $\varphi = \alpha_{o2}$ – угол, откладываемый от \bar{e}_o до стержня маятника. Тогда

$$\ddot{\alpha}_2 = \ddot{\varphi}, \quad \dot{\alpha}_2^2 = \dot{\varphi}^2, \quad c_2 = \cos \alpha_2 = \cos(270^\circ + \varphi) = \sin \varphi, \quad s_2 = \sin \alpha_2 = \sin(270^\circ + \varphi) = -\cos \varphi.$$

Очевидно, что $x = R\alpha_1$, и из второго уравнения системы (19) получим $J_1 \ddot{x} / R = -F_r R$ или $-F_r = J_1 \ddot{x} / R^2$. Подставляя всё это в первое и второе уравнения системы (19), получим искомые УД

$$\begin{cases} (M - J_1 / R^2) \ddot{x} + m_{d2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0, \\ m_{d2} \ddot{x} \cos \varphi + J_2 \ddot{\varphi} + m_{d2} g \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Замечание 5. В рассмотренных примерах в отличие от аналогичных примеров, изложенных в учебных пособиях [5, 6], не используется идеализация в виде невесомости стержня маятника и масс тел, сосредоточенных в точках, так как в этом нет никакой необходимости.

5. Классы СТТ и области их практического использования. В предшествующих разделах выделены пять классов СТТ.

В следствии 1 записан общий вид УД СТШШ на свободном основании. Эти УД эффективно использовать для выписывания УД ША в пространстве во всех фазах ходьбы и/или свободного полёта. Для этого необходимо корпус ША принять за первое свободное тело, и все суставы моделировать шаровыми шарнирами. Если суставы моделируются шаровыми с пальцем шарнирами или цилиндрическими шарнирами, то УД (7), (8) дают возможность попутно выписать формулы для вычисления моментов сил реакции относительно соответствующих осей. УД (7), (8) можно использовать для вывода УД многоруких робототехнических систем на подвижной колёсной, гусеничной или шагающей платформе. Из УД (7), (8) можно получить общие УД СТТ в пространстве с цилиндрическими шарнирами на подвижном основании. Соответствующая статья готовится к печати.

В следствии 4 записан общий вид УД СТШШ. Эти УД эффективно использовать для выписывания УД ША в пространстве в одно- и многоопорных фазах ходьбы. Из УД (9) как частный случай получается эффективный вид УД манипуляционных систем роботов с цилиндрическими шарнирами.

В следствии 5 записан общий вид УД СТПЦШ на свободном основании в плоскости. Эти УД эффективно использовать для выписывания УД плоских моделей ША во всех фазах ходьбы и/или свободного полёта. Для этого необходимо корпус ША принять за первое свободное тело и все суставы моделировать цилиндрическими шарнирами с параллельными друг другу осями. Общие УД (10)–(12) можно использовать для выписывания УД плоских моделей колёсных и гусеничных транспортных средств, а также многоруких роботов на подвижном основании.

В следствии 6 записан общий вид УД СТПЦШ. Эти УД эффективно использовать для выписывания УД плоских моделей ША в одно- и многоопорных фазах ходьбы, а также одно- и многоруких манипуляторов на плоскости и любых плоских моделей СТТ с цилиндрическими шарнирами.

В следствии 7 записан общий вид УД n -звенника. Область практического использования этих УД не велика. Но для теоретических исследований, например, разработки методов численного интегрирования УД отдельных классов СТТ или вывода общих УД систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел эти УД очень полезны, так как они самые простые и получаются в частных случаях движений многих произвольных СТТ, что позволяет их использовать для проверки справедливости общих результатов в частных случаях.

Замечание 6. УД каждого из перечисленных классов СТТ практически невозможно упростить за счёт дальнейших преобразований, так как все подобные члены при скоростях и ускорениях уже приведены и упрощены.

На основе следствий 1, 4–7 можно получить УД систем твёрдых и деформируемых (на изгиб и кручение) тел. Для этого в деформируемое тело (в виде стержня) достаточно ввести сосредоточенные податливости и выполнить ряд преобразований. Соответствующие статьи готовятся к печати.

Из следствий 5, 6, 7 получаем

Следствие 8. Для рассмотренных классов СТТ на плоскости с открытыми КЦ необходимым и достаточным условием динамической развязки движения тел является статическое уравнивание всех подсистем, т. е. выполнение равенств $m_{di} = 0$ для всех i . Для СТТ на плоскости с полуоткрытыми, полужамкнутыми и замкнутыми КЦ эти условия ослабляются [7].

Замечание 7. Наиболее полно задачи статического уравнивания механизмов рассмотрены в монографии [8]. Использование полученных следствий позволяет решить эти задачи значительно быстрее.

6. Доказательство утверждения 1. Для изучения предлагаемого доказательства необходимо познакомиться с статьями [2], [3]. Формула (1) совпадает с формулой (25) статьи [3]. В доказательстве нуждается только формула (2).

Если j пробегает номера тел смежных k -му телу, то $\bar{R}_{kj} = \bar{R}_j$. Поэтому, используя формулу $\bar{F}_k = \sum_{i \geq k} (m_{oi} \bar{W}_{ci} - \bar{F}_{ri}) - m_k \bar{g}$ утверждения 6 статьи [2] и обозначение $\bar{F}_{Rk} = \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} \bar{F}_{ri}$, получим

$$\sum_{j,k} \bar{R}_{kj} \times \bar{F}_j = \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \bar{F}_j = \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \left[\sum_{i \geq j} (m_{oi} \bar{W}_{ci} - \bar{F}_{ri}) - m_j \bar{g} \right] = \\ = \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} m_{oi} \bar{W}_{ci} - \sum_{j,k} m_j \bar{R}_j \times \bar{g} - \bar{F}_{Rk}. \quad (20)$$

Введём обозначения

$$\bar{D}_j = \sum_{i \geq j} [m_i (\bar{W}_{ri} + 2\bar{\omega}_i \times \bar{V}_{ri}) + \bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i)], \quad \bar{W}_{Ri}^j = \bar{W}_{ri} + 2\bar{\omega}_i \times \bar{V}_{ri} + \bar{\varepsilon}_i \times \bar{R}_j + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{R}_j).$$

Тогда, используя формулу (16) статьи [3], получим

$$\sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} m_{oi} \bar{W}_{ci} = \sum_{j,k} \bar{R}_j \times (m_j \bar{W}_{oj} + \bar{D}_j), \quad (21)$$

где $\bar{W}_{oj} = \sum_{i=1}^{j-1} \bar{W}_{Ri}^{i+1}$. Выполним следующие преобразования:

$$\sum_{j,k} m_j \bar{R}_j \times \bar{W}_{oj} = \sum_{j,k} m_j \bar{R}_j \times \sum_{i=1}^{j-1} \bar{W}_{Ri}^{i+1} = \sum_{j,k} m_j \bar{R}_j \times \sum_{i=1}^k \bar{W}_{Ri}^{i+1} = \sum_{j,k} m_j \bar{R}_j \times \left(\bar{W}_{Rk}^j + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{W}_{Ri}^{i+1} \right) =$$

$$= \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \times [\bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk} + \bar{\varepsilon}_k \times \bar{R}_j + \bar{\omega}_k \times (\bar{\omega}_k \times \bar{R}_j)] + \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \times \bar{W}_{ok}. \quad (22)$$

Из утверждения 1 статьи [2] и формул (20), (21) получим

$$\begin{aligned} \bar{M}_k - \sum_{J,k} \bar{M}_j = m_{ok} \bar{r}_k \times (\bar{W}_{ck} - \bar{g}) + I_k^c \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k^c \cdot \bar{\omega}_k - \bar{M}_{rk} + \sum_{J,k} \bar{R}_{kj} \times \bar{F}_j = m_{ok} \bar{r}_k \times \bar{W}_{ck} - \\ - m_{ok} \bar{r}_k \times \bar{g} + I_k^c \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k^c \cdot \bar{\omega}_k - \bar{M}_{rk} + \sum_{J,k} \bar{R}_j \times (m_j \bar{W}_{oj} + \bar{D}_j) - \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \times \bar{g} - \bar{F}_{Rk}. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя обозначение (5), получим

$$m_{ok} \bar{r}_k \times \bar{g} + \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \times \bar{g} = \left(m_{ok} \bar{r}_k + \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \right) \times \bar{g} = \bar{m}_k \times \bar{g}. \quad (24)$$

Из утверждения 2 статьи [2] следует, что $\bar{W}_{ck} = \bar{W}_{ok} + \bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk} + \bar{\varepsilon}_k \times \bar{r}_k + \bar{\omega}_k \times (\bar{\omega}_k \times \bar{r}_k)$. Поэтому, учитывая (22), получим

$$\begin{aligned} m_{ok} \bar{r}_k \times \bar{W}_{ck} + \sum_{J,k} \bar{R}_j \times m_j \bar{W}_{oj} = m_{ok} \bar{r}_k \times [\bar{W}_{ok} + \bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk} + \bar{\varepsilon}_k \times \bar{r}_k + \bar{\omega}_k \times (\bar{\omega}_k \times \bar{r}_k)] + \\ + \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \times [\bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk} + \bar{\varepsilon}_k \times \bar{R}_j + \bar{\omega}_k \times (\bar{\omega}_k \times \bar{R}_j)] + \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \times \bar{W}_{ok} = \\ = \left(m_{ok} \bar{r}_k + \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \right) \times (\bar{W}_{ok} + \bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk}) + m_{ok} \bar{r}_k \times (\bar{\varepsilon}_k \times \bar{r}_k) + \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \times (\bar{\varepsilon}_k \times \bar{R}_j) + \\ + m_{ok} \bar{r}_k \times [\bar{\omega}_k \times (\bar{\omega}_k \times \bar{r}_k)] + \sum_{J,k} m_j \bar{R}_j \times [\bar{\omega}_k \times (\bar{\omega}_k \times \bar{R}_j)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Используем известные тождества [9]

$$\bar{a} \times (\bar{\varepsilon} \times \bar{a}) = (a^2 E - \bar{a}\bar{a}) \cdot \bar{\varepsilon}, \quad \bar{a} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{a})] = \bar{\omega} \times (a^2 E - \bar{a}\bar{a}) \cdot \bar{\omega},$$

обозначение (5) и обозначение $I_{Rk} = m_{ok} (r_k^2 E - \bar{r}_k \bar{r}_k) + \sum_{J,k} m_j (R_j^2 E - \bar{R}_j \bar{R}_j)$, тогда из (25) получим

$$m_{ok} \bar{r}_k \times \bar{W}_{ck} + \sum_{J,k} \bar{R}_j \times m_j \bar{W}_{oj} = \bar{m}_k \times (\bar{W}_{ok} + \bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk}) + I_{Rk} \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_{Rk} \cdot \bar{\omega}_k. \quad (26)$$

Выражение (23) с учётом (24), (26) и обозначения \bar{D}_j примет вид

$$\begin{aligned} \bar{M}_k - \sum_{J,k} \bar{M}_j = \bar{m}_k \times (\bar{W}_{ok} + \bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk}) + I_{Rk} \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_{Rk} \cdot \bar{\omega}_k + I_k^c \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k^c \cdot \bar{\omega}_k + \\ + \sum_{J,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \geq j} [m_i (\bar{W}_{ri} + 2\bar{\omega}_i \times \bar{V}_{ri}) + \bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i)] - \bar{m}_k \times \bar{g} - \bar{F}_{Rk} - \bar{M}_{rk}. \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь, используя обозначения (3) и (6) ($I_k = I_k^c + I_{Rk}$) из (27), получим искомое выражение (2).

Утверждение доказано.

Замечание 8. В отличие от статьи [2] здесь и в статье [3] вместо обозначений $\bar{r}_i^c = \overline{O_{0i}C_i}$, $\bar{R}_{ji} = \overline{O_{0i}O_{0j}}$ использованы обозначения $\bar{r}_i = \overline{O_{0i}C_i}$, $\bar{R}_{ij} = \overline{O_{0i}O_{0j}}$. Это сделано для сокращения записей (компьютерного набора) и для более удобного запоминания.

Заключение. Доказанное утверждение и его следствия предоставляют новые возможности для моделирования СТТ из пяти выделенных классов. Приведённые примеры убедительно демонстрируют эффективность использования общих видов УД для выписывания УД конкретных СТТ из этих классов и решения на их основе 1-й задачи динамики, т. е. вычисления движущих моментов сил или динамических реакций.

Литература

1. Озол, О.Г. Теория механизмов и машин. / О.Г. Озол; под ред. С.Н. Кожевникова; пер. с латыш. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 432 с.
2. Телегин, А.И. Алгоритмы решения первой задачи динамики произвольных систем тел / А.И. Телегин, А.В. Аброров // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2001. – Вып. 1. – № 6 (06). – С. 3–9.

3. Телегин, А.И. Новые уравнения для решения задач динамики и синтеза систем твёрдых тел / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2006. – Вып. 8. – № 11 (66). – С. 3–14.
4. Виттенбург, И. Динамика систем твёрдых тел / И. Виттенбург. – М.: Мир, 1980. – 290 с.
5. Бутенин, Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику / Н.В. Бутенин, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1991. – 256 с.
6. Добронравов, В.В. Основы аналитической механики: учеб. пособие для вузов / В.В. Добронравов. – М.: Высш. школа, 1976. – 264 с.
7. Телегин, А.И. Динамическая развязка систем тел с замкнутыми ветвями / А.И. Телегин // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1999. – №2. – С. 37–45.
8. Щепетильников, В.А. Уравновешивание механизмов / В.А. Щепетильников. – М.: Машиностроение, 1982, – 256 с.
9. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНОАГРУЖЕННЫХ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

В.Н. Прокопьев, К.В. Гаврилов

Приводится методика и результаты решения задачи оптимизации конструктивных параметров сложноагруженных подшипников скольжения. Поле гидродинамических давлений в смазочном слое подшипников определяется интегрированием модифицированного уравнения Элрода. Показано, что выбором оптимальных параметров, прежде всего, вязкостно-температурной зависимостью масла, можно существенно улучшить все гидромеханические характеристики, определяющие износостойкость подшипников, усталостную долговечность антифрикционного слоя, потери на трение.

1. Введение

Типичными представителями сложноагруженных подшипников скольжения являются шатунные подшипники коленчатого вала двигателей внутреннего сгорания (ДВС). К основным гидромеханическим характеристикам (ГМХ) этих подшипников принято относить: мгновенные значения минимальной толщины смазочного слоя $h_{\min}(\tau)$ и максимального гидродинамического давления $p_{\max}(\tau)$, а также их экстремальные $\inf h_{\min}$, $\sup p_{\max}$ и средние h_{\min}^* , p_{\max}^* за цикл τ_n величины; мгновенные и средние потери мощности на трение $N(\tau)$, N^* ; расходы смазки $Q_T(\tau)$, Q_T^* , вытекающей в торцы подшипника; эффективную (расчетную) температуру смазочного слоя T_{Σ} .

Целью решения задачи оптимизации является определение оптимальных значений конструктивных параметров подшипника, обеспечивающих получение расчетных значений ГМХ, принадлежащих допустимой области. Совокупность значений ГМХ, показывающая относительное «предпочтение» одного варианта конструкции подшипника по отношению к другим, является критерием оптимальности. Для определенности обычно требуется, чтобы критерий оптимальности был минимален и тогда сокращенная запись задачи оптимизации сводится к виду $\min V(q)$, $q \in D$, означаящему: найти вектор расчетных значений параметров $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, обеспечивающий минимальное значение критерия оптимальности $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ при решении системы неравенств

$$G_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \quad (1)$$

$$q_n^- \leq q_n \leq q_n^+. \quad (2)$$

Неравенства (1) являются ограничениями, а (2) определяют область возможных изменений расчетных значений параметров, исходя из условий эксплуатации подшипника, технологии его изготовления и конструктивных соображений. В зависимости от целей оптимизации неизвестными являются ширина подшипника, диаметр, радиальный зазор, поперечная и продольная геометрия шатунной шейки и вкладышей, координаты расположения на их поверхностях источников смазки, характеристики масла и другие.

2. Методика оптимизации

В работе использовался метод оптимизации на основе ЛП_r-последовательностей в сочетании с выделением множества Парето и организации на нем поиска оптимального решения [1]. Характерным отличием этого метода является отсутствие минимизируемой целевой функции в обычном понимании. Вместо нее на основе экспертных оценок формируется в некотором смысле оптимальный набор критериев.

В основе метода лежит трехэтапное численное исследование (зондирование) пространства параметров.

На первом этапе составлялась таблица испытаний, отражающая зависимость результатов расчета критериев качества от варьируемых параметров: ширины подшипника B , его диаметра D , радиального зазора C , давления подачи смазки p_S , вязкостно-температурной характеристики (ВТХ), т. е. зависимости эффективной вязкости $\mu_{\text{э}}$ от температуры. На втором этапе эксперты, просматривая таблицу испытаний, назначали ограничения для каждого критерия. На третьем проверялась непустота множества допустимых значений $(B, D, C, \mu_{\text{э}}, p_S)$. Если множество пусто, осуществлялся возврат ко второму этапу: эксперты либо делали уступки при назначении ограничений, либо увеличивали число пробных точек. После этого оптимизация начиналась с начала. Если множество $(B, D, C, \mu_{\text{э}}, p_S)$ оказывалось не пустым, из него исключались неэффективные точки. Множество всех эффективных точек образовывало множество паретовских точек \tilde{P} .

На варьируемые параметры накладывались ограничения. Границы для $\min C \leq C \leq \max C$ устанавливались исходя из рекомендаций экспертов. Диапазон изменения вязкостей смазки при 40°C и 100°C выбирался в соответствии с их известными значениями у моторных масел. В частности, для дизельных двигателей: $\mu_{40} = 0,0425 \dots 0,0680$ Па·с, $\mu_{100} = 0,0085 \dots 0,0136$ Па·с.

Давление подачи смазки варьировалось в пределах от 0,05 МПа до 0,7 МПа, что соответствует диапазону давлений, рекомендуемому заводами-изготовителями ДВС.

Таким образом, пространство изменяющихся параметров для оптимизации представлялось в виде точек q с координатами $(C, B, D, \mu_{40}, \mu_{100}, p_S)$.

3. Критерии качества

Критериями качества $\Phi_1(q), \Phi_2(q), \dots, \Phi_k(q)$ системы «шатунная шейка–смазочный слой–вкладыши» выбраны средние за цикл ГМХ: $h_{\min}^*, p_{\max}^*, N^*, Q_T^*, T_{\text{э}}^*$, образующие вектор качества $\Phi(q)$, учитывающий значения и важность каждого из индивидуальных критериев $\Phi_\nu(q)$, где ν – число ГМХ, включаемых в перечень критериев оптимизации. Этот общепринятый перечень дополнен протяженностью зон касания $\alpha|_{h=h_{kp}}$, т. е. участков траектории движения центра шатунной шейки, на которых $h_{\min}(\tau)$ меньше критических значений h_{kp} .

Выбор в качестве критериев средних h_{\min}^*, p_{\max}^* , а не экстремальных $\inf h_{\min}$ и $\sup p_{\max}$ значений продиктован тем, что у шатунных подшипников форсированных ДВС расчетные значения $\inf h_{\min}$ оказываются значительно меньше суммы высот неровностей поверхностей вкладышей подшипника и шатунной шейки.

Таким образом, в процессе решения задач оптимизации допускалось появление значений $\inf h_{\min} < h_{kp}$, а к средней за цикл нагружения минимальной толщине смазочного слоя h_{\min}^* предъявлялось требование максимизации.

Обычно считается, что максимальная расчетная температура смазочного слоя подшипников не должна превышать 120–130 °С. Эта величина и принималась в качестве ограничения для максимальной за цикл нагружения эффективной температуры смазочного слоя $\max T_{\text{э}}$. К температуре $T_{\text{э}}^*$ предъявлялось требование минимизации.

С учетом выше сказанного задача оптимизации заключалась в отыскании точки \tilde{q} такой, что

$$\Phi(\tilde{q}) = \underset{q \in D}{\text{opt}} \Phi(q),$$

где D – множество допустимых точек, определяющих оптимальное значение вектора качества.

4. Алгоритмы расчета ГМХ

Исходной для расчета ГМХ является система уравнений движения центра шатунной шейки [2]:

$$m_{\text{э}} \omega_0^2 \ddot{U} = F_U(\tau) + R_U(U, \dot{U}), \quad (3)$$

Расчет и конструирование

где m_3 и $U = (X, Y)$ – эффективная (расчетная) масса шейки и вектор перемещений ее центра; \ddot{U}, \dot{U} – производные по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$; F_U, R_U – проекции главного вектора внешних сил и гидродинамических давлений на оси X, Y , закрепленные на подшипнике; ω_0 – угловая скорость вращения коленчатого вала.

Система (3) интегрировалась методом второго порядка, базирующемся на применении формул дифференцирования назад (методом ФДН), подробности которого изложены в работе [2].

Реакции $R_U(U, \dot{U}, \ddot{U})$ определялись на основе результатов численного интегрирования модифицированного уравнения Элрода для давлений в смазочном слое и степени его заполнения смазкой [3–5]. Модификация, используемая в работе, записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}_3} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}_3} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right] = \frac{\bar{\omega}}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \{g\bar{h} + (1-g)(\bar{h}\theta)\} + \frac{\partial}{\partial \tau} \{g\bar{h} + (1-g)(\bar{h}\theta)\}, \quad (4)$$

где $\Pi = g\bar{p} + (1-g)\bar{p}_c$.

В активной области смазочного слоя Ω_A , где $g = 1$, степень заполнения $\theta = 1$. В области кавитации, где $g = 0$, гидродинамическое давление p равно кавитационному p_c , степень заполнения меньше единицы, причем θ определяет массовое содержание жидкой фазы (масла) в единице объема пространства между шатунной шейкой и вкладышами.

Разностная аппроксимация уравнения (2) на сетке $\tau^n, \varphi, \bar{z}_j$, где $\tau^n = n\Delta_\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\varphi_i = i\Delta_\varphi$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $\Delta_\varphi = l_\varphi / (N - 1)$, $\bar{z}_j = j\Delta_{\bar{z}}$ ($j = 1, 2, \dots, M$), $\Delta_{\bar{z}} = l_z / (M - 1)$, l_φ – протяженность подшипника в направлении координаты φ , l_z – протяженность подшипника в направлении координаты \bar{z} , приводит к следующей системе уравнений для вычисления давлений \bar{p} и степени заполнения θ :

$$\bar{p}_{ij} = k_1^{-1} (M_1 + M_2 \bar{p}_c + M_3 - K_3 + K_4), \text{ если } g_{ij} = 1;$$

$$\theta_{ij} = \frac{M_1 + (M_2 - K_2) \bar{p}_c + M_3 + K_4}{\bar{\omega} \Delta_\varphi \bar{h}_{ij} + K_3}, \text{ если } g_{ij} = 0.$$

Здесь $K_1 = \left\{ \left(\Gamma_{i-1/2,j} + \Gamma_{i+1/2,j} \right) + K_2 \right\}$, где $K_2 = 2 \left(\frac{\Delta_\varphi}{\Delta_{\bar{z}}} \right)^2 \Gamma_{ij}$;

$$K_3 = \Delta_\varphi^2 \left(\frac{\bar{h}_{ij}}{\Delta \tau} + \frac{\partial \bar{h}_{ij}}{\partial \tau} \right); \quad K_4 = \Delta_\varphi^2 \frac{\bar{h}_{ij}}{\Delta \tau} [g_{ij}^n + (1-g_{ij}^n)\theta_{ij}^n];$$

$$M_2 = \left\{ \left(-g_{i-1,j} \Gamma_{i-1/2,j} \right) - \left(g_{i+1,j} \Gamma_{i+1/2,j} \right) + \left(\frac{\Delta_\varphi}{\Delta_{\bar{z}}} \right)^2 \Gamma_{ij} [2 - (g_{i,j-1} + g_{i,j+1})] \right\};$$

$$M_1 = \left\{ \left(g_{i-1,j} \Gamma_{i-1/2,j} \bar{p}_{i-1,j} \right) + \left(g_{i+1,j} \Gamma_{i+1/2,j} \bar{p}_{i+1,j} \right) + \left(\frac{\Delta_\varphi}{\Delta_{\bar{z}}} \right)^2 \Gamma_{ij} (g_{i,j-1} \bar{p}_{i,j-1} + g_{i,j+1} \bar{p}_{i,j+1}) \right\};$$

$$M_3 = \bar{\omega} \Delta_\varphi \left[(1-g_{i-1,j}) \bar{h}_{i-1,j} \theta_{i-1,j} - f_\omega \right],$$

где $f_\omega = \frac{(g\bar{h})_{i-1,j}}{2} (2-g_{ij}) - \frac{(g\bar{h})_{i+1,j}}{2} g_{ij} - \frac{(g\bar{h})_{ij}}{2} (2-g_{i+1,j} - g_{i-1,j})$.

Эффективная температура смазочного слоя определялась на каждом временном шаге интегрирования системы (3) решением уравнения теплового баланса, отражающего равенство за цикл τ_y значений теплоты, рассеянной в смазочном слое и отведенной смазкой, вытекающей в торцы подшипника, а также теплопередачей в шатунную шейку и вкладыши.

Решением уравнения теплового баланса определялась эффективная температура смазочного слоя $T_3(\tau)$, на основании которой корректировалась вязкость смазки по двухконстантной форму-

ле Фогеля, с поправкой Тодера, учитывающей зависимость вязкости от давления. Методика корректировки подробно изложена в работе [6].

5. Шатунные подшипники серийного двигателя КамАЗ-740.11.220

В качестве первого примера рассмотрим задачу оптимизации конструктивных параметров шатунного подшипника коленчатого вала двигателя КамАЗ-740.11.220, который выпускается серийно и является основным силовым агрегатом, устанавливаемым на большегрузные автомобили, автобусы, сельскохозяйственную технику. Диаметр подшипника, его ширина, радиальный зазор, диаметр отверстия для подачи смазки, давление и температура подачи, угловая скорость вращения коленчатого вала, эффективная (расчетная) масса шипа, динамическая вязкость смазки при 40 °С и 100 °С принимались соответственно равными: $D = 85$ мм, $B = 29$ мм, $C = 0,044$ мм, $d_i = 6$ мм, $p_s = 0,5$ МПа, $T_s = 90$ °С, $\omega_2 = 2600$ об/мин, $m_{\text{ш}} = 3$ кг, $\mu_{40} = 0,0661$ Па·с, $\mu_{100} = 0,0107$ Па·с.

На варьируемые параметры накладывались следующие ограничения: $25 \text{ мм} \leq B \leq 35 \text{ мм}$, $80 \text{ мм} \leq D \leq 90 \text{ мм}$, $\min C = 40 \text{ мкм}$, $\max C = 100 \text{ мкм}$.

В соответствии с первым этапом решения задачи оптимизации составлялась таблица испытаний (табл. 1).

Таблица испытаний

Таблица 1

№ опыта	Исходные значения варьируемых параметров			Значения критериев оптимизации				
	C , мм	B , мм	D , мм	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	$T_{\text{э}}^*$, °С	p_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=2}$, град ПКВ
1	0,092	0,026	0,080	2,846	0,0654	102,01	86,54	279
2	0,067	0,025	0,088	3,052	0,0541	104,84	79,57	268
3	0,0475	0,032	0,082	3,899	0,0355	106,66	62,12	204
4	0,040	0,030	0,081	3,621	0,0351	106,25	67,69	243
...								
97	0,045	0,031	0,088	3,976	0,0318	106,46	61,63	141
98	0,050	0,026	0,082	3,582	0,0405	105,97	72,84	278
99	0,045	0,026	0,089	3,738	0,0389	105,42	69,27	167
100	0,045	0,029	0,081	3,927	0,0381	108,83	62,23	150

Заметим, что исходные значения варьируемых параметров были выбраны достаточно далекими от параметров серийного варианта конструкции подшипников. В диалоговом режиме экспертами назначались ограничения для критериев качества с учетом следующих требований: $h_{\min}^* = \sup$ – наибольшее значение; $(Q_T^*, T_{\text{э}}^*, p_{\max}^*, \alpha|_{h=2}) = \inf$ – наименьшие значения. В результате было определено множество Парето в виде четырех вариантов совокупности варьируемых параметров (табл. 2).

Множество Парето-оптимальных решений

Таблица 2

Значения варьируемых параметров			Значения критериев оптимизации				
C , мм	B , мм	D , мм	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	$T_{\text{э}}^*$, °С	p_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=2}$, град ПКВ
0,045	0,031	0,088	3,976	0,0318	106,46	61,63	141
0,044	0,032	0,085	3,854	0,0312	106,62	62,10	152
0,0445	0,029	0,087	3,779	0,0319	106,32	64,56	156
0,042	0,030	0,084	3,687	0,0309	106,80	60,34	158

Окончательный вариант параметров подшипника (C, B, D), отобранный экспертами, приведен в табл. 3.

Результаты оптимизации свидетельствуют о том, что конструктивные параметры серийного шатунного подшипника двигателя КамАЗ-740.11-220 близки к оптимальным. Улучшить ГМХ в

Расчет и конструирование

пределах 10%, а такие характеристики, как $\alpha|_{h=h_{kp}}$ и Q_T^* на 48% и 18% соответственно удается сравнительно небольшими изменениями конструктивных параметров. Время, затраченное на решение задачи оптимизации параметров, составило порядка 120 мин., что не идет ни в какое сравнение с годами экспериментальных исследований и эксплуатационных испытаний, позволивших прийти к параметрам, близким к оптимальным.

Таблица 3

Сравнение параметров оптимизированной и серийной конструкции шатунных подшипников двигателя КамАЗ-740.11-220

Параметры	C , мм	B , мм	D , мм
Оптимизированный	0,045	31,0	88
Серийный	0,044	29,0	85

В табл. 4 приведены значения критериев оптимизации для серийного и оптимизированного подшипников.

Таблица 4

Значения критериев оптимизации

Критерии оптимизации	h_{min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	$T_{\text{Э}}^*$, °С	p_{max}^* , МПа	$\alpha_{h=2}$, град ПКВ
Оптимизированный	3,976	0,0318	106,5	61,63	141
Серийный	3,719	0,039	108,9	69,21	274
Отн. разница, %	6,4	18,4	2,4	10,9	48

6. Шатунные подшипники форсированного двигателя КамАЗ-740.51.360

В настоящее время заводом-изготовителем для серийного производства подготовлен перспективный двигатель КамАЗ-740.51-360. Конструктивные параметры шатунного подшипника этого двигателя установлены заводом по аналогии с параметрами шатунного подшипника серийного двигателя КамАЗ-740.11-220, за исключением величины угловой скорости коленчатого вала $\omega_2 = 2200$ об/мин, величина которой изменена в связи с форсированием двигателя по мощности.

Проведенные расчеты свидетельствуют, что значения ГМХ шатунных подшипников коленчатого вала двигателя КамАЗ-740.51-360 достигают критических (недопустимых) величин.

Для их улучшения предпринята попытка изменить величину радиального зазора C , давления подачи p_S , а также вязкости μ_{40} и μ_{100} , т. е. изменить вязкостно-температурную зависимость применяемого для смазки моторного масла (табл. 5) на основе выбранных случайным образом пяти сочетаний μ_{40} и μ_{100} .

Таблица 5

Значения вязкости масел

Вариант	1	2	3	4	5
μ_{100} , Па·с	0,0085	0,0102	0,0119	0,0136	0,0136
μ_{40} , Па·с	0,0680	0,0595	0,0510	0,0680	0,0425

После составления таблицы испытаний (табл. 6) и назначения экспертами ограничений для критериев h_{min}^* , Q_T^* , $T_{\text{Э}}^*$, p_{max}^* , $\alpha|_{h=1,5}$ было определено множество Парето в виде семи вариантов совокупности варьируемых параметров (табл. 7), из которых выбран (табл. 8) предпочтительный (оптимальный) вариант. В табл. 9 приведены значения критериев оптимизации для серийного и оптимизированного подшипников.

К оптимальным значениям вязкости масла μ_{40} и μ_{100} наиболее близко примыкают вязкости $\mu_{40} = 0,070$ Па·с и $\mu_{100} = 0,012$ Па·с масла Shell Rimula Ultra XT SAE 5W-40.

Из табл. 7 следует, что использованием для смазки двигателя КамАЗ-740.51-360 этого масла, а также увеличением давления подачи до 0,6 МПа и уменьшением радиального зазора до 42 мкм можно увеличить расчетное значение минимальной толщины смазочного слоя h_{\min}^* на 20% и снизить на такую же величину максимальное гидродинамическое давление p_{\max}^* . При этом протяженность зоны касания $\alpha|_{h=1,5}$ не превысит 20% цикла нагружения, что считается допустимым.

Таблица 6

Таблица испытаний

№ опыта	Исходные значения варьируемых параметров				Значения критериев оптимизации				
	C , мм	μ_{40} , Па с	μ_{100} , Па с	p_S , МПа	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	T_{Σ}^* , °С	p_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=1,5}$, град ПКВ
1	0,087	0,065	0,0087	0,54	3,248	0,054	100,8	123,5	296
2	0,051	0,0494	0,0121	0,62	3,594	0,021	110,1	104,7	252
3	0,040	0,0561	0,0102	0,39	3,312	0,011	108,2	98,9	244
4	0,072	0,0584	0,0091	0,22	2,971	0,010	110,7	122,1	272
...									
97	0,049	0,0651	0,0103	0,42	3,415	0,013	104,8	95,7	178
98	0,093	0,044	0,0082	0,65	2,561	0,061	102,4	131,5	317
99	0,082	0,0219	0,0110	0,32	2,612	0,043	110,4	109,7	283
100	0,041	0,0432	0,0131	0,68	3,809	0,049	115,9	87,3	139

Таблица 7

Множество Парето-оптимальных решений

Значения варьируемых параметров				Значения критериев оптимизации				
C , мм	μ_{40} , Па с	μ_{100} , Па с	p_S , МПа	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	T_{Σ}^* , °С	p_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=1,5}$, град ПКВ
0,045	0,044	0,0129	0,68	3,891	0,012	109,7	88,4	137
0,042	0,050	0,0132	0,59	4,523	0,011	109,4	87,3	129
0,040	0,067	0,0136	0,70	4,480	0,011	108,8	96,2	141
0,0415	0,061	0,0131	0,64	4,225	0,012	109,8	97,5	144
0,049	0,046	0,0135	0,62	3,894	0,010	109,9	98,2	143
0,042	0,066	0,0134	0,65	3,971	0,011	108,2	93,7	138
0,044	0,053	0,0128	0,63	3,874	0,012	109,3	94,2	142

Таблица 8

Сравнение параметров исходной и оптимизированной конструкций шатунных подшипников двигателя КамАЗ-740.51-360

Параметры	C , мм	μ_{40} , Па с	μ_{100} , Па с	p_S , МПа
Оптимизированный	0,042	0,050	0,0132	0,59
Исходный	0,044	0,0661	0,0107	0,50

Таблица 9

Значения критериев оптимизации

Критерии оптимизации	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	T_{Σ}^* , °С	p_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=1,5}$, град ПКВ
Оптимизированный	4,523	0,011	109,4	87,3	129
Исходный	3,631	0,018	111,2	107,8	280
Отн. разница, %	19,7	38,9	1,6	19,0	53,9

Представленная работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)» (код проекта РНП 2.1.2.2285) и финансовой поддержке Правительства Челябинской области.

Литература

1. *Соболь, И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболь, Н.Б. Статников. – М.: Наука, 1981, – 285 с.*
2. *Прокопьев, В.Н. Повышение эффективности алгоритмов расчёта выходных параметров сложнагруженных опор скольжения двигателей транспортных машин / В.Н. Прокопьев, Ю.В. Рождественский, Н.В. Широбоков // Вестник УМОАТ. – Курган, 1999. – № 2. – С. 28–32.*
3. *Элрод. Алгоритм расчёта зоны кавитации / Элрод // ТАОИМ. – М.: Мир. Серия Ф. Проблемы трения и смазки. – 1981. – № 3. – С. 28–32.*
4. *Прокопьев, В.Н. Модификации алгоритма Элрода и их применение для расчёта гидродинамических давлений в смазочных слоях сложнагруженных опор скольжения / В.Н. Прокопьев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2001. – Вып. 1. – № 6 (06). – С. 52–60.*
5. *Прокопьев, В.Н. Применение алгоритмов сохранения массы при расчёте динамики сложнагруженных опор скольжения / В.Н. Прокопьев, А.К. Бояришинова, К.В. Гаврилов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – М.: Наука, 2004. – № 4. – С. 32–38.*
6. *Прокопьев, В.Н. Применение при расчете гидромеханических характеристик сложнагруженных подшипников алгоритма сохранения массы / В.Н. Прокопьев, К.В. Гаврилов // Труды международного научного симпозиума «Гидродинамическая теория смазки – 120 лет». В 2-х томах. – М.: Машиностроение, Орел: ОрелГТУ, 2006. – Т. 1. – С. 330–339.*

ФОРМАЛИЗАЦИЯ СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА И СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ С КИНЕМАТИЧЕСКИМИ, ГИБКИМИ И ДИНАМИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

В.И. Пожбелко

Представлена попытка выработки обобщенного подхода к рассмотрению механизмов, как частного случая механических систем, содержащих кинематические, гибкие и динамические связи. На основе теорем о структуре рациональных механизмов рассчитаны все коды замкнутых кинематических цепей без избыточных связей. Приведенные теоремы и коды могут быть использованы для анализа и синтеза одноподвижных и многоподвижных механизмов, содержащих простые и сложные шарниры, кинематические пары различной подвижности, гибкие и динамические связи.

При конструировании механизмов для разных областей техники [1–21] могут использоваться разнообразные взаимодействия (связи) твердых тел, которые осуществляются разными способами (с помощью элементов контактирующих звеньев в кинематической паре или посредством их бесконтактного взаимодействия через гибкие элементы, жидкость, магнитное поле, силы инерции и др.).

Рассмотрим некоторые формализации, которые могут оказаться полезными для структурного анализа и синтеза механизмов на основе математических зависимостей [7, 8], описывающих строение разнообразных механических систем с учетом различных возможных взаимодействий (связей) твердых тел. Представленные ниже варианты определений и примеры их использования при конструировании механизмов предназначены для выработки более обобщенного подхода к изучению строения механизмов в связи с их структурным анализом и синтезом.

1. Механическая система – система взаимосвязанных (взаимодействующих между собой) твердых тел.

В зависимости от назначения механические системы могут быть выполнены в виде одноподвижных и многоподвижных механизмов, неподвижных ферм и структурных групп Ассур с особыми свойствами [1, 4]. Механические системы представляют: при структурном анализе – в виде кинематической цепи; при структурном синтезе – в виде структурной математической модели (оба понятия рассмотрены ниже).

С точки зрения топологии (как науки, исследующей свойства фигур и их взаиморасположение) механические системы представляют собой кинематические цепи с определенным набором и взаиморасположением замкнутых и незамкнутых (открытых) контуров, образованных твердыми телами (звеньями) и связями между ними. В общем случае механические системы (и соответственно кинематические цепи и механизмы) можно разделить [6] на *однородные* (содержат контуры только какого-либо одного класса) и *неоднородные* (содержат контуры разных классов, отличающиеся, например [6, с. 9, рис. 4] подвижностью входящих в них звеньев и типом замыкающих их связей).

2. Связь – геометрическое (кинематическое) и/или силовое взаимодействие двух твердых тел (представляет ограничения, налагаемые на положения и скорости твердых тел или точек механической системы; в механизмах – это средство передачи усилий и преобразования движений). *Реакция связи* – результат этого взаимодействия.

В зависимости от способа осуществления взаимодействия твердых тел различают [4, 17, 18] следующие типы связей – кинематические (геометрические) связи, гибкие связи, динамические связи.

3. Кинематические (геометрические) связи – ограничения, налагаемые на скорости (положения) твердых тел, которые должны выполняться при любых значениях и направлениях действующих на механическую систему сил [15, 16].

Кинематическая пара – соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение и накладывающее ограничения на их положения и скорости (предлагаемое

определение отражает двойственную роль кинематических пар в механизмах и является более полным по сравнению с традиционным [15]).

Наибольшее распространение в механизмах получили [4]: одноподвижная вращательная пара (в виде *простого шарнира*); одноподвижная поступательная пара; а также *сложные*, т.е. совмещенные шарниры, получающиеся в результате совмещения на одной оси нескольких простых шарниров [21].

Для приведения сложных шарниров к уже имеющимся в цепи простым шарнирам вводится [7] понятие: *приведенное число сложных шарниров* – число вращательных кинематических пар, добавляемых в данную цепь сложными шарнирами, рассчитываемое по формуле [7]:

$$v = v_2 + 2v_3 + 3v_4 \dots \leq 2(K - 1),$$

т. е. величина v имеет четкий предел $v_{\max} = 2(K - 1)$, зависящий от числа замкнутых контуров K синтезируемой цепи и позволяющий определить все возможные числа и комбинации простых и сложных шарниров в различных структурах многозвенных механизмов.

Обозначения: p – общее число кинематических пар в кинематической цепи, представляющей систему связанных между собой звеньев; H – подвижность кинематической пары, равная числу степеней свободы в относительном движении соприкасающихся звеньев; p_H – число кинематических пар подвижности H ($1 \leq H \leq 5$); v – приведенное число сложных шарниров; v_2 – число двойных шарниров; v_3 – число тройных шарниров и т. д.

4. Гибкие связи – можно рассматривать [17, с. 27] как односторонний неупругий транслятор передачи движения от одного звена к другому звену без их непосредственного контакта между собой, устанавливающий соответствие между положениями и скоростями звеньев (в отличие от кинематических пар) только в одном направлении.

Например, гибкая связь в виде системы соприкасающихся шариков или жидкости [17, с. 26, рис. 1.13] может работать только на сжатие. Другой пример – гибкая связь в виде цепи, троса, ремня и др. [17, с. 27, рис. 1.14] – работает только на растяжение.

Обозначение: g – число гибких связей (число контуров кинематической цепи [1, с. 14], замыкаемых гибкими связями).

5. Динамические связи – согласно [18, с. 50] накладывают ограничения на положения и скорости взаимодействующих через эти связи твердых тел в зависимости от движения механизма, а также от других действующих на механизм сил, имеющих свойство реакций связи. Они обеспечивают передачу движения от одного звена к другому без их непосредственного контакта между собой и осуществляются в виде магнитного поля или фрикционных сил [17, с. 29], гидродинамического сцепления между насосом и турбиной [18, с. 49, рис. 2.15], сил инерции вращающихся неуравновешенных грузов [9], сил упругости пружины [18, с. 50, рис. 2.15] и др. Следует выделять динамическую связь, через которую осуществляется передача движения между двумя подвижными звеньями механизма – назовем ее *активной* динамической связью (пример такой связи показан в работе [4, с. 74, рис. 2.15]).

Обозначение: d – число активных динамических связей (число контуров кинематической цепи [1, с. 14], замыкаемых активными динамическими связями).

6. Избыточные связи – повторяющиеся (или зависимые) геометрические связи, удаление которых не изменяет числа степеней свободы механизма [16, с. 36].

Избыточные связи дублируют ограничения, уже наложенные другими кинематическими связями (кинематическими парами), в результате чего некоторые из уравнений связей получают [1, с. 18], как следствие других, взаимно независимых уравнений. Установлено [4, 11, 16], что при сборке механизмов с избыточными связями в кинематических парах возникают натяги, существенно снижающие эксплуатационную работоспособность механизмов и поэтому структурный синтез рациональных (самоустанавливающихся [11] механизмов заключается в проектировании механических систем без избыточных связей.

Для исключения избыточных связей в проектируемых структурах многозвенных рычажных механизмов, достаточно выполнить их строение согласно ниже рассматриваемым кодам рациональных механизмов. Сводная таблица со всеми рассчитанными кодами четырех-, шести-, вось-

ми-, десяти- и двенадцатизвенных замкнутых кинематических цепей механизмов приведена в работе [7].

Обозначения: q – число избыточных связей (число зависимых уравнений связей), $q = q_0 + q_1$; q_0 – избыточные связи, выявленные только в пространственной схеме механизма (и отсутствующие в его «плоской» схеме); q_1 – избыточные связи, выявленные в «плоской» схеме механизма (их следует удалять в первую очередь [11]).

7. Звено механизма – твердое тело, входящее в состав механизма, где отдельные подвижные звенья совершают движение относительно неподвижной стойки.

По числу связей данного звена с другими звеньями следует различать: односвязные звенья (со свободным, т. е. незамкнутым концом), а также двухсвязные (линейные), трехсвязные (треугольные) и т. д. звенья. Соответственно в механизмах, содержащих связи только в виде кинематических пар (механические системы без применения гибких и динамических связей звеньев: $g = 0, d = 0$), различают [1, с. 12] двупарные, трехпарные и т. д. звенья (по числу кинематических пар, образуемых данным звеном с другими звеньями кинематической цепи).

Обозначения: $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i$ – соответственно число односвязных (однопарных), двухсвязных, трехсвязных..., i – связных звеньев кинематической цепи (где наибольшее число связей i , т. е. кинематических пар, гибких и динамических связей, одного из звеньев цепи с другими звеньями определяет наиболее сложное звено в кинематической цепи данного механизма); $\bar{n} = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i$ – общее число звеньев цепи (включая стойку в механизмах); $n = (\bar{n} - 1)$ – число подвижных звеньев механизма.

8. Кинематическая цепь – отображение геометрии строения механической системы в виде определенного взаиморасположения (топологии) отдельных тел (звеньев) и их связей (кинематических, гибких, динамических) с другими твердыми телами (звеньями).

Кинематическая цепь механизма представляет систему входящих в состав механизма звеньев, взаимосвязанных между собой (посредством кинематических, гибких и динамических связей) и образующих замкнутые контуры.

9. Уровень сложности кинематической цепи (Y) – новое понятие, введенное в работе [7] для количественной характеристики сложности и особенностей строения механической системы и представляющее разность между общим числом связей всех типов ($p + g + d$) и общим числом звеньев (\bar{n}) системы: $Y = (p + g + d) - \bar{n}$.

Уровень сложности проектируемой или анализируемой механической системы (механизма) однозначно предопределяет число возникающих в ней изменяемых замкнутых контуров: $K = Y + 1$. Таким образом, простейшие механические системы характеризуются $Y = 0$ (нулевой уровень сложности) и будут одноконтурными ($K = 1$), а в более сложных системах увеличение уровня сложности (т. е. разности между числом связей и числом звеньев цепи) приводит к соответствующему увеличению числа замкнутых контуров синтезируемого механизма ($Y = 1, K = 2 \dots$), причем $K = 0$ при $Y = Y_{\min} = -1$.

Зависимость между уровнем сложности кинематической цепи (Y) и ее связностью (т. е. наиболее сложным по числу связей i -м звеном цепи) представляет собой главную геометрическую зависимость механических систем, график которой позволяет выделить [5, 7] все возможные области существования открытых и замкнутых кинематических цепей механизмов и ферм, содержащих как простые, так и сложные (совмещенные) шарниры в пределах задаваемого уровня сложности цепи.

10. Замкнутый (изменяемый) контур – представляет собой замкнутую кинематическую цепь, состоящую из всех или из некоторой части звеньев механизма, в которой каждое звено образует кинематические пары и/или гибкие и динамические связи не менее чем с двумя другими звеньями цепи.

Независимые изменяемые замкнутые контуры отличаются между собой хотя бы одним звеном или одной кинематической парой и их число K можно рассчитать по предложенной автором

в работах [5, 6] формуле: $K = (p + g + d) - n = Y + 1$, которая в частном случае (для цепей без гибких и динамических связей) вырождается в известную формулу Гохмана [16, с. 39].

Замкнутые контуры в разнообразных механических системах могут быть образованы из открытых кинематических цепей 2-мя способами [6, с. 5, рис. 1]: а) контактным замыканием звеньев посредством кинематических пар (связей); б) бесконтактным замыканием звеньев посредством гибких или динамических связей.

Класс изменяемого замкнутого контура ($1 \leq h \leq 6$) предлагается [6] принимать равным числу параметров свободного движения звеньев в этом контуре (для контуров, замыкаемых только кинематическими парами подвижностью H выполняется соотношение $h \geq H + 1 = 2 \dots 6$ или равным числу направлений передачи усилий (для контуров, замыкаемых гибкой или динамической связью, например, в контурах с однонаправленной гибкой связью в виде троса – $h = 1$).

Такая классификация замкнутых контуров позволяет: с одной стороны, по одинаковой величине h объединить (обобщить) плоские рычажные и пространственные сферические механизмы ($h = 3$), а с другой стороны, многоконтурные механизмы $K > 1$ разделить на однородные (сохраняют все контуры одного класса h) и *неоднородные* (представляют набор взаимосвязанных контуров разного класса, например, $h = 2$ и $h = 3$).

В работах [6] и [7] показано, что существующие структурные формулы расчета W [4, 17] непригодны для описания неоднородных механизмов, и их можно заменить универсальной формулой W для любых механических систем [6].

Обозначения: K – общее число независимых изменяемых замкнутых контуров механизма; h – класс замкнутого контура, равный числу степеней свободы входящих в него звеньев; K_h – число замкнутых контуров данного класса в составе цепи механизма.

Примечания

1. Величина $h = 0$ характеризует кинематическую цепь без каких-либо замкнутых контуров ($K = 0$), представляющую собой [6, с. 5, рис. 1] открытый контур.

2. Для установления, какие именно звенья многозвенного механизма образуют тот или иной контур посредством кинематических пар, гибких и динамических связей, может быть использована предложенная в работе [7] формула строения кинематической цепи механизма (являющаяся формализованным символьным представлением цепи, не зависящим от нумерации звеньев механизма).

11. Основные методы образования механизмов без избыточных связей – для построения структурных схем рациональных механизмов в теории механизмов и механике машин могут быть использованы разные методы.

1. *Метод Грюблера образования механизмов* – заключается в составлении замкнутых кинематических цепей звеньев с последующим выбором из них начального звена и стойки [1]. Однако применяемые для этого аналитические зависимости Грюблера [17, с. 104], [1, с. 33] носят ограниченный характер, так как выведены только для механизмов с простыми шарнирами.

2. *Метод Ассура образования механизмов* – заключается в присоединении к предварительно заданному начальному звену механизма и стойке открытых кинематических цепей звеньев, соединенных неподвижными кинематическими парами (в виде групп Ассура нулевой подвижности) [4]. Однако данный метод не позволяет установить все возможные типы структуры механизмов.

3. *Метод структурного синтеза механических систем заданного уровня сложности* – разработан [5, 7] на основе универсальной структурной математической модели и теорем (см. п.п. 12, 13, 14) и заключается в образовании механической системы требуемой сложности (см. п. 9) из необходимого расчетного набора звеньев и соединяющих их различных связей (простых и сложных шарниров, многоподвижных кинематических пар, гибких и динамических связей). Его применение на практике позволяет рассчитать все возможные типы структуры и построить структурные схемы механических систем для каждого заданного уровня их сложности (см. п. 14).

Данный метод позволяет расчетным путем синтезировать не только традиционные цепи Грюблера и механизмы Ассура, но и все другие возможные варианты строения механических систем в виде открытых и замкнутых цепей ферм и механизмов со сложными шарнирами, гибкими и динамическими связями, а также различных неоднородных и неассуровых механизмов.

Некоторые примеры синтеза механизмов с гибкими и динамическими связями, а также неоднородных механизмов даны в работах [6, 7]. Сводные итоги синтеза и кодирования механизмов разного уровня сложности рассмотрены в п. 14.

В результате применения данного метода устанавливаем (рис. 1), что, например, в дополнение к двум известным шестизвенным кинематическим цепям Уатта [1, с. 34, рис. 1.23, б] и Стефенсона с простыми шарнирами [1, с. 34, рис. 1.23, в] существуют еще одна шестизвенная цепь с одним двойным шарниром ($n_2 = 5, n_3 = 1, v = v_2 = 1$) и одна шестизвенная цепь с двойными шарнирами ($n_2 = 6, n_3 = 0, v = v_2 = 2$).

Отметим, что указанные цепи со сложными шарнирами ($n_2 = 5, n_3 = 1$ и $n_2 = 6, n_3 = 0$) представляют собой дополнительные (по набору образующих их звеньев n_2, n_3) типы структуры по сравнению с известными цепями Уатта и Стефенсона (где $n_2 = 4, n_3 = 2$), что расширяет диапазон возможных схем рычажных механизмов (см. рис. 1).

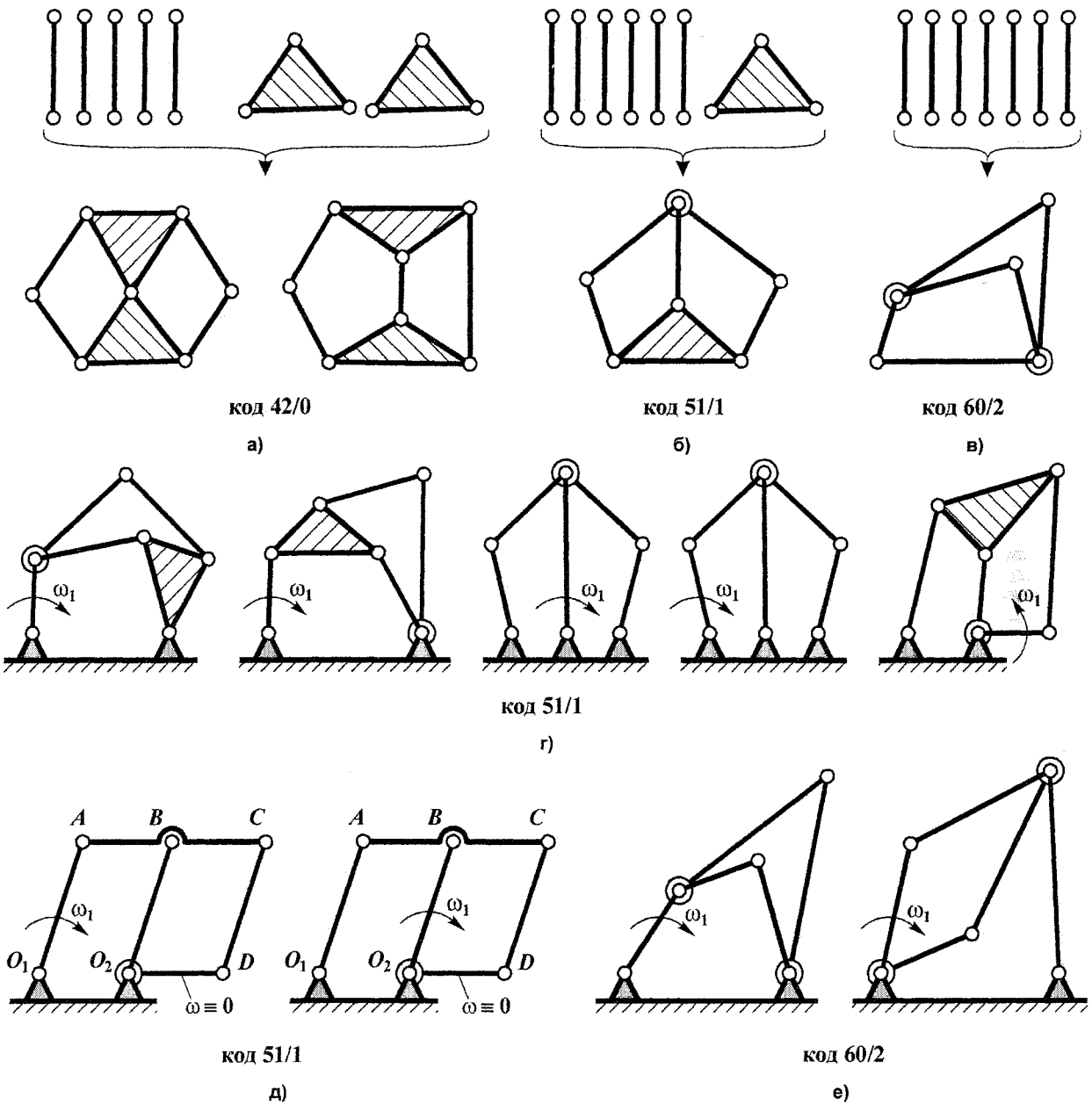


Рис. 1. Примеры разных типов структуры в виде двухконтурных шестизвенных кинематических цепей Уатта и Стефенсона (а), цепей (б, в) и одноподвижных механизмов (г, д, е) с одним (б, г, д) и двумя (в, е) сложными шарнирами (д – парадоксальная кривошипная сборка II типа за счет параллельной установки AO_1, BO_2, CD)

На рис. 1, г–е приведены результаты образования из двухконтурных кинематических цепей (показанных на рис. 1, а–в) девяти возможных схем шестизвенных рычажных механизмов со сложными шарнирами.

В результате кинематического анализа синтезированных схем шестизвенных механизмов со сложными шарнирами (см. рис. 1) автором обнаружено существование в кривошипных механизмах (в дополнение к ранее установленным [12, с. 101]) другого типа парадоксальных сборок – не связанных с периодичностью угла поворота входного звена механизма (назовем их «парадоксальными сборками II типа») и дадим им свое определение).

Парадоксальная кривошипная сборка II типа – сборка, существующая при любом положении входного звена, при которой одно из формально подвижных при монтаже звеньев механизма при его движении остается кинематически неподвижным (относительно стойки – см. рис. 1, д или другого звена – см. рис. 2) без приложения к нему тормозного момента (т. е. возникает своеобразный «кинематический тормоз»).

Показанный на рис. 1, д пример парадоксальной сборки II типа представляет собой новую схему: «Рычажный механизм В.И. Пожбелко» (патент RU 2246056) – это двухконтурный шестизвенный сдвоенный параллелограммный механизм с одним сложным (совмещенным на стойке) двойным шарниром, в котором одна из формально подвижных при монтаже механизмов сторон параллелограмма остается неподвижной относительно стойки ($\omega \equiv 0$) при неограниченном вращении входного звена $\omega_1 \neq 0$.

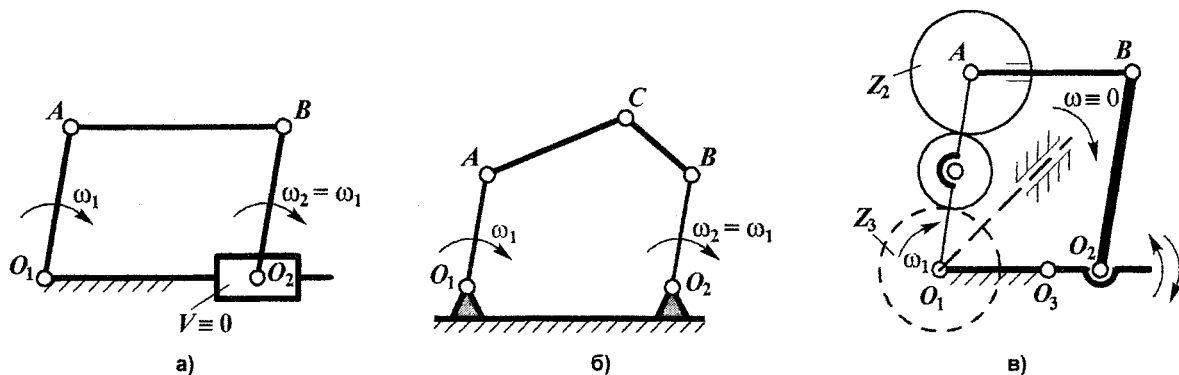


Рис. 2. Примеры парадоксальных кривошипных сборок II типа в двухподвижных механизмах (монтаж BO_2 параллельно AO_1 , $BO_2=AO_1$): а – механизм с неподвижным ползуном; б – шарнирный механизм с неподвижными между собой шатунами; в – механизм переменной структуры В.И. Пожбелко (патент RU 2249133) с точками остановки выходного вала

Отличительный признак парадоксальных кривошипных сборок II типа – функция положения механизма тождественно равна нулю (график функции отсутствует) независимо от области существования сборки (при любом угле поворота кривошипа), т. е. кинематическая остановка выходного звена может продолжаться неограниченное время при непрерывном вращении приводного двигателя и входного звена механизма ($\omega_1 \neq 0$) без разрыва кинематической цепи.

12. Структурная математическая модель механической системы без избыточных связей – представляет собой совокупность (систему) алгебраических уравнений, содержащих структурные параметры, характеризующие строение механической системы, и предназначенных для расчета числа звеньев и числа связей (кинематических пар, гибких и динамических связей), необходимых для образования (составления) из них кинематических цепей механизмов без избыточных связей.

В работе [7] на основании изложенных выше понятий автором составлена универсальная структурная математическая модель разнообразных (как однородных, т. е. содержащих все замкнутые контуры одного класса $h = \text{const}$; так и неоднородных, содержащих замкнутые контуры разных классов $h = 1-6$) механических систем любого уровня сложности ($Y = -1, Y = 0, Y = 1, Y = 2, \dots$):

$$\begin{aligned}
Y &= (p + g + d) - \bar{n} = -1; 0; 1; 2; 3; \dots, \\
\bar{n} &= n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{Y+2}, \\
(p + g + d) &= \frac{1}{2} [n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + (Y+2) \cdot n_{Y+2} + v], \\
v &= v_2 + 2v_3 + 3v_4 + \dots \leq 2Y; \quad i \leq Y+2, \\
W &= \sum_{H=1}^5 (H \cdot p_H) - \sum_{h=1}^6 (h \cdot K_h); \quad \sum_{H=1}^5 p_H = p; \quad \sum_{h=1}^6 K_h = K = Y+1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Математическая модель (1) позволяет решать задачу структурного синтеза механизмов без избыточных связей по заданным входным параметрам, включающим допустимый уровень сложности синтезируемой кинематической цепи (Y), подвижность звеньев в каждом из замкнутых контуров (h), подвижность кинематических пар (H), число гибких связей (g), число динамических связей (d) и требуемое число степеней свободы синтезируемых механизмов (W). Полученные на ЭВМ решения универсальной структурной математической модели (1) объединены в сводную таблицу в работе [7, с. 19, табл. 2] и представляют подробно рассмотренные ниже расчетные наборы чисел двух-, трех-, четырех- и т. д. многопарных звеньев замкнутых кинематических цепей с простыми ($v=0$) и со сложными ($v \neq 0$) шарнирами для образования из них одноподвижных и многоподвижных механизмов.

Примечания

1. Задавая в математической модели (1) различный уровень сложности синтезируемых замкнутых кинематических цепей ($Y=0, Y=1, Y=2, \dots$), получаем:

а) при $Y=0$ – нулевое решение (одноконтурные цепи нулевого уровня сложности $K=Y+1=1$ с наиболее сложным по числу связей звеном в пределах $i=Y+2=2$);

б) при $Y=1$ – первое решение (двухконтурные цепи первого уровня сложности $K=Y+1=2, i=Y+2=3$ и т. д. до максимально допустимого числа замкнутых контуров проектируемого механизма.

2. В частном случае (плоские однородные механизмы с простыми шарнирами, без гибких и динамических связей, содержащие замкнутые контуры только 3-го класса – $h=3$) универсальная структурная математическая модель (1) вырождается в известные зависимости Грюблера [17, с. 104], формулы Чебышева и Гохмана [17, с. 83], структурные решения на основе которых заранее будут ограничены указанными рамками.

13. Теоремы о структурном синтезе механических систем без избыточных связей.

На основании полученных в работе [7] аналитических решений универсальной структурной математической модели (1) автором сформулированы следующие теоремы.

Теорема 1. Кинематические цепи без избыточных связей должны содержать не более K_{\max} независимых замкнутых контуров класса h , рассчитываемых по формуле

$$K_{\max} = \frac{1}{h} \left[\sum_{H=1}^5 (H \cdot p_H) - W \right].$$

Следствие. Выполнение цепи с увеличенным числом замкнутых контуров $K > K_{\max}$ приводит к ее сборке с натягами и возникновению в ней избыточных связей, число которых q_1 равно

$$q_1 = h(K - K_{\max}).$$

Теорема 2. Кинематические цепи без избыточных связей должны содержать не менее $n_{2\min}$ двухсвязных (линейных) звеньев, число которых рассчитывается по формуле

$$n_{2\min} = 3 + W + v + \sum_{h=1}^6 K_h \cdot (h-3) + (g + d) + (n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \dots) - \sum_{H=1}^5 (H-1) \cdot p_H. \tag{2}$$

Следствие 1. Выполнение цепи с уменьшенным количеством двухсвязных (линейных) звеньев $n_2 < n_{2\min}$ приводит к возникновению в ней избыточных связей, число q_1 которых равно

$$q_1 = n_{2\min} - n_2.$$

Следствие 2. Согласно (2) простейший ($K = p_1 - n = 1, v = 0$) плоский механизм без избыточных связей ($W = 1$, одноконтурный $h = 3$) должен быть четырехзвенным, а простейший ($K = p_1 - n = 1, v = 0$) пространственный механизм ($W = 1$, одноконтурный $h = 6$) – семизвенным.

На основании как универсальной структурной формулы W [6] в математической модели (1), так и из совместного рассмотрения вышеуказанных первой и второй теорем о структурном синтезе, можно сформулировать следующий принцип структурного синтеза (правило проектирования) замкнутых кинематических цепей без избыточных связей (цепи любого типа – плоские и пространственные, однородные и неоднородные).

Принцип структурного синтеза кинематических цепей без избыточных связей. В кинематической цепи без избыточных связей суммарная подвижность кинематических пар и, соответственно, подвижность каждого из звеньев, образующих замкнутый контур класса h , в каждом из независимых контуров цепи должна быть равна величине h . Данное правило проектирования легко проверить на примерах любых групп Ассур – как однозвенных с кинематическими парами разной подвижности, так и многозвенных с одноподвижными парами; как плоских, например и $h = 3$, так и пространственных, например $h = 6$.

Примечания

1. Аналитическая зависимость (2) устанавливает при синтезе кинематических цепей без избыточных связей требуемую количественную взаимосвязь между разными структурными элементами механической системы (через конкретные значения $v, g, d, W, p_H, K_h, n_2, n_4, n_5, n_6, \dots$) и может быть использована как уравнение для проверки правильности строения кинематических цепей плоских и пространственных механизмов – с точки зрения отсутствия вредных избыточных связей (выполнение условия $q = 0$) в их структуре разного уровня сложности.

2. Используя математические зависимости (1) и (2), можно выполнить структурный синтез без избыточных кинематических цепей, структурных групп Ассур и механизмов не только с традиционно четным числом звеньев [1, 3, 11, 12, 14], но и осуществить синтез без избыточных структур с нечетным числом звеньев (1, 3, 5, ... и т. д.) – примеры даны в работе [7] и рассмотрены ниже.

3. Задавая в выражениях (1) и (2) значения входных параметров плоской цепи нулевого уровня сложности: $Y = 0$ ($K = 1$), $W = 0, g = 0, d = 0, H = 2, h = 3$, получаем следующее нулевое решение: $n_{2\min} = 2$ (с учетом стойки), из которого устанавливаем, что простейшая одноконтурная плоская группа Ассур будет однозвенной, т.е. будет представлять собой одно дупарное звено (одна кинематическая пара – одноподвижная, другая пара – двухподвижная, так как согласно указанной в структурной математической модели (1) универсальной формуле W [6] суммарная подвижность кинематических пар в каждом замкнутом контуре плоской группы Ассур с $W = 0$ должна быть равна $h = 3$).

4. Задавая в выражениях (1) и (2) значения входных параметров пространственной цепи нулевого уровня сложности: $Y = 0$ ($K = 1$), $W = 0, g = 0, H = H_{\max} = 5, h = h_{\max} = 6$, получаем следующее нулевое решение: $n_{2\min} = 2$ (с учетом стойки), из которого устанавливаем, что простейшая одноконтурная пространственная группа Ассур будет однозвенной, т.е. также представляет собой одно дупарное звено (но в этом случае одна пара должна быть одноподвижной, а другая – пятиподвижной, так как согласно указанной в структурной математической модели (1) универсальной формуле W [6] суммарная подвижность кинематических пар в каждом замкнутом контуре пространственной группы Ассур с $W = 0$ должна быть равна $h = 6$).

14. Кодирование кинематических цепей механизмов без избыточных связей – формализованное представление строения цепи в виде набора чисел (кода), отображающих количество двух-, трех-, ... и т. д. многосвязных (многопарных) звеньев и соединяющих их простых (случай $v = 0$) и сложных (случай $v \neq 0$) шарниров.

Предлагаемая [5, 7] запись кода замкнутой кинематической цепи механизма в виде дроби

$$\frac{n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, \dots}{v}, \quad \frac{n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, \dots}{v_2, v_3, v_4, \dots}$$

содержит следующую информацию:

а) количество цифр в числителе кода указывает число независимых замкнутых контуров цепи, а сумма этих цифр указывает общее число звеньев цепи (со стойкой);

б) числитель дроби указывает требуемое (для построения безызбыточной цепи) количество звеньев с определенным числом связей (кинематических пар), а знаменатель дроби указывает, какие шарниры нужны для их соединения;

в) схемы, у которых код (т. е. набор n_2, n_3, n_4, \dots, v) совпадает, относятся к одному типу структурных схем механизмов.

В работе [7] приведена составленная на основе решений универсальной структурной математической модели (1) полная сводная таблица кодов от четырех до двенадцатизвенных цепей плоских рычажных одноподвижных механизмов, из которой следует:

1. Нулевой уровень сложности ($Y=0$) – существует только одна четырехзвенная одноконтурная кинематическая цепь (код 4/0).

2. Первый уровень сложности ($Y=1$) – существует только 3 типа структур шестизвенных двухконтурных цепей (коды 42/0; 51/1; 60/2), т. е. к указанному в работе [1, с. 34, рис. 1.23] цепям Уатта и Стефенсона с простыми шарнирами (код 42/0) следует добавить показанные на рис. 1 еще 2 цепи с одним ($v=v_2=1$) и с двумя ($v=v_2=2$) двойными шарнирами (коды 51/1 и 60/2).

3. Второй уровень сложности ($Y=2$) – существует только 9 типов структур восьмизвенных трехконтурных цепей, из которых к рассматриваемым в работах [12, рис. 21, табл. 1.2], [20, с. 16, табл. 1] 3-м типам цепей только с простыми шарнирами (коды 440/0, 521/0, 602/0) следует добавить 6 типов цепей с двойными шарнирами (коды 530/1, 611/1, 620/2, 701/2, 710/3, 800/4), что существенно расширит диапазон приведенных в [12, 20] схем плоских механизмов и сделает его абсолютно полным.

4. Третий уровень сложности ($Y=3$) – существует только 23 типа структур десятизвенных четырехконтурных цепей, из которых существует только 7 типов структур с простыми шарнирами (коды 4600/0, 5410/0, 6220/0, 6301/0, 7030/0, 7111/0, 8002/0), а также 5 типов структур с одним двойным шарниром, т. е. $v_2=1$ (коды 5500/1, 6310/1, 7120/1, 7201/1, 8011/1), 4 типа структур с $v_2=2$ (коды 6400/2, 7210/2, 8020/2, 8101/2), 3 типа с $v_2=3$ (коды 7300/3, 8110/3, 9001/3), 2 типа структур с $v_2=4$ (коды 8200/4, 9010/4), один тип структуры с $v_2=5$ (код 9100/5) и один тип структуры с $v_2=6$ (код 10.000/6).

5. Четвертый уровень сложности ($Y=3$) – существует только 53 типа структуры двенадцатизвенных пятиконтурных цепей, из которых 15 типов структуры с простыми шарнирами (коды 48000/0, 56100/0, 64200/0, 65010/0, 72300/0, 73110/0, 74001/0, 80400/0, 81210/0, 82020/0, 82101/0, 90120/0, 90201/0, 91011/0, 10.0002/0) и 38 типов структуры со сложными шарнирами: 11 типов структуры с одним двойным шарниром, т. е. $v_2=1$ (57000, 65100, 73200, 74010, 81300, 82110, 83001, 90210, 91020, 91101, 10.0011), 9 типов структуры с двумя двойными шарнирами, т. е. $v_2=2$ (66000, 74100, 82200, 83010, 90300, 91110, 92001, 10.0020, 10.0101), 6 типов структуры с $v_2=3$ (75000, 83100, 91200, 92010, 10.0110, 10.1001), 5 типов структуры с $v_2=4$ (84000, 92100, 10.0200, 10.1010, 11.0001), 3 типа структуры с $v_2=5$ (93000, 10.1100, 11.0010), 2 типа структуры с $v_2=6$ (коды 10.2000/6 и 11.0100/6), 1 тип структуры с $v_2=7$ (код 11.1000/7), 1 тип структуры с $v_2=8$ (код 12.0000/8). Полный перечень всех 38 типов структуры двенадцатизвенных цепей пятиконтурных механизмов со сложными шарнирами приведен ниже (см. «Выводы»).

Сводный перечень указанных расчетных кодов [7] можно применить для решения следующих задач.

1. Идентификация различных структурных схем механизмов с точки зрения выявления (по несовпадению кода анализируемого механизма с требуемым табличным кодом) дефектов строения (приводящих к вредным избыточным связям) и определения путей их устранения.

1. Например, приведенный в работе [1, с. 24, рис. 1.14] десятизвенный механизм привода крючковых игл основывальной машины содержит $n_2=8, n_3=1, n_4=1, n_5=0, v_2=3$, т. е. имеет код 8110/3, является четырехконтурным $K=4$ (так как числитель кода содержит 4 цифры) и от-

носится к структурам третьего уровня сложности ($Y = K - 1 = 3$). Такой код есть в рассмотренной выше сводной таблице кодов [7], следовательно, в плоской схеме данного механизма нет особо вредных избыточных связей $q_1 = 0$ и по терминологии [11] он является рациональным.

2. Приведенный в работе [1, с. 19, рис. 1.7] механизм двойного параллелограмма имеет строение цепи $n_2 = 3, n_3 = 2, v = 0$ (код 32/0). Такой код отсутствует в рассмотренном выше перечне кодов двухконтурных цепей первого уровня сложности ($Y = 1$). Для устранения дефектов строения цепи (наличие избыточных связей $q_1 \neq 0$) нужно изменить структуру цепи согласно одного из трех кодов (42/0; 51/1; 60/2) [7, рис. 2].

3. Рассчитанный математически [12, с. 20, табл. 1.1] один из 8 типов структуры десятизвенной кинематической цепи с простыми шарнирами (а именно: $n_2 = 7, n_3 = 1, n_4 = 2, n_5 = 0, v = 0$) отсутствует в перечне сводной таблицы перечисленных выше 7 вариантов кодов третьего уровня сложности [7] и поэтому механизм с кодом 7120/0 на практике неосуществим.

Это можно доказать более простым и наглядным способом – так как каждая связь (в данном случае это простой шарнир) соединяет два звена, то удвоенное число связей (шарниров) на всех по отдельности рассматриваемых звеньях в любой цепи должно быть четным. Указанное правило четности: $2(p + g + d) = \text{четное число}$ – в данной цепи с кодом 7120/0 не выполняется, так как удвоенное число кинематических пар равно нечетному числу:

$$2p = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 25.$$

II. Определение кодов и построение механизмов повышенной подвижности ($W > 1$), не содержащих избыточных связей. Для этого согласно указанной во второй теореме синтеза (2) прямой зависимости между n_2 и W [7] достаточно просто увеличить число двухсвязных (двупарных) звеньев пропорционально увеличению W .

Например, используя код 6301/0 десятизвенного механизма третьего уровня сложности с $W_1 = 1$ (имеющего строение $n_2 = 6, n_3 = 3, n_4 = 0, n_5 = 1, v = 0$), можно легко рассчитать код механизма, например, с $W_2 = 3$. Для этого нужно соответственно увеличить n_2 до $n_2 = 6 + (W_2 - W_1) = 8$, т. е. искомым код цепи трехподвижного механизма должен быть 8301/0. На практике рассчитанному коду 8301/0 действительно соответствует двенадцатизвенный плоский механизм привода основовязальной машины с тремя степенями свободы, не содержащий избыточных связей в плоской схеме [1, с. 25, рис. 1.15].

Примечания

1. Аналогично без дополнительного решения системы структурных уравнений (1) можно рассчитывать код и построить структурную схему многоподвижного механизма с нечетным числом звеньев цепи. Например, используя рассчитанный [7] для двенадцатизвенных механизмов четвертого уровня сложности с $W = 1$ код 56100/0 ($n_2 = 5, n_3 = 6, n_4 = 1, n_5 = 0, n_6 = 0, v = 0$), можно за счет увеличения согласно второй теореме синтеза (2) на единицу числа двупарных звеньев (до $n_2 = 6$) рассчитать код нового механизма с $W = 2$ (это будет код 66100/0) и на основании его одноподвижный двенадцатизвенный механизм [17, с. 100, рис. 3.4] преобразовать в тринадцатизвенный двухподвижный механизм тоже без избыточных связей.

2. Аналогично без дополнительного решения системы структурных уравнений (1) можно составить код кинематической цепи механизма с парами увеличенной подвижности ($H > 1$). Например, задавая в зависимости второй теоремы (2) значения $H = 2, p_H = p_2 = 1$, т. е. заменяя в структуре цепи одну из пар на двухподвижную, из выражения (2) определяем: $n_2 = 3 + W - (H - 1) \cdot p_H = 3 + 1 - (2 - 1) \cdot p_2 = 3$, т. е. получаем структуру плоского трехзвенного одноконтурного механизма (кулачкового или зубчатого).

3. Так как при увеличении подвижности синтезируемого механизма W (что требует увеличения числа двупарных звеньев n_2) или при увеличении подвижности применяемых кинематических пар H (что приводит, наоборот, к уменьшению n_2) число цифр в коде синтезируемого ме-

ханизма не изменяется, то можно утверждать, что число замкнутых контуров K является органической характеристикой механизма, независимой от величины W и H .

4. Подставляя в три первых уравнения математической модели (1) соответствующие структурные параметры анализируемой механической системы, можно по выполнению этих уравнений идентифицировать (распознать) замкнутые кинематические цепи без избыточных связей (как с простыми, так и со сложными шарнирами). Такая процедура распознавания на практике (см. п. 14) сводится к проверке соответствия кода анализируемой цепи – рассчитанному по уравнениям (1) набору кодов рациональных механизмов.

Выводы

1. С учетом применения при структурном синтезе сложных шарниров установлено существование следующих типов структуры замкнутых кинематических цепей плоских рычажных одноподвижных механизмов без избыточных связей:

а) 1 тип структуры одноконтурных четырехзвенных механизмов с простыми шарнирами (механизмы нулевого уровня сложности);

б) 3 типа структуры одноконтурных шестизвенных механизмов – из них 2 дополнительных типа структуры со сложными шарнирами: 51 ($v_2 = 1$) и 60 ($v_2 = 2$) – механизмы первого уровня сложности;

в) 9 типов структуры трехконтурных восьмизвенных механизмов – из них 6 дополнительных типов структуры со сложными шарнирами: 530, 611 ($v_2 = 1$); 620, 701 ($v_2 = 2$); 710 ($v_2 = 3$); 800 ($v_2 = 4$) – механизмы второго уровня сложности;

г) 23 типа структуры четырехконтурных десятизвенных механизмов – из них 16 дополнительных типов структуры со сложными шарнирами: 5500, 6310, 7120, 7201, 8011 ($v_2 = 1$); 6400, 7210, 8020, 8101 ($v_2 = 2$); 7300, 8110, 9001 ($v_2 = 3$); 8200, 9010 ($v_2 = 4$); 9100 ($v_2 = 5$); 10.000 ($v_2 = 6$) – механизмы третьего уровня сложности;

д) 53 типа структуры пятиконтурных двенадцатизвенных механизмов – из них 38 дополнительных типов структуры со сложными шарнирами: 57000, 65100, 73200, 74010, 81300, 82110, 83001, 90210, 91020, 91101, 10.0011 ($v_2 = 1$); 66000, 74100, 82200, 83010, 90300, 91110, 92001, 10.0020, 10.0101 ($v_2 = 2$); 75000, 83100, 91200, 92010, 10.0110, 10.1001 ($v_2 = 3$); 84000, 92100, 10.0200, 10.1010, 11.0001 ($v_2 = 4$); 93000, 10.1100, 11.0010 ($v_2 = 5$); 10.2000, 11.0100 ($v_2 = 6$); 11.1000 ($v_2 = 7$); 12.0000 ($v_2 = 8$) – механизмы четвертого уровня сложности.

2. Математическая запись (2) теоремы 2 о структуре кинематических цепей без избыточных связей, которой удовлетворяют все выше перечисленные типы структуры, может быть использована как уравнение для проверки правильности строения кинематических цепей механизмов – с точки зрения отсутствия вредных избыточных связей (выполнение условия $q_1 = 0$) в их плоской структуре разного уровня сложности.

3. Установлено, что только на основе применения сложных шарниров в плоских шестизвенных рычажных механизмах ($W = 1$) удастся реализовать парадоксальную кривошипную сборку, отличающуюся от обычных сборок нулевой функцией положения выходного (формально подвижного) звена при любых значениях угла поворота начального звена механизма (т. е. с неограниченной областью существования).

4. В полноте рассмотренных выше и рассчитанных для каждого уровня сложности ($Y = 0$; $Y = 1$; $Y = 2$; $Y = 3$; $Y = 4$) наборов кодов разных типов структуры (вариантов строения) замкнутых кинематических цепей можно убедиться путем безуспешных попыток обнаружения каких-либо противоречащих данным кодам структурных схем механизмов без избыточных связей.

Литература

1. Механика машин: учебное пособие для вузов / И.И. Вульфсон [и др.]; под ред. Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.
2. Евграфов, А.Н. Расчет и проектирование механизмов и машин с помощью ЭВМ / А.Н. Евграфов. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1992. – 80 с.
3. Евграфов, А.Н. Теория механизмов и машин: учебное пособие / А.Н. Евграфов, М.З. Коловский, Г.Н. Петров. – СПб.: Изд-во СПб ГПУ, 2003. – 240 с.
4. Теория механизмов и механика машин: учебник для вузов / К.В. Фролов [и др.]; под ред. К.В. Фролова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 664 с.
5. Пожбелко, В.И. Теория структуры механических систем // Методы решения задач синтеза механизмов: Учебное пособие / В.И. Пожбелко. – Челябинск: ЧГТУ, 1993. – С. 19–56.
6. Пожбелко, В.И. Универсальная структурная формула и классификация механических систем любой структуры / В.И. Пожбелко // Известия вузов. Машиностроение. – 2000. – № 1–2. – С. 3–10.
7. Пожбелко, В.И. Структурный синтез и анализ механических систем произвольной структуры заданного уровня сложности / В.И. Пожбелко // Известия вузов. Машиностроение. – 2000. – № 5–6. – С. 13–25.
8. Пожбелко, В.И. Универсальные формулы структурного анализа и синтеза механизмов с позиций «черного ящика» / В.И. Пожбелко // Проблемы механики современных машин: материалы второй междунар. конф. (21–26 июня 2003 г.). – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2003. – Т. 1. – С. 31–34.
9. Пожбелко, В.И. Инерционно-импульсные приводы машин с динамическими связями / В.И. Пожбелко. – М.: Машиностроение, 1989. – 136 с.
10. Крайнев, А.Ф. Механика (искусство построения) машин. Фундаментальный словарь / А.Ф. Крайнев. – М.: Машиностроение, 2000. – 904 с.
11. Решетов, Л.Н. Конструирование рациональных механизмов / Л.Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1972. – 256 с.
12. Пейсах, Э.Е. Система проектирования плоских рычажных механизмов / Э.Е. Пейсах, В.А. Нестеров. – М.: Машиностроение, 1988. – 232 с.
13. Пейсах, Э.Е. О терминологии по теории механизмов и машин / Э.Е. Пейсах // Теория механизмов и машин. – 2004. – № 2(4). – С. 80–94.
14. Пейсах Э.Е. О структурном синтезе рычажных механизмов (Комментарии к статье Л.Т. Дворникова «Опыт структурного синтеза механизмов» // ТММ, 2004, №2(4)) / Э.Е. Пейсах // Теория механизмов и машин. – 2005. – № 1(5). – С. 77–80.
15. Теория механизмов и машин. Терминология. АН СССР. – М.: Изд-во «Наука», 1984. – 120 с.
16. Попов, С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин: Учебное пособие для вузов / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев; под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1999. – 351 с.
17. Кожжевников, С.Н. Основания структурного синтеза механизмов / С.Н. Кожжевников. – Киев: Наукова думка, 1979. – 232 с.
18. Озол, О.Г. Теория механизмов и машин / О.Г. Озол. – М.: Изд-во «Наука», 1984. – 432 с.
19. Смелягин, А.И. Структура, структурный анализ и синтез механизмов: учебное пособие / А.И. Смелягин. – Новосибирск: НГТУ, 1997. – 107 с.
20. Дворников, Л.Т. Опыт структурного синтеза механизма / Л.Т. Дворников // Теория механизмов и машин. – 2004, № 2(4). – С. 3–17.
21. Кожжевников, С.Н. Теория механизмов и машин / С.Н. Кожжевников. – М.: Машиностроение, 1973. – 592 с.

$$\frac{dP_1}{dt} = (Q_{H1} - Q_{M1} - Q_{K11} - Q_{K21} + Q_{K31} - Q_{K41} - Q_{11ГА} + Q_{12ГА}) \frac{E(P, B, n)}{V_1}; \quad (1)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = (Q_{M2} - Q_{M2} - Q_{K12} - Q_{K22} + Q_{K32} - Q_{K42} - Q_{21ГА} + Q_{22ГА}) \frac{E(P, B, n)}{V_2}. \quad (2)$$

Здесь в дополнение к подрисуночной надписи рис. 1 $Q_{11ГА}$, $Q_{12ГА}$, $Q_{21ГА}$, $Q_{22ГА}$ – потоки рабочей жидкости в гидроаккумулятор и из него для магистрали 1 и 2 соответственно, поскольку в зависимости от условий движения каждая из них бывает магистралью высокого давления; $E(P, B, n)$ – модуль упругости жидкости, зависящий от давления P , газосодержания B и показателя политропы n ; V_1 , V_2 – объемы соответствующих магистралей.

Далее приведены результаты математического эксперимента с установкой гидроаккумулятора: на рис. 2–5 показаны графики давлений ГОП и угловых скоростей корпуса быстроходной гусеничной машины со штатным механизмом поворота и с гидроаккумулятором в механизме поворота.

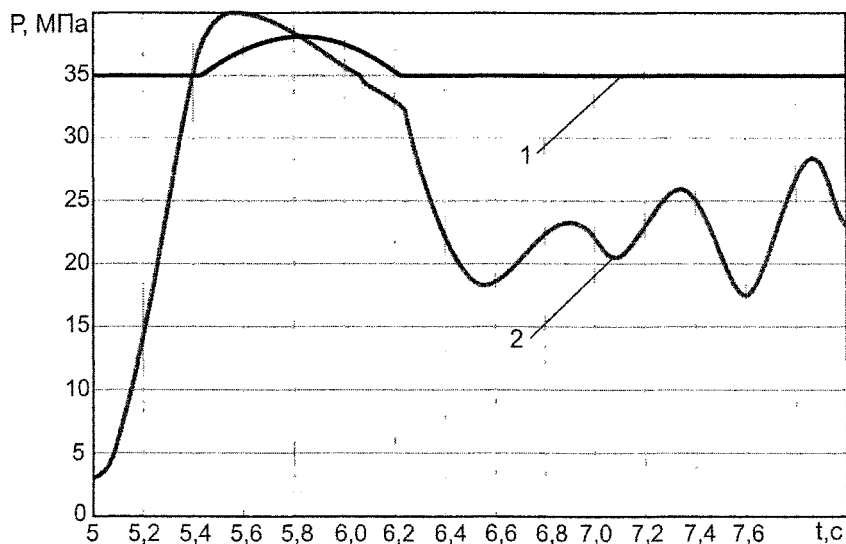


Рис. 2. Зависимости давления в ГОП и гидроаккумуляторе от времени:
1 – гидроаккумулятор, 2 – ГОП

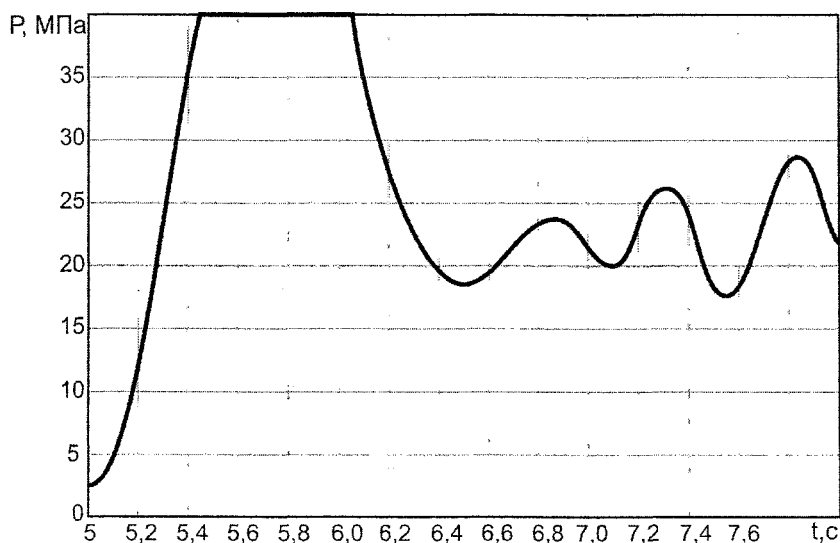


Рис. 3. Зависимость давления ГОП от времени при штатном механизме поворота

Ситуация, зафиксированная на графиках, возникает при маневре на достаточно тяжелом грунте или при резком повороте штурвала. По давлению в нагнетательной магистрали ГОП можно констатировать следующие изменения: если при штатном механизме поворота клапана ГОП

текут в течение 0,6 с (см. рис. 3), то при установке гидроаккумулятора перегрузка ГОП исключается полностью (см. рис. 2). По угловой скорости корпуса быстроходной гусеничной машины: линии 1 на рис. 4 и 5 соответствуют теоретической угловой скорости поворота, а линии 2 – реальной; если внимательно присмотреться к графикам, то можно констатировать, что, например, в момент времени $t = 6,4$ с быстроходная гусеничная машина с гидроаккумулятором имеет реальную угловую скорость корпуса 0,54 рад/с против 0,5 рад/с у штатной машины.

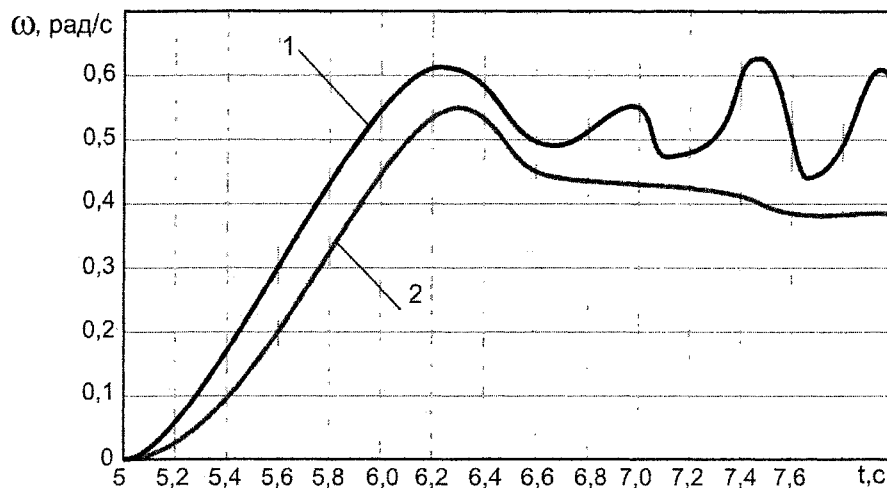


Рис. 4. Зависимости угловых скоростей корпуса машины от времени при установке гидроаккумулятора: 1 – теоретическая угловая скорость; 2 – действительная угловая скорость

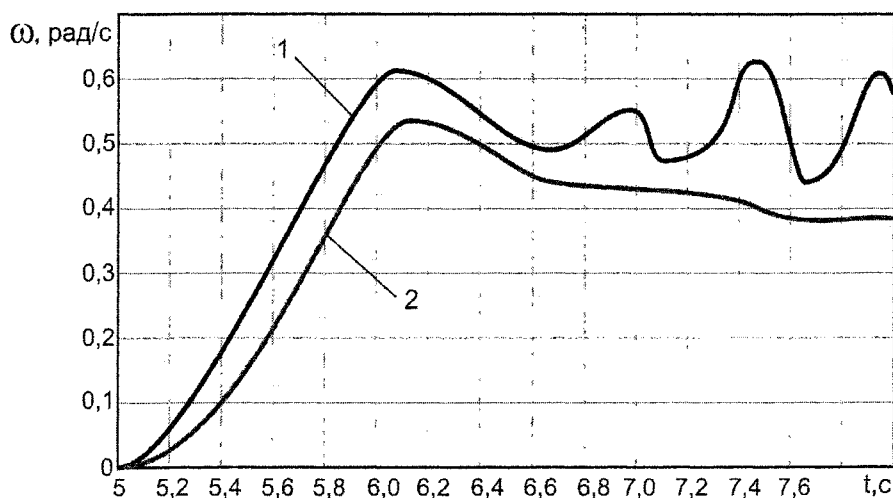


Рис. 5. Зависимость угловых скоростей корпуса БГМ со штатным механизмом поворота: 1 – теоретическая угловая скорость; 2 – действительная угловая скорость

Таким образом, показано, что математическая модель позволяет оценить на ранней стадии проектирования целесообразность внесения изменений в конструкцию механизмов поворота опытных машин. Предложенные конструктивные решения по блокировочному фрикциону, гидромуфте и гидроаккумулятору механизма поворота, работающим совместно с гидрообъемной передачей, могут быть при соответствующей проработке внедрены в производство.

Литература

1. Снижение динамических нагрузок на гидрообъемную передачу в механизме поворота / С.В. Кондаков [и др.]. // Вестник бронетанковой техники. – 1994. – № 1. – С. 49–51.
2. Кондаков, С.В. Обеспечение управляемости быстроходных гусеничных машин на переходных режимах криволинейного движения: монография / С.В. Кондаков. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2006. – 92 с.

СОЗДАНИЕ ПЛАНЕТАРНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ СМЕСИТЕЛЕЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА С УРАВНОВЕШЕННЫМИ САТЕЛЛИТАМИ

В.И. Пожбелко, А.В. Ковнацкий

Рассмотрен один из видов технологических машин, обладающих адаптивными свойствами и реагирующих на изменение свойств обрабатываемой среды в ходе технологического процесса. Применительно к технологическому процессу перемешивания вязких материалов предложены схемы смесителей, построенных на базе вибрационных уравновешенных планетарных приводов и имеющих рабочий орган, средняя скорость которого меняется в зависимости от вязкости обрабатываемой среды. Предложена обобщенная динамическая модель планетарных вибрационных смесителей автоколебательного типа с уравновешенными сателлитами.

Многие технологические процессы пищевой отрасли промышленности требуют применения самонастраивающихся механизмов, в которых законы движения рабочих органов автоматически изменяются при изменении рабочего процесса так, что условия его выполнения оказываются оптимальными [1]. Если для автоматической настройки требуется, чтобы при изменении рабочего процесса соответственно изменяется скорость рабочего органа (РО), то можно использовать механизм бесступенчатого изменения скорости, построив систему связи между механизмом и рабочим процессом так, чтобы каждому возможному состоянию рабочего процесса соответствовало оптимальное значение скорости РО. В более сложных случаях для того, чтобы рабочий процесс протекал в наилучших условиях, надо изменять не только скорость, но и весь закон движения РО, включая и траектории движения его отдельных точек. В самонастраивающихся механизмах эти требования удовлетворяются путем автоматического изменения параметров, определяющих схему механизма или режим его работы.

Сказанное полностью относится к процессам перемешивания вязких материалов. В ходе перемешивания может изменяться температура материалов, могут происходить физико-химические превращения, ведущие к существенному изменению вязкости обрабатываемой среды. Для соответствующего изменения скорости РО смесители вязких материалов обычно оснащают коробкой скоростей или вариатором, которые управляются вручную и часто требуют прерывания рабочего процесса.

Автоматизация работы смесителей вязких материалов, оснащенных коробками скоростей, вариаторами или двигателями с переменной скоростью вращения ротора, основана на использовании дорогостоящих электронных устройств, хотя эти устройства предоставляют широкие возможности по программированию режимов работы смесителей и скоростей их РО.

В связи с вопросами автоматизации технологических процессов авторами выдвинута и экспериментально подтверждена научная гипотеза о возможности получения автоколебаний в механической системе, построенной на основе планетарного привода с уравновешенными сателлитными узлами, за счет введения в его схему упругого звена. Обрабатываемая среда является частью такой механической системы, поэтому режим работы всей системы во многом определяется свойствами обрабатываемой среды (например, ее вязкостью, плотностью). Технологическая машина, сконструированная на базе такого вибрационного уравновешенного планетарного привода (ВУПП), обладает адаптивными свойствами, т. е. в ее основу положен самонастраивающийся механизм. В составе смесителя вязких материалов работу ВУПП можно представить следующим образом: при изменении средней вязкости обрабатываемой среды изменяется амплитуда автоколебаний РО и средняя скорость его движения. Таким образом, ВУПП может выполнять функцию самонастраивающегося вариатора в некоторых пределах изменения вязкости обрабатываемой среды. Конструкции планетарных смесителей вязких материалов на базе ВУПП защищены патентами РФ [2, 3].

Конструкция смесителя вязких материалов обычно содержит двигатель, который жестко соединен через ступенчатую коробку скоростей и планетарный передаточный механизм с рабочим органом.

Известен способ получения смесей, заключающийся в том, что перемешиваемую среду приводят в колебательное движение, что способствует интенсификации образования смеси, повышению однородности. Однако соответствующие устройства для виброперемешивания жидких сред не нашли широкого применения из-за многих недостатков, главным образом связанных со способом возбуждения колебаний в перемешиваемой среде. Например, использование для создания колебаний инерционных импульсных механизмов вызывает повышенные нагрузки на элементы конструкции, воздействие со стороны инерционного импульсного механизма на приводной двигатель в виде импульсов реактивного момента, отрицательно влияющее на работу двигателя и снижающее его КПД. Некоторые схемы смесителей требуют для возбуждения колебаний использования электромагнитных приводов, сжатого воздуха из пневмосети, вибраторов и других устройств, которые усложняют их конструкцию.

В связи с этим возникает актуальная задача создания планетарного привода, снижающего ударные нагрузки на приводной двигатель и передаточные механизмы и обладающего адаптивными свойствами в условиях переменного сопротивления на РО, а также обеспечивающего движение РО по сложной траектории.

На рис. 1 и 2 представлены два варианта разработанных планетарных смесителей вязких материалов (ПСВМ).

ПСВМ с упругим элементом на сателлите, изображенный на рис. 1, содержит приводной двигатель 1, корпус 2, передаточный механизм 3 и планетарный механизм, включающий водило 4, центральную шестерню 5 и установленные с ней в зацеплении сателлиты 6, снабженные балансами 7, которые соединены с сателлитами 6 через упругие элементы 8. Рабочие органы 9, установленные эксцентрично на балансах 7, образуют узлы, уравновешенные относительно осей сателлитов 6.

Вибрационный ПСВМ работает следующим образом. При вращении водила 4 от двигателя 1 сателлиты 6 с рабочими органами 9 совершают внутри корпуса 2 сложное движение. При этом рабочие органы 9 перемещаются в вязкой среде с переменной скоростью, что, вследствие зависимости силы вязкого сопротивления от скорости, приводит к появлению переменного момента на балансах 7 и вызывает их крутильные колебания относительно сателлитов 6. При колебаниях усложняется абсолютная траектория движения рабочих органов 9.

Планетарный привод с центральным упругим элементом (см. рис. 2) содержит установленные в корпусе 1 рабочие органы 2, передаточный механизм 3 и планетарный механизм, включающий центральную шестерню 4, сателлиты 5 и водило 6, приводимое в движение двигателем 7. Рабочие органы 2 закреплены на сателлитах 5 со смещением относительно осей сателлитов и образуют вместе с сателлитами узлы, уравновешенные относительно этих осей посредством противовесов 8, а шестерня 4 планетарного механизма подвижно связана с корпусом 1 через упругий элемент 9.

Основываясь на предположении о том, что обрабатываемая среда оказывает линейно-вязкое сопротивление движению РО, авторами была составлена динамическая модель планетарных приводов нового типа (названная составным колесом) и выделены обобщенные параметры, описывающие поведение автоколебательной системы в зависимости от проектных параметров привода, режима его работы и величины полезного сопротивления на РО [4].

Обобщенная динамическая модель представляет собой двухмассовую колебательную систему. Она служит для исследования динамики и потенциальных возможностей разработанного нового типа планетарных приводов (некоторые примеры которых приведены на рис. 1 и 2). Динамическая модель показана на рис. 3. В составном колесе баланс 2 соединен с сателлитом 1 упругим элементом, работающим на кручение (на рис. 3 не показан). Сателлит 1 составного колеса катится по направляющей 3 с постоянной угловой скоростью, что обеспечивается установкой в конструкции привода достаточно больших маховых масс. Рабочий орган 4 представляет собой цилиндрический стержень, к которому приложена сила вязкого сопротивления обрабатываемой среды, зависящая от скорости движения РО.

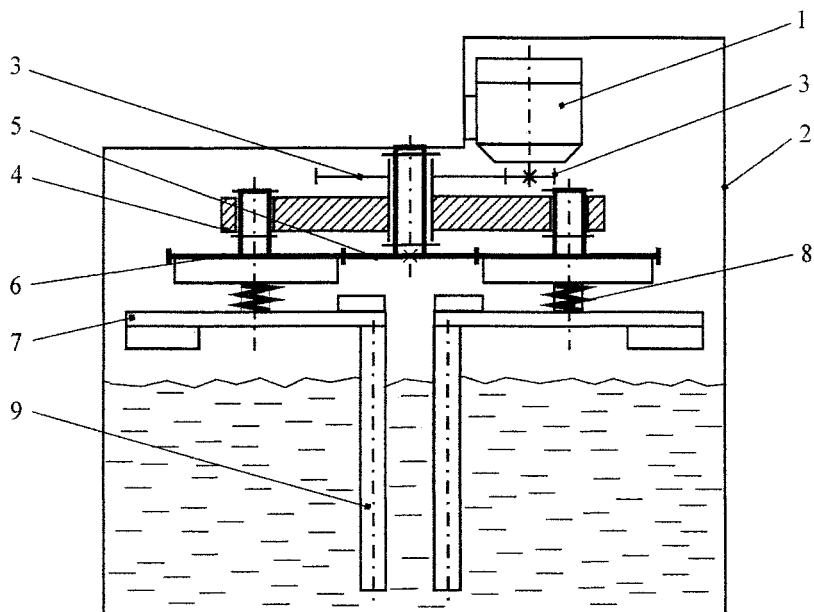


Рис. 1. Схема планетарного привода смесителя с упругим элементом на сателлите: 1 – двигатель; 2 – корпус; 3 – передаточный механизм; 4 – водило; 5 – центральная шестерня; 6 – сателлит; 7 – баланс; 8 – упругий элемент; 9 – рабочий орган

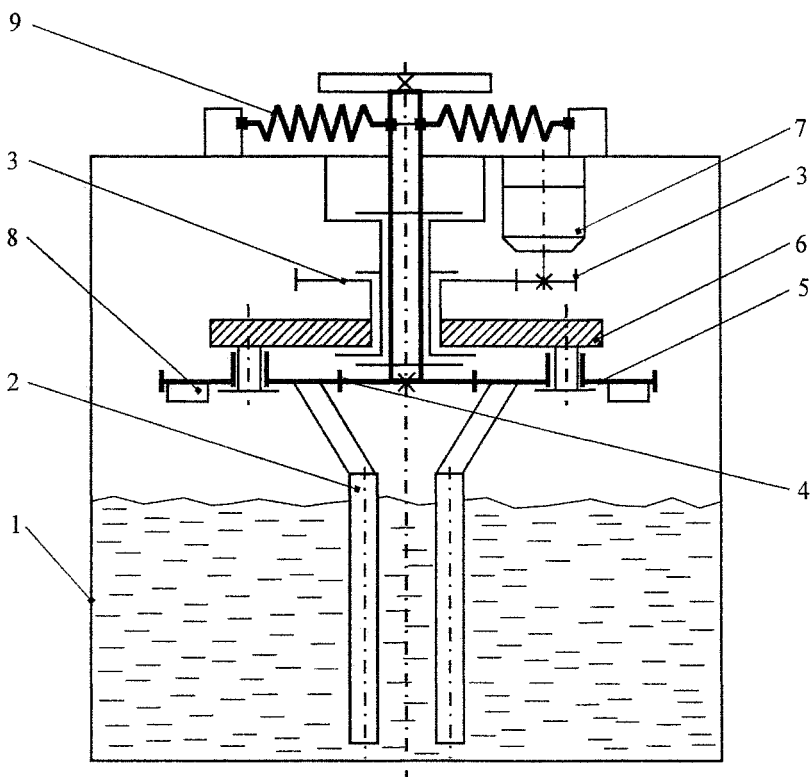


Рис. 2. Схема планетарного привода смесителя с центральным упругим элементом: 1 – корпус; 2 – рабочий орган; 3 – передаточный механизм; 4 – центральная шестерня; 5 – сателлиты; 6 – водило; 7 – двигатель; 8 – противовесы; 9 – упругий элемент

Полагая, что приведенный (с учетом ведущего водила) момент инерции сателлита достаточно велик (по сравнению с моментом инерции колеблющегося баланса с закрепленным на нем рабочим органом), двухмассовую колебательную систему можно заменить одномассовой, которая описывается следующим уравнением движения:

$$J\ddot{\psi} = M_0(\vec{F}) + M. \tag{1}$$

В уравнении (1)

$$\vec{F} = -b\vec{v}_{a\sigma}; M = -C\psi, \tag{2}$$

где J – момент инерции баланса; ψ – угол закрутки упругого элемента, соединяющего баланс с сателлитом; $M_0(\vec{F})$ – момент сопротивления вязкой среды, определяемый силой вязкого сопротивления \vec{F} ; M – упругий момент; C – крутильная жесткость упругого элемента; b – коэффициент вязкого сопротивления; $\vec{v}_{a\sigma}$ – абсолютная скорость оси рабочего органа.

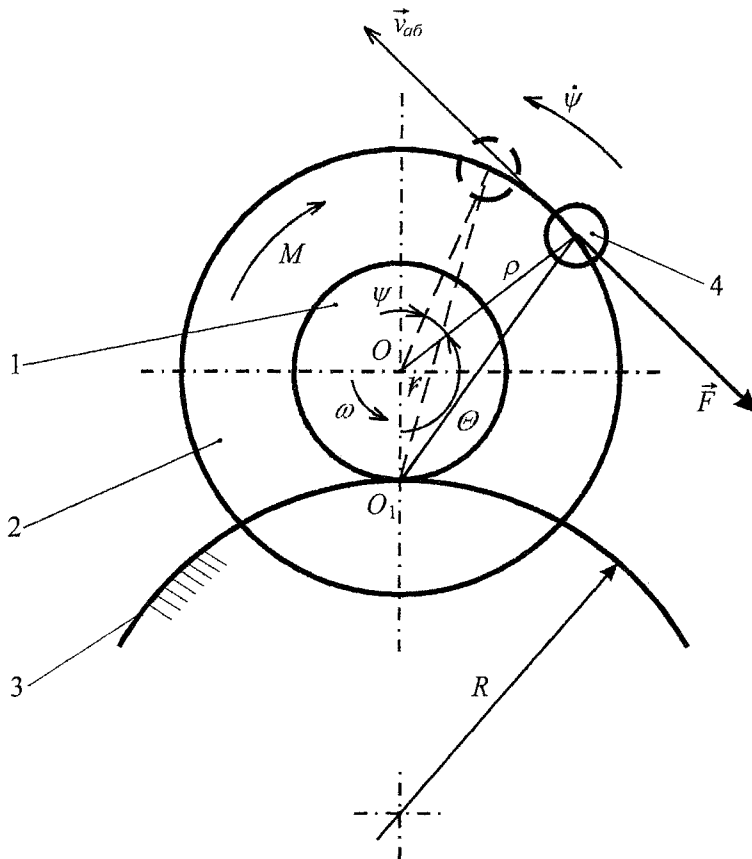


Рис. 3. Динамическая модель планетарного привода: 1 – сателлит радиуса r ; 2 – баланс; 3 – направляющая радиуса R ; 4 – рабочий орган, установленный на радиусе ρ

Из анализа взаимодействия составного колеса с неподвижной направляющей (см. рис. 3) и с учетом зависимостей (2) выделим следующие семь величин, которые определяют движение баланса (2):

$$r, \rho, R, \omega, J, C, b. \tag{3}$$

Используя теорию размерностей, величины (3) были сведены к следующим четырем безразмерным параметрам:

$$\alpha = \frac{br^2}{JK}, \quad \beta = \frac{\omega}{K}, \quad \lambda = \frac{\rho}{r}, \quad \sigma = \pm \frac{r}{R}, \tag{4}$$

где K – круговая частота свободных колебаний баланса 2; ω – абсолютная угловая скорость сателлита 1.

Здесь $\sigma > 0$ в случае внешнего зацепления сателлита с центральным колесом; $\sigma < 0$ в случае внутреннего зацепления сателлита с центральным колесом; равенство $\sigma = 0$ описывает качение составного колеса по прямолинейной направляющей ($R \rightarrow \infty$).

Расчет и конструирование

Безразмерные параметры (4) позволяют рассчитать крутильные колебания баланса составного колеса в зависимости от конструктивных параметров вибрационного планетарного привода, режима его движения и технологических свойств обрабатываемой среды. Эти параметры имеют следующий смысл: α – относительная вязкость обрабатываемой среды; β – частотное отношение; λ – относительный вылет рабочего органа; σ – относительная кривизна направляющей.

Теоретические диапазоны изменения безразмерных параметров (4): для α, β, λ интервал $[0, \infty)$; для σ интервал $(-\infty, \infty)$.

С точки зрения теории размерностей закон колебаний баланса составного колеса должен полностью определяться заданием четырех независимых безразмерных параметров $\alpha, \beta, \lambda, \sigma$, определяемых выражениями (4), т. е.

$$\psi = \psi(\alpha, \beta, \lambda, \sigma, \theta),$$

где ψ – угол закрутки упругого элемента от нейтрального положения (см. рис. 3); θ – угол поворота сателлита при его качении по направляющей (угол отсчитывается от водила планетарного механизма).

Вид функции ψ был найден численно-аналитическими методами. Найденная зависимость показывает, что в рассматриваемой механической системе возникают автоколебания. Зависимость амплитуды автоколебаний РО смесителя от параметров (4) удобно представить в виде графиков. Так, зависимость амплитуды колебаний рабочего органа смесителя от относительной вязкости обрабатываемой среды показана на рис. 4.

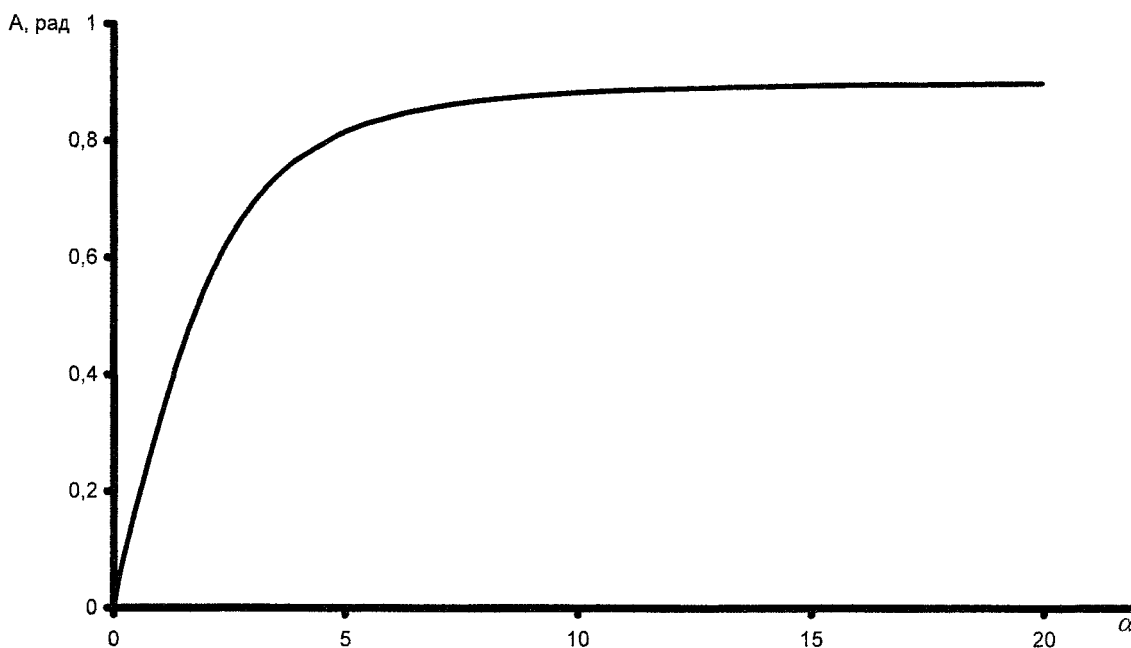


Рис. 4. Зависимость амплитуды колебаний рабочего органа смесителя от относительной вязкости обрабатываемой среды ($\beta = 0,3$; $\lambda = 1,2$; $\sigma = -2,3$)

Зависимость на рис. 4 была подтверждена в процессе проведения производственных испытаний опытно-промышленного образца вибрационного планетарного смесителя, сконструированного в соответствии с рис. 2. Экспериментальная зависимость амплитуды колебаний РО смесителя от динамической вязкости обрабатываемой среды для сравнительно малых значений вязкости показана на рис. 5 при двух значениях вылета РО (L_1 и L_2).

С помощью математической модели выявлено существование трех типов вибрационных планетарных приводов с уравновешенными сателлитами, только один из которых реализует динамический эффект стабилизации мощности при работе машины с переменной нагрузкой на РО [5]. Эффект стабилизации мощности был проверен экспериментально на опытно-промышленном образце смесителя вязких материалов с ВУПП.

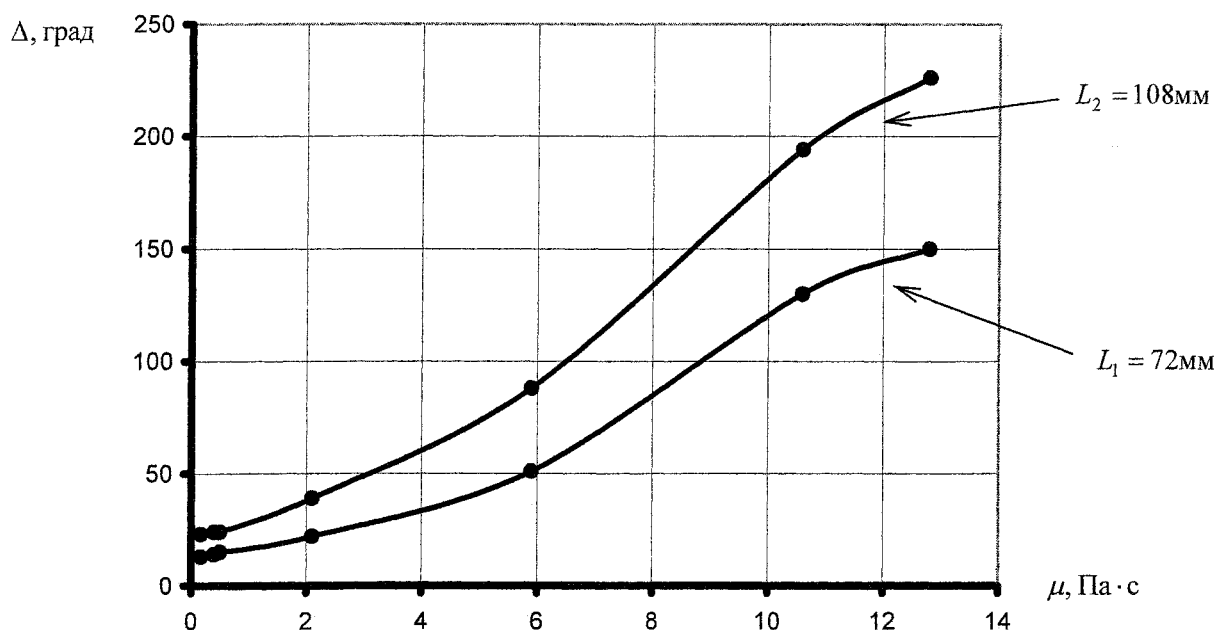


Рис. 5. Амплитуда колебаний центральной шестерни в зависимости от вязкости перемешиваемой среды

Из выполненных теоретических и экспериментальных исследований следуют выводы.

1. Экспериментально подтверждена научная гипотеза о возможности создания автоколебаний в механической системе на основе планетарного привода с уравновешенными сателлитными узлами за счет введения в его схему упругого звена.

2. Составлена динамическая модель планетарных приводов нового типа (названная составным колесом) и выделены обобщенные параметры, описывающие поведение автоколебательной системы в зависимости от проектных параметров привода, режима его работы и величины полезного сопротивления на рабочем органе.

3. Предложен новый класс планетарных приводов технологических машин для перемешивания вязких веществ, обладающий возможностью адаптации в ходе перемешивания к изменяющимся свойствам перемешиваемой среды – вибрационные планетарные смесители вязких материалов.

Литература

1. Хромеенков, В.М. Технологическое оборудование хлебозаводов и макаронных фабрик / В.М. Хромеенков. – СПб.: ГИОРД, 2002. – 496 с.
2. Пат. 2253507 РФ, МКИ В 01 F7/30, А 21 С 1/02 Планетарный смеситель вязких материалов / Пожбелко В.И., Ковнацкий А.В. Заявлено 16.06.2004; опубл. 10.06.2005. Бюл. № 16.
3. Пат. 2258558 РФ, МКИ В 01 F7/30, А 21 С 1/02 Планетарный смеситель вязких материалов / Пожбелко В.И., Ковнацкий А.В. Заявлено 28.06.2004; опубл. 20.08.2005. Бюл. № 23.
4. Пожбелко, В.И. Обобщенный динамический анализ крутильных колебаний составного колеса в вязкой среде / В.И. Пожбелко, А.В. Ковнацкий // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2004. – Вып. 5. – № 5 (34). – С. 55–59.
5. Пожбелко, В.И. Мощность сил вязкого сопротивления при движении составного колеса по криволинейной поверхности / В.И. Пожбелко, А.В. Ковнацкий // Механика и процессы управления: Труды XXXIV Уральского семинара. – Екатеринбург: Уральское отделение РАН, 2004. – Т. 2. – С. 182–187.

ДИНАМИКА ЗУБЧАТО-РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОЛЕС

А.И. Шагиахметов

Представлена математическая модель зубчато-рычажного механизма на основе эллиптических зубчатых колес, реализующего движения с остановкой выходного звена без разрыва кинематической цепи. Проведено сравнение динамических характеристик различных механизмов и предложены рекомендации для выбора механизмов с наилучшими динамическими свойствами.

Качество продукции и повышение производительности труда достигается в результате автоматизации производства. В связи с этим широкое применение в технике имеют машины-автоматы.

Подача обрабатываемого материала в рабочую зону машины-автоматы осуществляется различными транспортно-загрузочными устройствами. Эти устройства основаны на механизмах, преобразующих непрерывное движение в движение с остановками (выстоями). К таким относятся храповые, мальтийские, зубчатые с неполным числом зубьев и другие механизмы.

В храповых механизмах движение ведомому звену сообщает собачка, зацепляющаяся с ним при движении в одном направлении и выходящая из зацепления при движении в обратном направлении. Главный недостаток храповых механизмов заключается в том, что в начале и конце фазы движения имеют место удары [1].

Значительно большее распространение по сравнению с храповыми получили мальтийские механизмы, обеспечивающие более благоприятные кинематические характеристики. Выходное звено мальтийского механизма выполняется в виде диска или стола, на котором расположено несколько пазов. В паз может входить палец, расположенный на ведущем кривошипе. К недостаткам мальтийских механизмов относят наличие ударов в начале движения [2].

В зубчатых механизмах с неполным числом зубьев вращение ведомого звена, имеющего зубья по всей окружности, будет происходить в пределах некоторого угла, соответствующего зацеплению его с ведущим зубчатым колесом, имеющим зубья не на всей окружности. Недостатком зубчатых механизмов с неполным числом зубьев является наличие удара в моменты начала зацепления [2].

Таким образом, основным недостатком вышеперечисленных механизмов является разрыв кинематической цепи на время остановки с последующим ее замыканием на время движения, что приводит к жестким ударам, вследствие чего возникают большие динамические нагрузки на детали механизма периодического движения (МПД), приводящие к их быстрому износу.

Существуют другие МПД, которые обеспечивают остановку без разрыва кинематической цепи. Это комбинированные механизмы, в которых рычажные системы и системы круглых зубчатых колес включены параллельно, причем звенья рычажного механизма несут на себе оси зубчатых колес таким образом, что, по крайней мере, одно из них движется вместе с шатуном. Такие механизмы получили название зубчато-рычажные [1].

Исследования зубчато-рычажных механизмов (ЗРМ) на основе круглых зубчатых колес показали их ограниченные кинематические возможности [3].

Использование в зубчато-рычажных механизмах периодического движения (ЗРМПД) некруглых зубчатых колес [4] позволяет существенным образом расширить их кинематические возможности.

На рис. 1 представлена схема зубчато-рычажного механизма на основе эллиптических зубчатых колес. Устройство представляет собой совокупность рычажного кривошипно-коромыслового механизма, ведущее (кривошип 1) и ведомое (коромысло 3) звенья которого

шарнирно соединены с шатуном 2 и основанием 4, и передаточного зубчатого механизма для передачи вращения от кривошипа 1 на ведомый вал (на рис. 1 не показан), расположенный соосно с шарниром O_3 , соединяющим коромысло 3 с основанием 4.

Передаточный зубчатый механизм выполнен в виде зацепляющихся между собой эллиптических зубчатых колес 5, 6, 7 и 8, смонтированных на звеньях рычажного механизма. Колесо 5 и кривошип 1 жестко закреплены между собой таким образом, что колесо 5 вращается относительно центра O_1 вместе с кривошипом. Колеса 5 и 7 имеют возможность поворота и установки под углами θ_1 и θ_2 (регулируемое угловое смещение большой полуоси некруглых колес относительно шатуна и коромысла рычажного механизма при расположении на одной прямой кривошипа и шатуна в крайнем правом положении рычажного механизма).

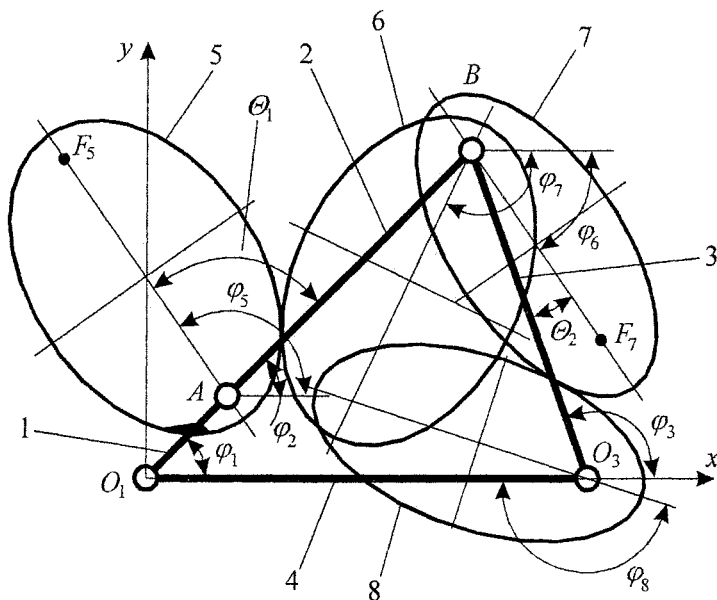


Рис. 1. Схема зубчато-рычажного механизма с эллиптическими зубчатыми колесами

Математическая модель данного механизма, позволяющая определить функцию положения ведомого колеса

$$\varphi_8 = f(\varphi_1), \quad (1)$$

получена из рассмотрения схемы, показанной на рис. 1.

Параметры, определяющие положения шатуна 2 (угол поворота φ_2) и коромысла 3 (угол поворота φ_3) в зависимости от угла поворота кривошипа φ_1 , легко определить из соотношений базового четырехзвенного механизма [1].

Угол поворота эллипса 5 с учетом монтажных углов определяется следующим образом:

$$\varphi_5 = \varphi_1 + \theta_1. \quad (2)$$

Угол поворота эллипса 6 можно определить из выражения

$$\varphi_6 = \varphi_2 + \arcsin \left(\frac{1 - e_1^2}{1 - 2e_1 \cos \varphi_5 + e_1^2} \cdot \sin \varphi_5 \right), \quad (3)$$

где e_1 – эксцентриситет (отношение фокусного расстояния AF_5 к длине большей оси эллипса) зубчатых колес 5 и 6.

Расчет и конструирование

Угол поворота эллипса 7 находим из выражения

$$\varphi_7 = \arcsin\left(\frac{(e_1^2 - 1) \cdot \sin \theta_1}{2e_1 \cos \theta_1 - e_1^2 - 1}\right) + \arccos\left(\frac{(a+b)^2 + c^2 - d^2}{2(a+b)c}\right) - \arccos\frac{c^2 + d^2 - (a+b)^2}{2cd} - \theta_2 + \varphi_6, \quad (4)$$

где $a = O_1A$, $b = AB$, $c = O_1O_3$, $d = BO_2$.

И, наконец, положение ведомого звена определяет угол поворота эллипса 8:

$$\varphi_8 = \arcsin\left(\frac{1 - e_2^2}{1 - 2e_2 \cos \varphi_7 + e_2^2} \sin \varphi_7\right) + \varphi_3, \quad (5)$$

где e_2 – эксцентриситет зубчатых колес 7 и 8.

Ввиду большого числа параметров механизма и сложного вида функции (1) применялся метод оптимизационного синтеза [2]. В процессе многопараметрического поиска было просчитано 50 000 наборов параметров зубчато-рычажных механизмов на основе эллиптических колес и были выбраны два механизма, обеспечивающие наибольшие остановки выходного звена при допустимой точности позиционирования $\Delta\varphi_{\text{дон}} = 0,5^\circ$.

На рис. 2 представлена зависимость угла поворота выходного звена φ_8 от угла поворота входного звена φ_1 , полученная аналитическим расчетом на ЭВМ, для двух выбранных механизмов, в сравнении с механизмом, обеспечивающим максимальный выстой среди ЗРМ с круглыми колесами.

Из рисунка видно, что зубчато-рычажные механизмы на основе эллиптических зубчатых колес обеспечивают более продолжительную остановку выходного звена, чем зубчато-рычажные механизмы, основанные на круглых зубчатых колесах.

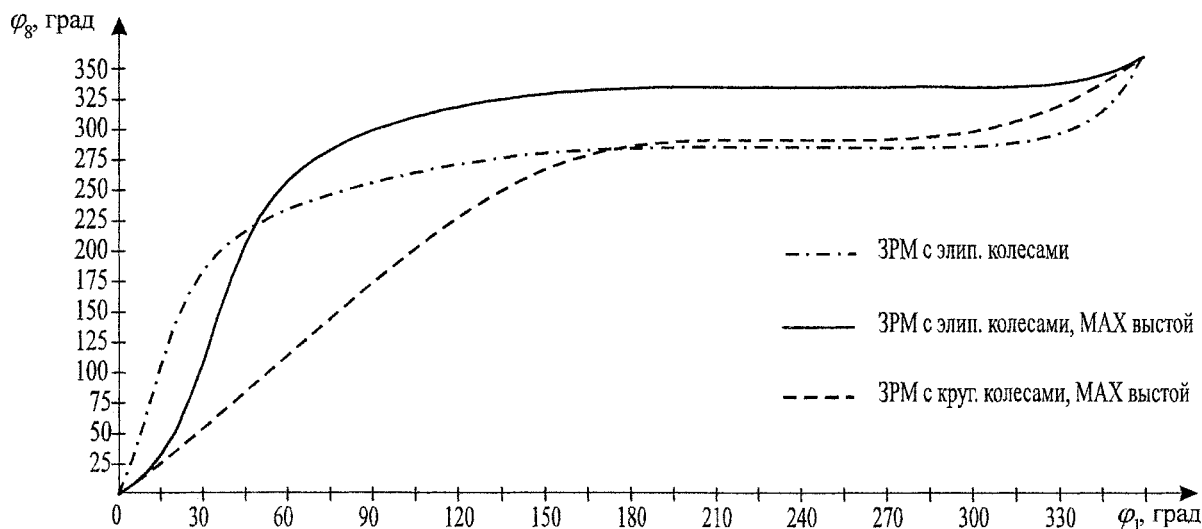


Рис. 2. График зависимости угла поворота выходного звена от угла поворота входного звена для исследуемых механизмов

Путем графического дифференцирования были получены графики зависимости угловой скорости ω_8 выходного звена от угла поворота φ_1 входного звена (рис. 3).

Для оценки динамического момента воспользуемся следующим выражением:

$$M_{\text{дин}} = J_{\text{пр}} \cdot \varepsilon_8, \quad (6)$$

где ε_8 – угловое ускорение выходного звена механизма, $J_{\text{пр}}$ – приведенный момент инерции зубчато-рычажного механизма.

Приведенный момент инерции зубчато-рычажного механизма на основе эллиптических колес определяем из выражения

$$J_{np} = J_{S1} + m_2 \left(\frac{v_{S2}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + J_{S3} \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + m_6 \left(\frac{v_{S6}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S6} \left(\frac{\omega_6}{\omega_1} \right)^2 + m_7 \left(\frac{v_{S7}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S7} \left(\frac{\omega_7}{\omega_1} \right)^2 + J_{S8} \left(\frac{\omega_8}{\omega_1} \right)^2, \quad (7)$$

где звеном приведения принято входное звено; m_1-m_8 – массы звеньев механизма; $J_{S1}-J_{S8}$ – моменты инерции звеньев относительно центров тяжести; $v_{S1}-v_{S8}$ – скорости центров тяжести звеньев; $\omega_1-\omega_8$ – угловые скорости звеньев.

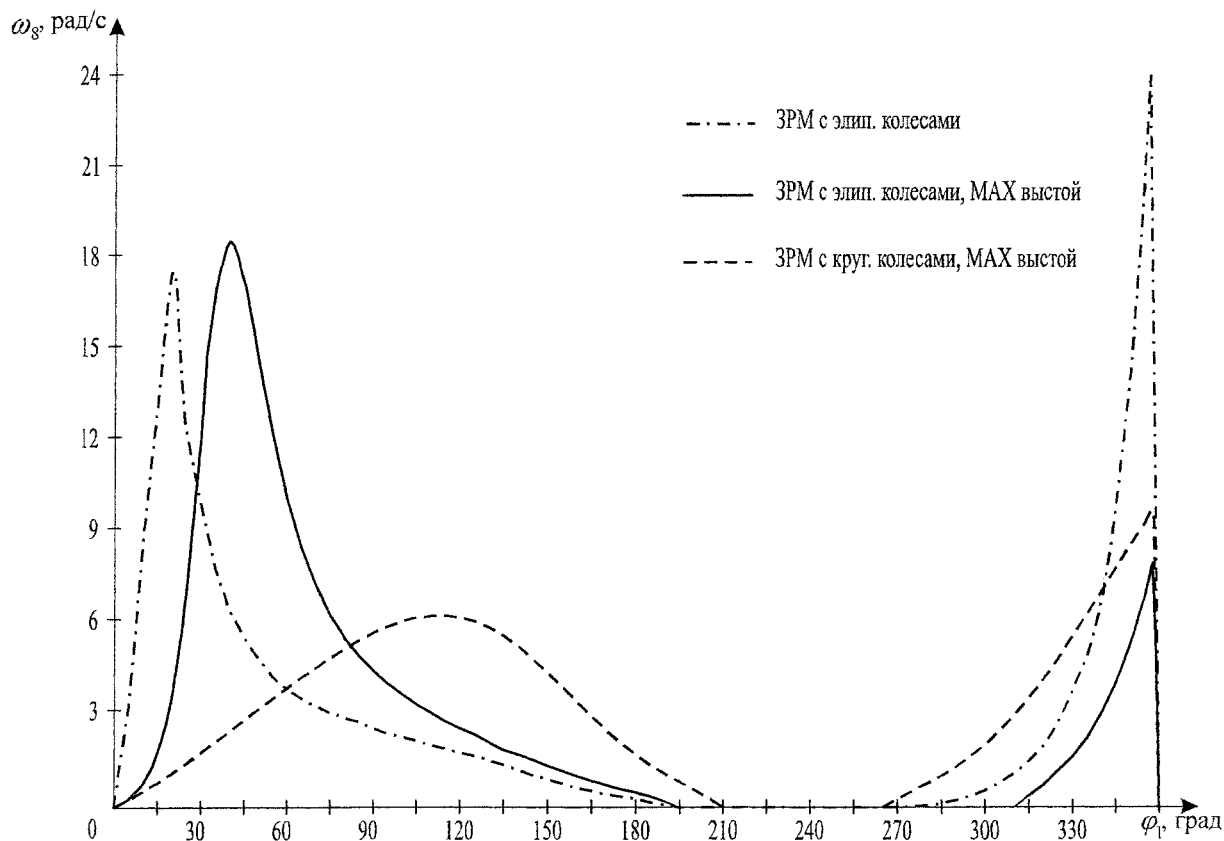


Рис. 3. График зависимости угловой скорости выходного звена от угла поворота входного звена для исследуемых механизмов.

Результаты расчета приведенного момента инерции для зубчато-рычажного механизма на основе эллиптических колес, обеспечивающего максимальный выстой выходного звена, занесены в таблицу.

Значения приведенного момента инерции ЗРМ

φ_1	15°	35°	45°	60°	75°	330°	345°
J_{np}	10,4	31,3	18,1	6,6	6,1	5	5,3

Угловое ускорение ε_8 выходного звена механизма часто является определяющим при оценке динамического момента. Для его определения необходимо дифференцировать полученные ранее зависимости угловой скорости ω_8 выходного звена от угла поворота φ_1 входного звена. Графики зависимости углового ускорения ε_8 выходного звена от угла поворота φ_1 входного звена показаны на рис. 4.

Расчет и конструирование

Анализ графиков зависимости углового ускорения ε_8 выходного звена механизма от угла поворота φ_1 входного звена показал, что ЗРМ с эллиптическими колесами имеют большие ускорения по сравнению с ЗРМ на основе круглых зубчатых колес. При этом максимальный выстой зубчато-рычажного механизма на основе эллиптических колес может быть обеспечен с меньшим угловым ускорением, а следовательно и с меньшими динамическими нагрузками, по сравнению с другим зубчато-рычажным механизмом на основе эллиптических колес.

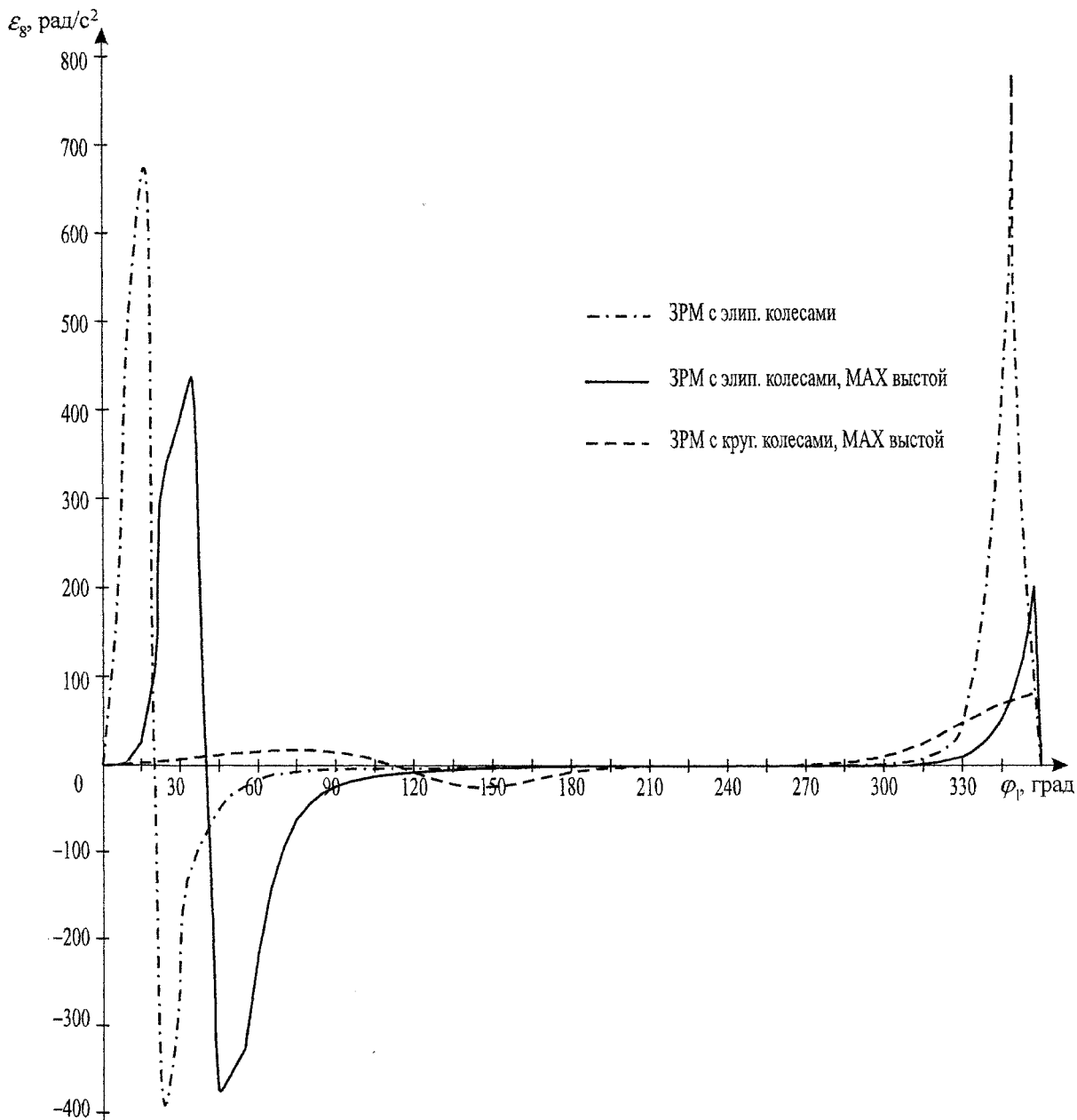


Рис. 4. График зависимости углового ускорения выходного звена от угла поворота входного звена для исследуемых механизмов

Анализ параметров двух рассматриваемых ЗРМ с эллиптическими зубчатыми колесами показал, что чем больше эксцентриситет эллиптических колес 7 и 8, тем больше угловое ускорение ε_8 выходного звена механизма.

Далее, используя выражение (6), был рассчитан динамический момент для ЗРМ с максимальным выстой (рис. 5).

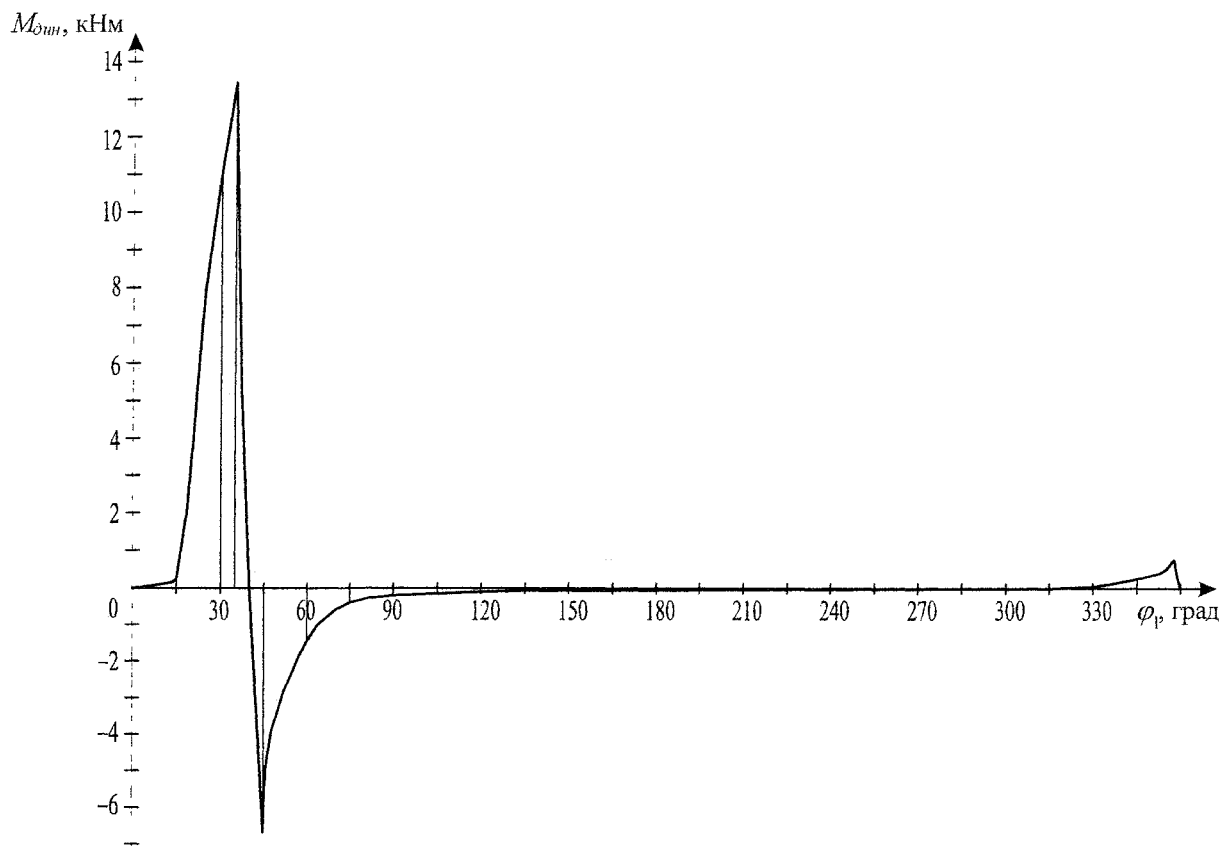


Рис. 5. Зависимость динамического момента от угла поворота входного звена зубчато-рычажного механизма на основе эллиптических колес, обеспечивающего максимальный выстой выходного звена

Выводы:

1. Зубчато-рычажные механизмы обеспечивают остановку без разрыва кинематической цепи, вследствие чего не происходит жестких ударов.
2. Зубчато-рычажные механизмы на основе эллиптических колес обеспечивают более чем в два раза больший выстой выходного звена по сравнению с зубчато-рычажными механизмами на основе круглых колес.
3. Угловые ускорения выходного звена зубчато-рычажного механизма с эллиптическими колесами превышают угловые ускорения выходного звена зубчато-рычажного механизма с круглыми колесами.
4. В зубчато-рычажном механизме с некруглыми колесами с увеличением эксцентриситета эллиптических зубчатых колес ухудшаются динамические характеристики, поэтому с целью улучшения динамических показателей необходимо уменьшать эксцентриситет эллиптических зубчатых колес, образующих выходную пару зацепления в механизме.

Литература

1. Кожевников, С.Н. Механизмы (справочник) / С.Н. Кожевников. – М.: Машиностроение, 1965. – 460 с.
2. Левитская, О. Н. Курс теории механизмов и машин / О.Н. Левитская, Н.И. Левитский. – М.: Высшая школа, 1985. – 279 с.
3. Пожбелко, В.И. Структура и кинематические возможности трехколесного зубчато-рычажного механизма периодического поворота / В.И. Пожбелко, А.И. Шагиахметов, Н.И. Ахметшин // Материалы II международной конференции «Проблемы механики современных машин». – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2003. – Т. 1. – С. 35–39.
4. Пат.2285168 РФ, МПК С1 F16Н 27/04 Способ и устройство регулирования угла выстоя зубчато-рычажного механизма / В.И. Пожбелко, А.И. Шагиахметов, Н.И. Ахметшин. Заявлено 22.03.2005; Опубл.10.10.2006. Бюл. №28.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗНОСА ШЛИФОВАЛЬНОГО КРУГА ПО ПАРАМЕТРАМ ВИБРАЦИИ СТАНКА

А.М. Захезин, Т.В. Малышева

Рассматривается проблема оценки и прогнозирования параметров качества шлифовального круга в эксплуатационных условиях. Величина переменной составляющей силы резания при шлифовании изменяется за счет совокупности процессов, пластической деформации трения и разрушения шлифовального круга и влияет на параметры вибрации станка. Расчет детерминированных параметров случайного процесса вибрации позволяет идентифицировать износ инструмента.

Наличие тесной корреляционной связи между параметрами вибрации и условиями обработки позволяет предположить, что вибрационные процессы обладают не только однозначной информативностью при исследовании процесса обработки, но и активно влияют на характер протекания процесса шлифования, что позволяет оптимизировать эти процессы. Кроме того, появляется реальная перспектива надежной оценки и прогнозирования параметров качества шлифовального круга непосредственно в эксплуатационных условиях.

Сила резания при шлифовании имеет нестационарный колебательный характер (рис. 1).

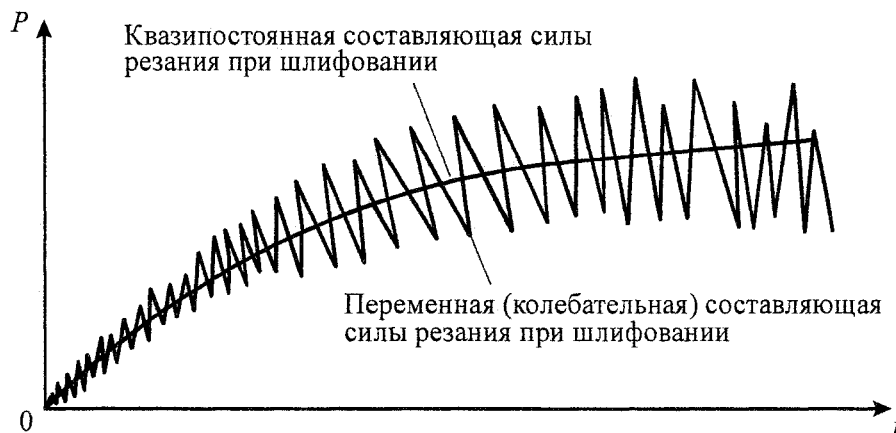


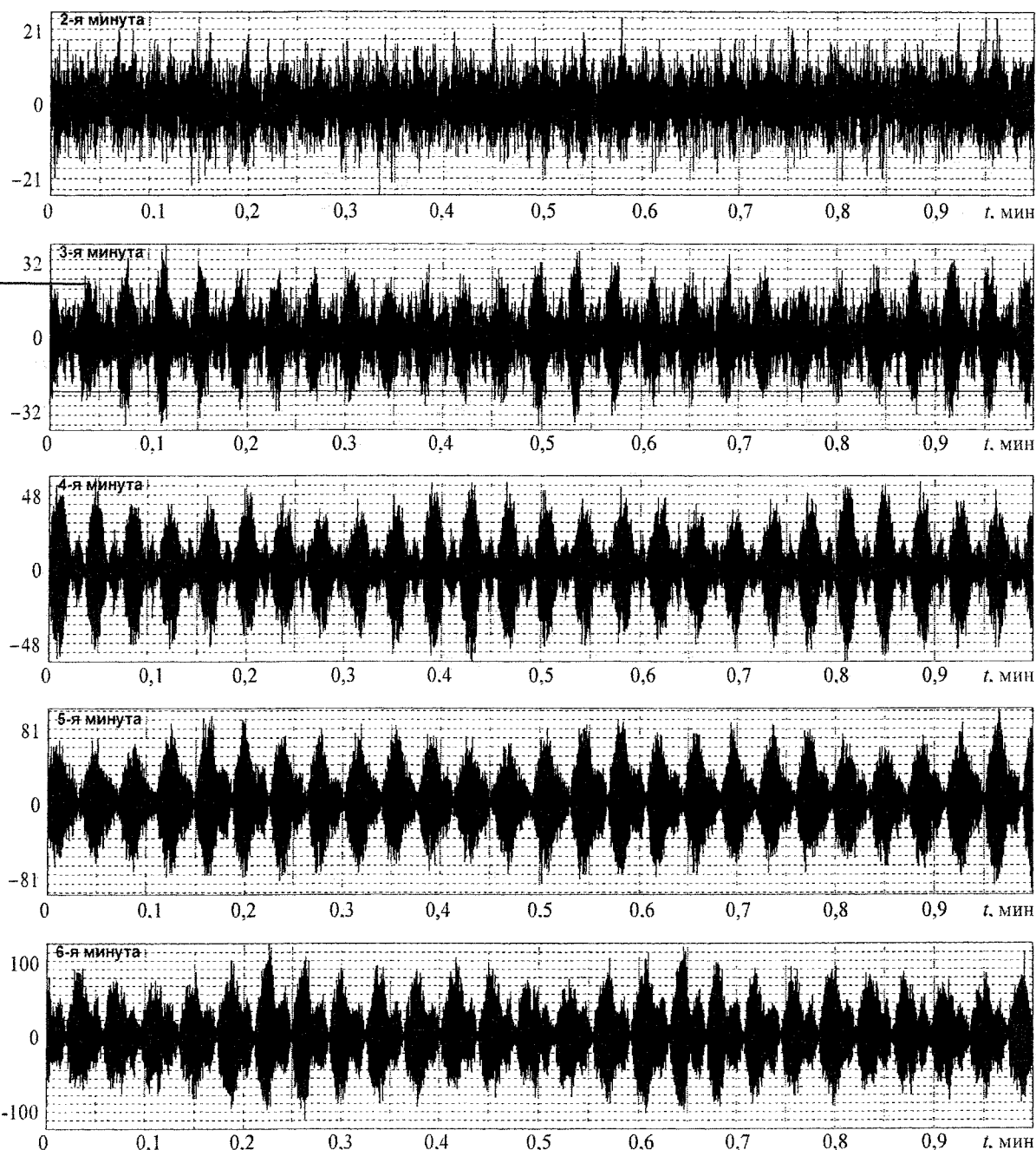
Рис. 1. Изменение силы резания в радиальном направлении при износе шлифовального круга

Вибрационный сигнал в условиях эксплуатации складывается из переменной и квазипостоянной составляющих. Полученное при исследованиях квазипостоянное значение силы резания находится в пределах до 100 Н в диапазоне частот от 1,5 до 3 кГц. Квазипостоянная составляющая несет информацию о совокупности процессов разрушения, пластической деформации и трения, сопровождающих технологический процесс шлифования. Переменная составляющая учитывает влияние изнашивания за счет увеличения площади контактных поверхностей. Таким образом, за счет выбора метода обработки вибрационного сигнала и определения различных детерминированных параметров случайного процесса вибрации, в том числе и в различных частотных диапазонах, создаются физические предпосылки для идентификации износа инструмента путем выделения переменной составляющей вибрации, определения отношения переменной составляющей к постоянной. Так, например, изменение среднеквадратичного значения (СКЗ) виброускорения при износе шлифовального круга в вертикальном и радиальном направлении приведено в таблице.

СКЗ виброускорения в вертикальном и радиальном направлениях

Время работы станка, мин	2	3	4	5	6
СКЗ в вертикальном направлении, мм/с ²	1,9	1,9	1,8	2,6	3,6
СКЗ в радиальном направлении, мм/с ²	3,9	4,8	5,1	5,6	7,7

Датчик виброускорения был установлен на столе плоскошлифовального станка. Сигнал записывался в двух направлениях непрерывно, одновременно с износом шлифовального круга (на 2-й, 3-й, 4-й, 5-й и 6-й минутах работы станка) после этого станок останавливали и производили правку шлифовального круга. Сигналы колебаний стола станка в вертикальном и горизонтальном направлениях показаны на рис. 2 и 3. Цифрами отмечено время работы станка: 2-я, 3-я, 4-я, 5-я или 6-я минута от начала процесса шлифования.

Рис. 2. Износ шлифовального круга в вертикальном направлении (сигнал виброускорения, мм/с²)

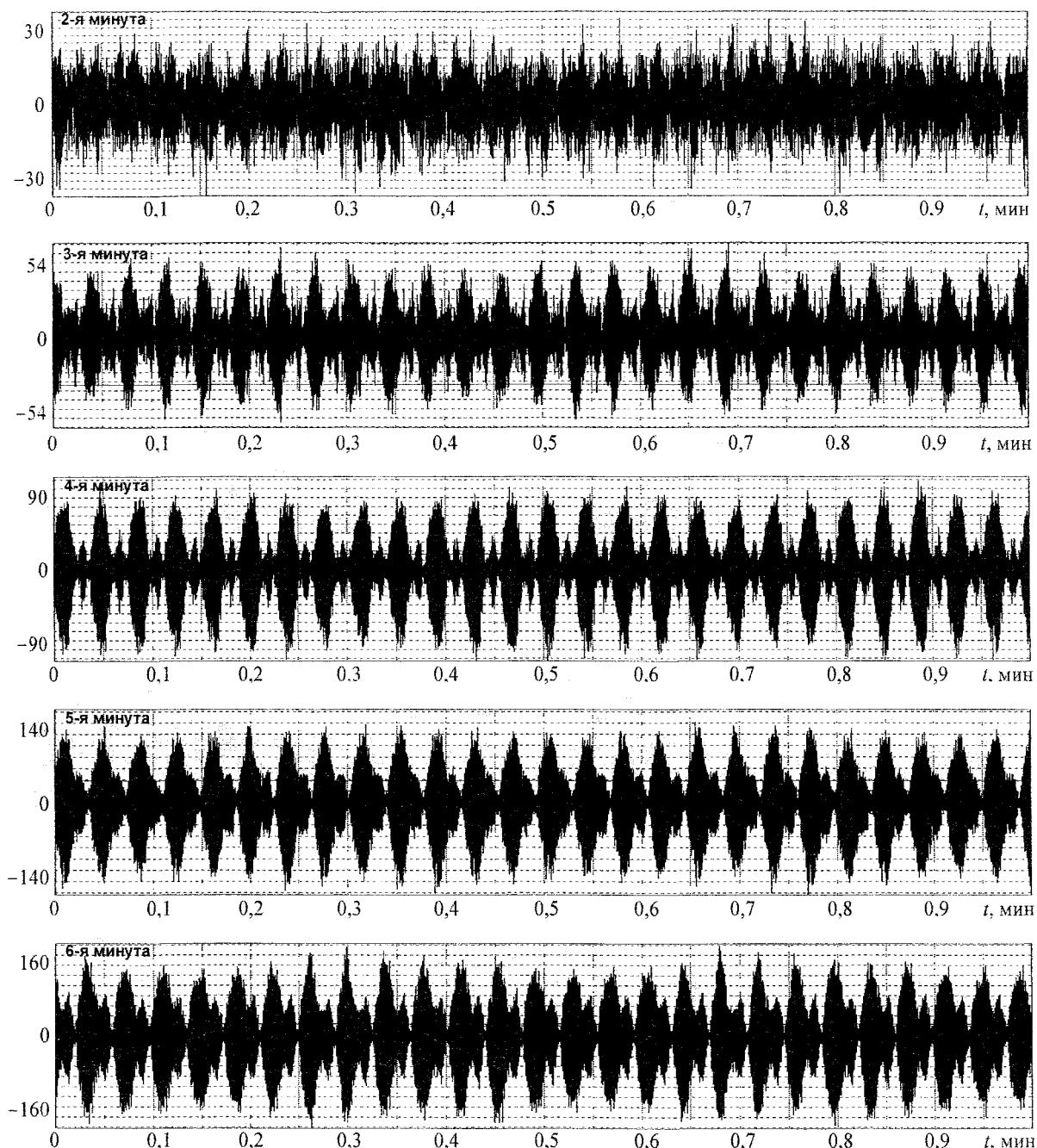


Рис. 3. Износ шлифовального круга в радиальном направлении (сигнал виброускорения, мм/с²)

Как правило, существенное увеличение общего уровня вибрации или отдельных спектральных компонентов говорит лишь о сильных разрушениях диагностируемого инструмента. Локализация же развивающегося дефекта, определение степени развития дефекта и его прогнозирования возможно лишь на основе исследований тонкой структуры виброакустического сигнала и связи его с кинематикой и динамикой станка. Изучение свойств вибрационного процесса обработки показало, что при износе шлифовального круга меняется структура сигнала, перераспределяются соотношения между его спектральными составляющими и появляются новые спектральные компоненты. Спектр виброускорений в вертикальном и радиальном направлениях показан на рис. 4 и 5. Анализ параметров вибрации показывает, что на 2-ой минуте работы станка происходит приработка инструмента, что отражается в большом числе гармоник виброускорения в широком диапазоне частот. Однако статистическая обработка сигнала показывает, что величина СКЗ виброускорения на 2-й, 3-й и 4-й минутах работы остается на прежнем уровне (в вертикальном направлении) или незначительно вырастает в радиальном направлении (см. таблицу).

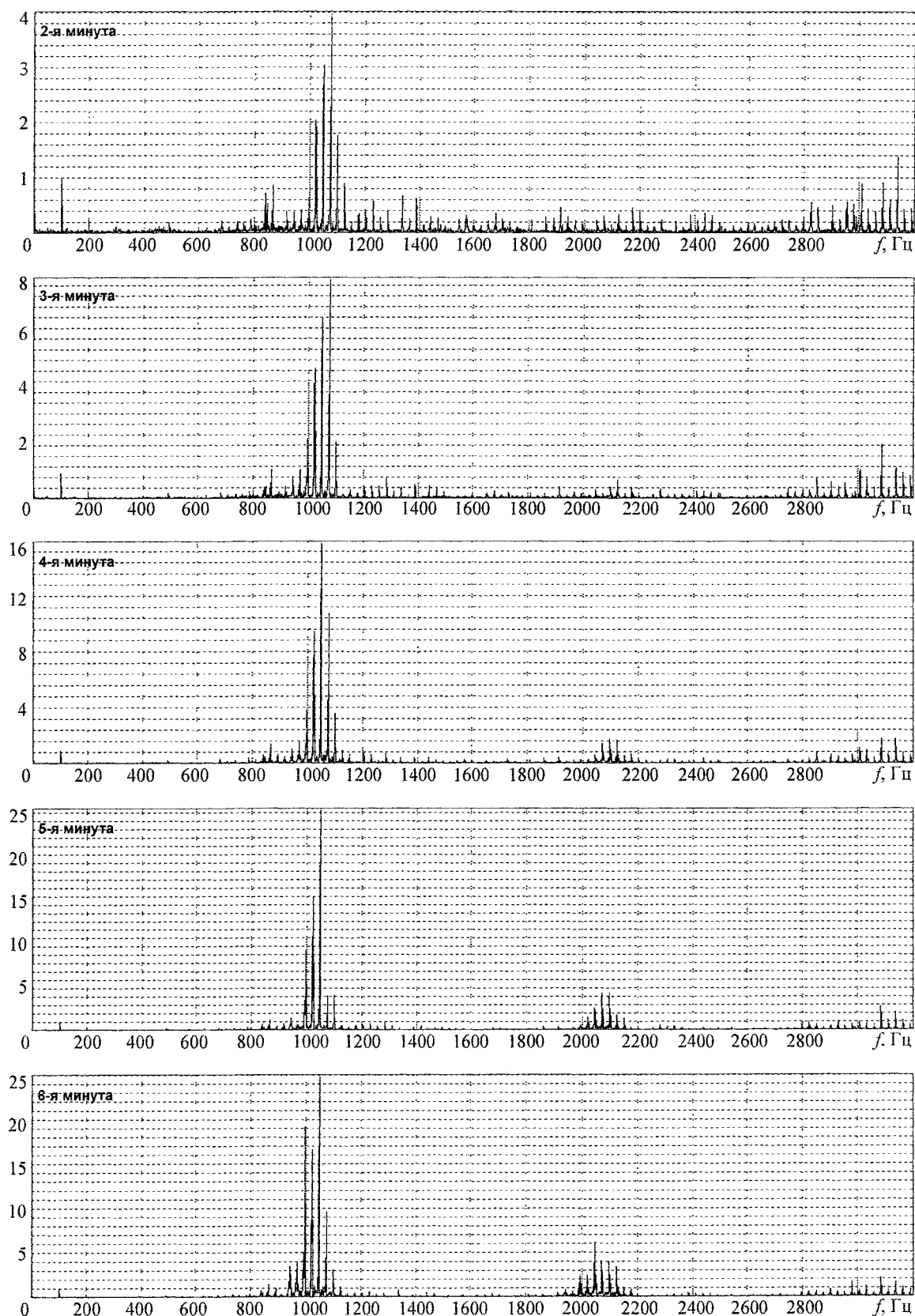


Рис. 4. Спектры виброускорений (mm/s^2) при износе шлифовального круга в вертикальном направлении

Характер изменения динамических процессов вибрации при изменении состояния контактирующих поверхностей имеет ряд общих черт. Это определяет алгоритм диагностирования дефектов контактирующих поверхностей типа абразивного износа, выкрашивания. Абразивное изна-

Контроль и испытания

швление контактирующих поверхностей вызывает появление микронеровностей в зоне контакта, нарушение микро и макрогеометрии детали, следствием чего является рост шумовой компоненты (см. рис. 4, 5), увеличение амплитуд гармонического ряда на оборотной частоте возбуждения и перераспределения амплитуд между гармониками этого ряда.

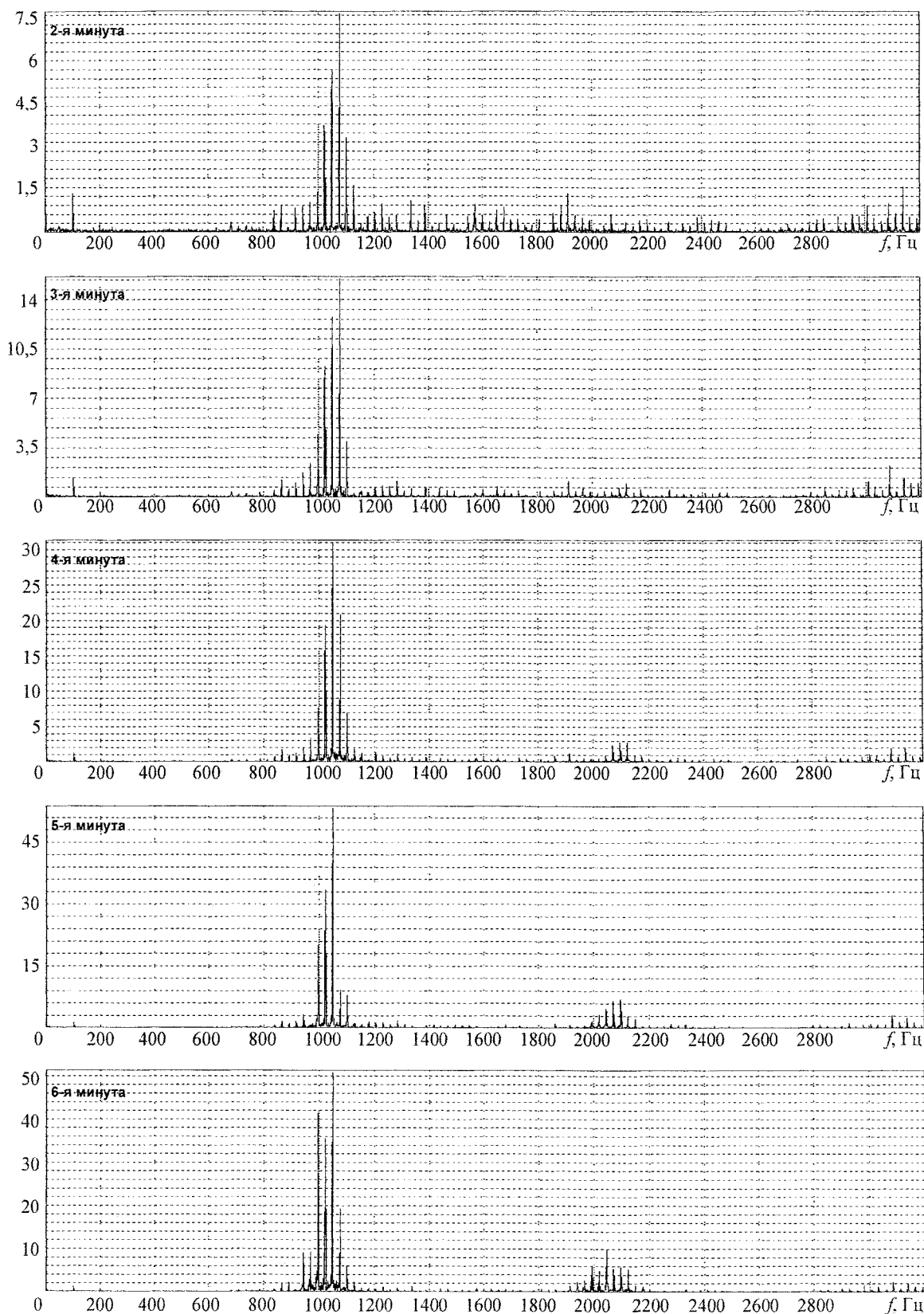


Рис. 5. Спектры виброускорений (mm/s^2) при износе шлифовального круга в радиальном направлении

Выкрашивание инструментальной поверхности проявляется в развитии раковин в зоне контакта, вызывает появление периодических всплесков вибросигнала, модулирующих основной процесс возбуждения (см. рис. 4, 5). Периодическое попадание раковин в зону контакта приводит к появлению в спектре сигнала комбинационных частот в окрестности основных частот возбуждения, вызванных амплитудной модуляцией. Рост числа выбросов при увеличении их амплитуд, вызванный развитием данного дефекта, приводит к увеличению глубины амплитудной модуляции, росту числа комбинационных частот и перераспределению энергии между ними при неизменности амплитуд основных частот возбуждения.

Кроме того, выкрашивание поверхности шлифовального круга приводит к появлению новых вибрационных гармоник. Так, например, с увеличением износа шлифовального круга появляются новые гармоники в области удвоенной частоты вращения (в диапазоне 2000...2200 Гц, см. рис. 4, 5).

Для того чтобы решить задачу диагностирования по совокупности вибрационных характеристик системы, необходимо выбрать наиболее чувствительные к изменению технического состояния машин диагностические признаки. Большинство методов диагностирования зарождающихся дефектов механизмов имеет в своей основе одну и ту же диагностическую модель: развитие дефекта вызывает рост амплитуд и числа кратковременных импульсов в вибросигнале. Задача состоит в применении оптимального способа обработки сигнала, который сводит к минимуму влияние помех и позволяет однозначно соотнести полученную характеристику сигнала с видом дефекта. Таким образом, износ шлифовального инструмента можно определить по статистическим параметрам сигнала (например, СКЗ виброускорения), но на первых минутах работы станка этот параметр вырастает незначительно.

По спектрам виброускорений сигнала было выявлено появление новых вибрационных компонент в диапазоне 2000...2200 Гц, а получение гармоник виброускорений в двух направлениях позволяет избавиться от шумовых компонент в сигнале и решить задачу диагностирования износа инструмента на любом этапе работы. Поэтому получение гармоник виброускорений в области удвоенной частоты вращения, их количество и амплитуда могут стать диагностическими признаками износа шлифовального круга.

О ВЛИЯНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ВЕЛИЧИНУ УПРУГОЙ ОТДАЧИ В ШТАМПОВОЧНЫХ ГИБОЧНЫХ ПРОЦЕССАХ

Р.Д. Шипилов, А.О. Чернявский

Выполнено математическое моделирование поведения листовых заготовок в технологическом процессе из нескольких стадий: прокатки и штамповочной гибки, включая изменение размеров после снятия нагрузки (так называемая упругая отдача или пружинение). Установлено, что остаточные напряжения могут в некоторых случаях существенно изменять величину упругой отдачи; указаны диапазоны условий, в которых влияние остаточных напряжений необходимо учитывать.

Введение

Холодная штамповка листовых заготовок сопровождается изменением формы детали после извлечения из штамповочного оборудования вследствие восстановления упругой части деформации после снятия нагрузки; это явление называется обычно упругой отдачей или пружинением. На величину упругой отдачи детали в целом влияют свойства материала, из которого изготовлена деталь, ее геометрическая форма, характер нагружения при штамповке. Еще одним фактором могут оказаться остаточные напряжения, возникающие на предшествующих стадиях – в частности, при прокатке листов. Обзор литературных источников [1–5] показывает, что в современной практике проектирования штамповочного оборудования и разработки технологических процессов тонколистовой штамповки не уделяется внимания влиянию данных систем остаточных напряжений на окончательную форму деталей после штамповки. Вместе с тем, требования к точности изготовления штампованных деталей в некоторых промышленных производствах достаточно высоки, а экспериментальная «доводка» процесса сопряжена с изменением штампов и может оказаться достаточно дорогой.

Как известно, при состояниях, близких к предельному, остаточные напряжения «выравниваются», их влияние компенсируется общими напряжениями от нагрузки [6]. Существует ряд штамповочных процессов, при которых штампуемая деталь близка к данному состоянию: протяжка, вытяжка и др. В этих процессах заготовка испытывает пластические деформации в десятки процентов, в то время как упругая отдача, очевидно, ограничена величинами порядка десятых долей процента. Поэтому при разработке этих процессов и проектировании оборудования для них справедливо пренебрегают влиянием остаточных напряжений. Для других процессов характерны малые степени деформаций (до нескольких процентов). После них деталь претерпевает вследствие отдачи сильное изменение геометрии, что нужно учитывать при проектировании штампов для получения желаемой формы деталей после штамповки.

Моделирование многостадийных процессов (прокатка + штамповка, штамповка в несколько переходов) является нетривиальным и требует для своего решения применения сложных методов расчета. В настоящее время известны лишь отдельные попытки проследить за формированием остаточных напряжений и перемещений в результате выполнения ряда технологических операций. На практике обычно стадии процесса рассматриваются по отдельности, при этом информация об истории изготовления теряется, что может снижать точность конечного результата.

В данной работе делается попытка моделирования двухстадийного процесса, состоящего из операций прокатки и штамповки. Целью моделирования является выяснение – прежде всего на качественном уровне – основных закономерностей образования полей остаточных напряжений и геометрической формы детали с учетом влияния предыдущих стадий на последующие. В качестве процесса прокатки рассматривается холодная прокатка в один переход. Основное внимание

уделяется процессам штамповочной гибки, которые применяются во многих промышленных производствах: автомобильном, трубном, бытовой техники и других. Для упрощения расчетов формообразования в таких процессах рассмотрен вариант только чистого изгиба заготовок.

Моделирование листовой прокатки

Для определения значения остаточных напряжений и характера их распределения по толщине заготовки проведено конечно-элементное моделирование процесса холодной прокатки.

Реализация моделирования осуществляется в пакете LS-DYNA [7]. Задача решается в двумерной постановке при плоском деформированном состоянии, что соответствует случаю заготовки, бесконечно длинной в направлении осей валков.

Валки заменяются абсолютно жесткими телами со степенями свободы, соответствующими вращению вокруг собственной оси. Между поверхностями заготовки и валков задан механический контакт в двумерной постановке [7]. Для сокращения общего времени счета рассматривается только одна половина конечно-элементной модели относительно плоскости симметрии, совпадающей со срединной плоскостью заготовки (рис. 1).

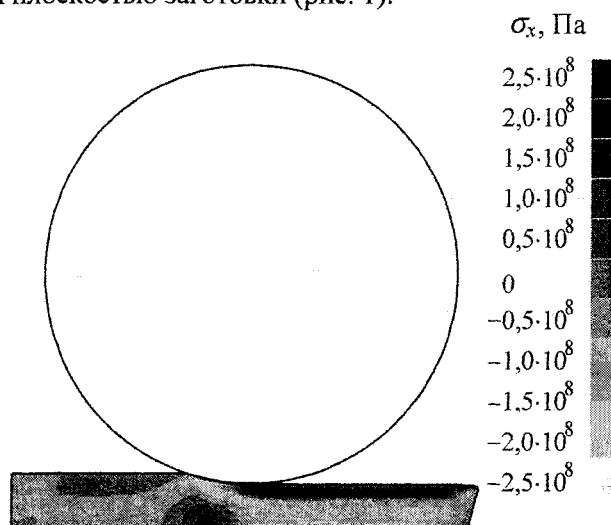


Рис. 1. Моделирование листовой прокатки: напряжения вдоль направления прокатки

Толщина заготовки до и после прокатки принимается равной 18,5 и 15 мм соответственно, что отвечает одному из вариантов заготовительного передела для изготовления труб большого диаметра (свыше 1020 мм). В качестве модели материала заготовки используется модель идеально упруго-пластического материала с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и пределом текучести $\sigma_T = 200$ МПа.

Для корректного моделирования больших деформаций заготовки в месте перехода толщины от начальной до прокатной (под валками) требуется мелкая сетка конечных элементов (примерно 3 элемента на 1 мм толщины заготовки). Применение адаптивного перестроения сетки конечных элементов [7] в данном случае невозможно вследствие большой погрешности, которая приводит к неравномерному распределению остаточных напряжений по длине заготовки и их неуравновешенности. Поэтому для получения корректных результатов моделирования размер конечных элементов должен быть постоянным на всем протяжении процесса прокатки. Данное условие приводит к увеличению вычислительной сложности задачи из-за малого размера элементов.

Большие пластические деформации в рассматриваемом процессе приводят к тому, что предшествующие стадии деформирования «забываются» материалом детали: остаточные напряжения и деформации определяются лишь последним этапом деформирования [8]. Поэтому в данной работе рассматривается лишь одна стадия (один переход) прокатки.

Полученные в результате расчетов распределения остаточных напряжений по толщине заготовки показаны на рис. 2.

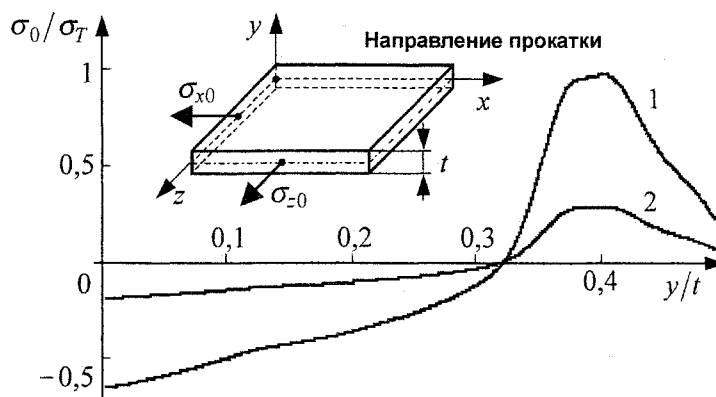


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений по толщине заготовки после листовой прокатки: 1 – $\sigma_{x0}(y)$, 2 – $\sigma_{z0}(y)$

При последующем анализе процесса гибки заготовки с остаточными напряжениями принималось, в качестве первого приближения, что кривые распределения остаточных напряжений после прокатки листов с другими толщинами получаются путем масштабирования приведенных графиков по оси абсцисс.

Диаграммы деформирования при штамповочной гибке

Процесс деформирования заготовок при штамповочной гибке может быть полностью описан с помощью диаграмм деформирования при изгибе. Построение диаграмм деформирования в данной работе проводилось по описанному ниже алгоритму.

После задания кривизны заготовки (случай жесткого нагружения) по известным формулам теории изгиба с учетом гипотезы плоских сечений рассчитываются напряжения от нагрузки при одноосном напряженном состоянии. Полученные напряжения складываются с остаточными и сравниваются с пределом текучести материала (рис. 3). Путем интегрирования изгибающего момента от полученных напряжений вычисляем значение момента во всей заготовке в виде узкой полосы:

$$f(\varepsilon) = \min(E \cdot |\varepsilon|, \sigma_T) \cdot \text{sign}(\varepsilon); \tag{1}$$

$$M'(\kappa) = \int_{-t/2}^{t/2} f[\sigma_{x0}(y) + E \cdot (y - \Delta) \cdot \kappa, \sigma_T] \cdot (y - \Delta) \cdot dy, \tag{2}$$

где $f(\varepsilon)$ – уравнение диаграммы деформирования идеально упруго-пластического материала [8]; M' – интенсивность изгибающего момента в заготовке; κ – кривизна заготовки; $\sigma_{x0}(y)$ – остаточные напряжения; y – координата, отсчитываемая в направлении толщины заготовки; Δ – смещение нейтральной оси.

Вследствие того, что эпюра напряжений в заготовке несимметрична (эпюра полных напряжений получается суммированием симметричной эпюры остаточных напряжений с кососимметричной эпюрой напряжений от нагрузки) нейтральная линия смещается от срединной в процессе нагружения (рис. 3). Ее положение рассчитывается для каждого значения кривизны κ из условия равенства нулю нормальной силы N в сечениях заготовки:

$$N' = 0; \tag{3}$$

$$N' = \int_{-t/2}^{t/2} f[\sigma_{x0}(y) + E \cdot (y - \Delta) \cdot \kappa, \sigma_T] \cdot dy, \tag{4}$$

где N' – интенсивность нормальной силы, Н/м.

После серии расчетов для различных значений кривизны заготовки строится полная диаграмма деформирования при изгибе.

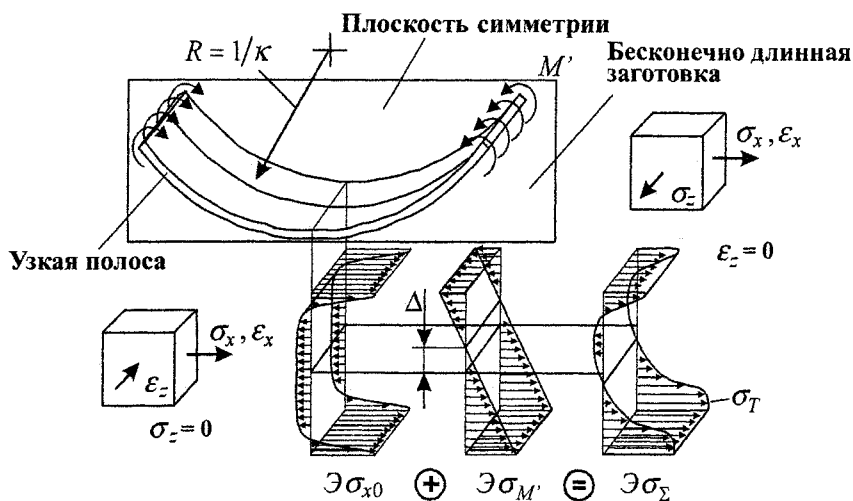


Рис. 3. Схема процесса штамповочной гибки. Напряженно-деформированное состояние заготовки

Приведенные формулы (2) и (4) соответствуют случаю изгиба узкой полосы, напряженное состояние точек которой является одноосным (рис. 3). Дополнительный интерес также представляет диаграмма деформирования при изгибе в плоском деформированном состоянии, в котором находятся точки бесконечно длинной заготовки. Данное состояние также характерно для точек плоскости симметрии реальной заготовки относительно оси изгибающего момента (рис. 3).

Для расчета диаграмм деформирования при плоском деформированном состоянии применимы все приведенные ранее формулы после уменьшения напряжений от нагрузки в $1-\mu^2$ раз и с поправкой на предел текучести, которую легко получить, используя уравнение поверхности текучести по Мизесу:

$$\sigma_x^2 + \sigma_z^2 + [\sigma_x - \sigma_z]^2 = 2 \cdot \sigma_T^2, \quad (5)$$

где σ_x – полное напряжение в плоскости изгиба; σ_z – полное напряжение вдоль оси изгибающего момента (оси заготовки).

Полное напряжение есть сумма остаточного напряжения и напряжения, возникающего при приложении внешней нагрузки:

$$\sigma_x = \sigma_{xM} + \sigma_{x0}; \quad (6)$$

$$\sigma_z = \sigma_{zM} + \sigma_{z0}. \quad (7)$$

Здесь σ_{xM} , σ_{zM} – напряжения, возникающие при приложении изгибающего момента.

Согласно обобщенному закону Гука при плоском деформированном состоянии ($\varepsilon_z = 0$)

$$\sigma_{zM} = \mu \cdot \sigma_{xM}, \quad (8)$$

где μ – коэффициент Пуассона материала заготовки при упругом деформировании.

Отсюда с учетом формул (6) и (7) получаем:

$$\sigma_z = \mu \cdot (\sigma_x - \sigma_{x0}) + \sigma_{z0}. \quad (9)$$

В итоге выражение критерия текучести по Мизесу (5) имеет вид

$$\sigma_x^2 + [\mu \cdot (\sigma_x - \sigma_{x0}) + \sigma_{z0}]^2 + [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_x - \sigma_{x0}) - \sigma_{z0}]^2 = 2 \cdot \sigma_T^2. \quad (10)$$

Остаточные напряжения σ_{x0} и σ_{z0} при отсутствии деформационного упрочнения материала связаны формулой

$$\sigma_{z0} = \mu \cdot \sigma_{x0}, \quad (11)$$

которая справедлива всегда при совпадении оси x с направлением прокатки, вне зависимости от того происходит ли при прокатке увеличение ширины листа или его длины.

После упрощения выражения (10) с учетом формулы (11) получим значение напряжения $\sigma_T^{ПДС}$, при котором появляются пластические деформации в материале без деформационного упрочнения при плоском деформированном состоянии:

$$\sigma_T^{ПДС} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu+\mu^2}} \cdot \sigma_T. \quad (12)$$

Как видно из формулы (12), напряжение, при котором появляются пластические деформации в плоском деформированном состоянии, не зависит, как и в случае плоского напряженного состояния, от остаточных напряжений по причине отсутствия деформационного упрочнения материала.

Графики смещения нейтральной оси $\Delta(\kappa)$ для плоского напряженного и плоского деформированного состояний представлены на рис. 4.

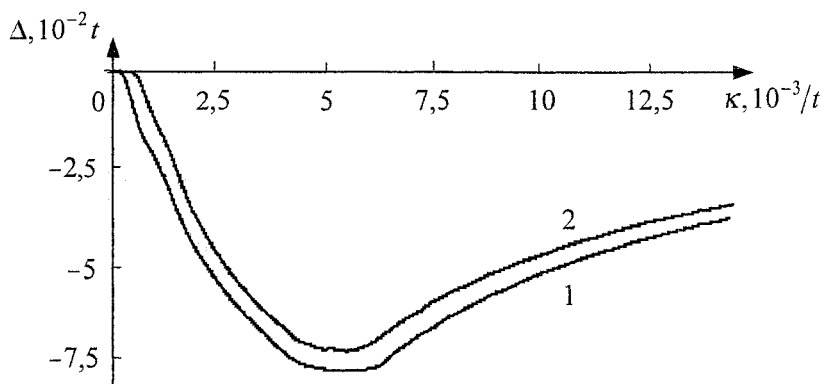


Рис. 4. Смещение нейтральной оси (знак «минус» соответствует смещению в сторону сжатых волокон заготовки): 1 – ПНС, 2 – ПДС

Диаграммы деформирования заготовки при чистом изгибе для плоского напряженного и плоского деформированного состояний, рассчитанные с учетом и без учета остаточных напряжений, показаны на рис. 5.

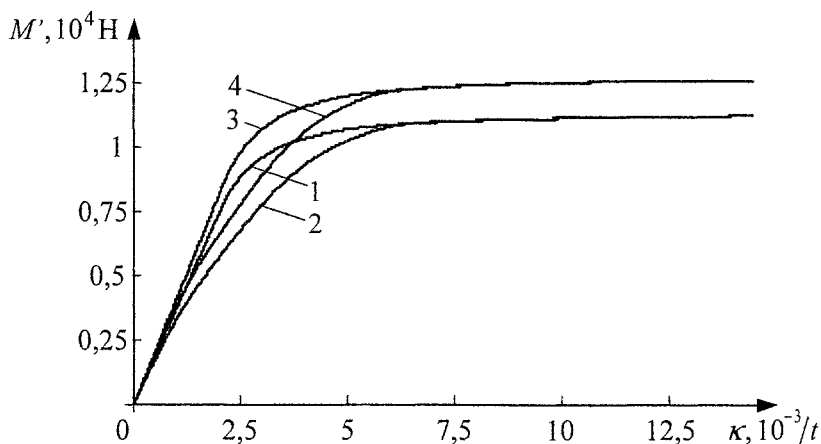


Рис. 5. Кривые деформирования при изгибе: 1 – ПНС, без остаточных напряжений; 2 – ПНС, с остаточными напряжениями; 3 – ПДС, без остаточных напряжений; 4 – ПДС, с остаточными напряжениями

Представленные графики соответствуют случаю изгиба в плоскости, совпадающей с направлением прокатки. Полученные диаграммы деформирования справедливы в рамках принятой гипотезы о распределении остаточных напряжений для заготовок любой толщины из одного и того же материала, механические свойства которого были указаны в предыдущем разделе.

Как видно из рис. 5, диаграммы деформирования при плоской деформации лежат выше аналогичных кривых при плоском напряженном состоянии. При этом наклоны «упругих» участков диаграмм отличаются незначительно – в $1-\mu^2$ раз. Поэтому упругая отдача заготовок при пло-

ской деформации будет всегда больше отдачи при плоском напряженном состоянии. Это значит, что при изгибе заготовок упругая отдача в сечениях, перпендикулярных оси изгиба, должна уменьшаться от середины заготовки, работающей в условиях плоского деформированного состояния, к краям, находящимся в условиях плоского напряженного.

Изменение упругой отдачи при наличии остаточных напряжений

Рассмотренная выше методика расчета диаграмм деформирования при изгибе позволяет определить, насколько изменится упругая отдача V заготовки, если учесть остаточные напряжения, появляющиеся в процессе прокатки.

Предполагается, что заготовка изгибается вдоль направления проката по дуге половины окружности радиуса R . Под отдачей понимается перемещение краевых точек заготовки вдоль направления центральной линии окружности после окончания гибки (рис. 6).

Остаточная кривизна заготовки после штамповки вычисляется по формуле

$$\kappa_{ост} = \kappa - c \cdot \frac{12 \cdot M'(\kappa)}{E \cdot t^3}, \quad (13)$$

где c – поправочный коэффициент, $c = \begin{cases} 1, & \text{при ПНС;} \\ 1 - \mu^2, & \text{при ПДС,} \end{cases}$ а момент $M'(\kappa)$ вычисляется по кривым на рис. 5.

После несложных преобразований с использованием величины остаточной кривизны $\kappa_{ост}$ вычисляется изменение упругой отдачи ΔV заготовки при наличии остаточных напряжений (рис. 6).

Как видно из рис. 6, влияние остаточных напряжений, возникших при прокатке, на пружинение после гибки сказывается только в определенном диапазоне радиусов гибки: при малых радиусах большие пластические деформации приводят к «забыванию» истории предшествующего нагружения, а при больших радиусах восстановление деформаций (пружинение) велико и остаточные напряжения не оказывают на него заметного влияния.

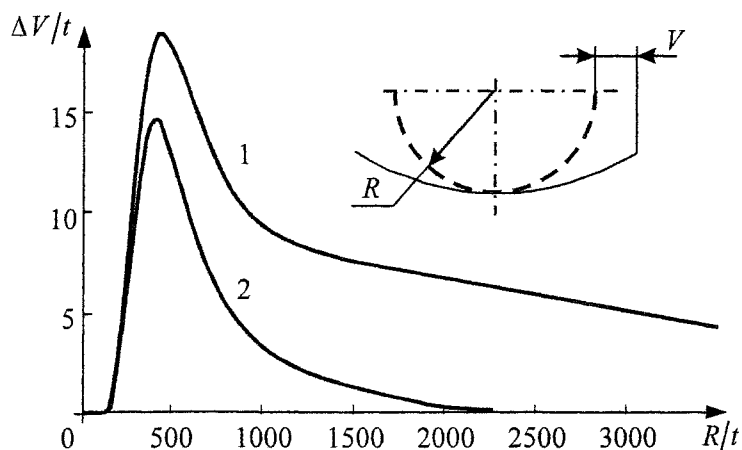


Рис. 6. Изменение упругой отдачи после введения остаточных напряжений: 1 – ПНС; 2 – ПДС

Заключение

Установлено, что в некоторых случаях остаточные напряжения, возникшие при прокатке, могут влиять на процесс штамповки, в частности – на величину восстановления деформации после снятия нагрузки. Выполненный анализ позволяет понять механизм этого влияния и оценить диапазон условий, когда следует – или не следует – учитывать остаточные напряжения, возникшие на различных стадиях процесса. Моделирование изготовления реальных деталей, проводимое в последнее время методом конечных элементов, должно выполняться с учетом возможного влияния всей истории деформирования на конечную форму заготовки.

Литература

1. Ковка и штамповка: справочник: в 4 т. Т. 4. Листовая штамповка / под ред. А.Д. Матвеева; ред. совет: Е.И. Семенов (пред.) и др. – М.: Машиностроение, 1985–1987. – 544 с.
2. Аверкиев, Ю.А. Технология холодной штамповки / Ю.А. Аверкиев, А.Ю. Аверкиев. – М.: Машиностроение, 1989. – 304 с.
3. Мовшович, И.Я. Методологические принципы математического моделирования штампов для листовой штамповки / И.Я. Мовшович, Е.И. Заярненко, Л.Г. Кузнецова // Кузнечно-штамповочное производство. – 2006. – № 2. – С. 26–30.
4. Вдовин, С.И., Инженерные расчеты операций гибки / С.И. Вдовин, Н.В. Петров // Кузнечно-штамповочное производство. – 2004. – № 12. – С. 26–28.
5. Зубанов, И.Ю. Автоматизированное проектирование и моделирование процессов листовой штамповки / И.Ю. Зубанов, Е.М. Почекуев // Кузнечно-штамповочное производство. – 2004. – № 5. – С. 22–24.
6. Гохфельд, Д.А. Несущая способность конструкций при повторных нагрузениях / редкол. сер.: С.Д. Пономарев (пред.) и др. / Д.А. Гохфельд, О.Ф. Чернявский. – М.: Машиностроение, 1979. – 263 с.
7. LS-DYNA Keyword User's Manual: Livermore Software Technology Corporation.
8. Гохфельд, Д.А. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагрузениях / Д.А. Гохфельд, О.С. Садаков. – М.: Машиностроение, 1984. – 256 с.

СТАНОК С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИВОДАМИ КООРДИНАТНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ РАБОЧЕГО ОРГАНА

М.М. Тверской

Описана кинематическая схема шестикоординатного станка с параллельными приводами координатных перемещений рабочего органа. Приведены основные соотношения для расчета геометрических параметров станка при заданных характеристиках его рабочего пространства.

подавляющее большинство металлообрабатывающих станков, промышленных роботов и других манипуляционных машин имеют последовательную кинематическую структуру. Их выходное звено (суппорт, стол, схват) связано со стойкой (станиной) единственной кинематической цепью, которая является разомкнутой. Перемещение выходного звена по нескольким координатам достигается за счет использования соответствующего числа приводов, включенных в указанную кинематическую цепь последовательно. Примером может служить трехкоординатный фрезерный станок консольного типа с ЧПУ, разомкнутая кинематическая цепь которого состоит из одного неподвижного звена (станины) и трех подвижных звеньев – консоли, поперечных салазок и стола. Перечисленные звенья образуют три поступательные пары, имеющие приводы, которые обеспечивают перемещение заготовки, установленной на столе, вдоль трех осей декартовой прямоугольной системы координат.

Приводы и направляющие поперечных салазок и стола, размещенные на консоли, существенно увеличивают ее совокупную массу, что отрицательно сказывается на динамических показателях станка и увеличивает его материалоемкость.

В то же время известны механизмы с параллельными приводами, у которых несколько приводов (как правило, линейных) перемещают одно и то же выходное звено. Такими механизмами являются платформы Гауфа и Стюарта, манипулятор Данилевского и другие [1]. Платформа Стюарта соединена с основанием шестью стержнями изменяемой длины. Каждый стержень состоит из двух звеньев, образующих поступательную пару, и привода линейных перемещений. Шесть верхних шарниров, с помощью которых стержни соединяются платформой, являются сферическими (трехосевыми), шесть нижних, соединяющих стержни с основанием, являются двухосевыми (кардановыми).

Согласованно изменяя длины шести стержней, можно осуществлять движение платформы по шести координатам (трем линейным и трем угловым). При заторможенных приводах подобные механизмы обращаются в пространственные фермы, стержни которых благодаря шарнирным соединениям воспринимают только осевые нагрузки, чем обеспечивается высокая жесткость механизма при малой материалоемкости. Масса подвижных звеньев в подобных механизмах существенно меньше суммарной массы подвижных звеньев в механизмах последовательной кинематической структуры.

Однако в механизмах параллельной кинематической структуры, в отличие от предыдущих, работа одного привода приводит к перемещению выходного звена одновременно по нескольким координатам. Покажем это, рассмотрев простейший плоский механизм, изображенный на рис. 1. Выходным звеном механизма является планшайба 1, центр которой (точка А) может перемещаться по двум координатам – x и y . Угловая координата φ_z планшайбы может быть либо произвольной (там, где это допустимо), либо остается постоянной за счет дополнительной (пассивной) кинематической цепи 2 в виде двух параллелограммов. Механизм имеет два линейных привода, изменяющих длины стержней АВ и АС. При работе одного привода, изменяющего, например, длину стержня АВ, точка А будет перемещаться по окружности с центром в точке С, т. е. будут изменяться обе ее координаты – x и y . Механизм имеет особые положения, при которых оба стержня расположены на прямой ВС. Передаточные отношения от каждого привода до выходного звена по обеим координатам – непостоянны.

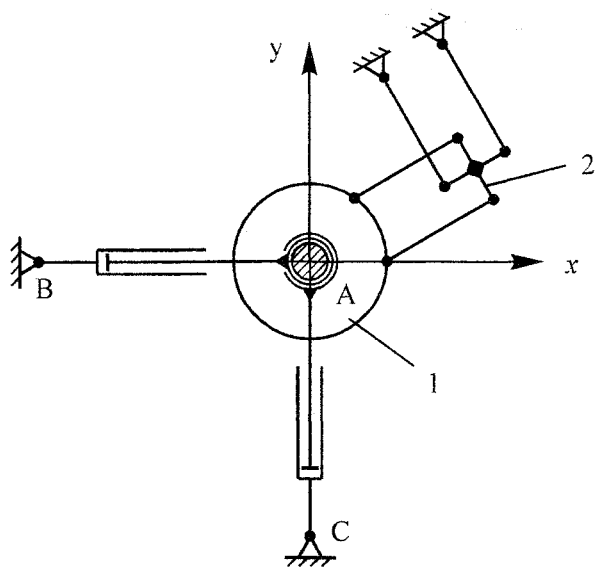


Рис. 1

Указанные особенности механизмов с параллельными приводами свидетельствуют о том, что управление движением выходного звена этих механизмов представляет намного более сложную задачу по сравнению с управлением механизмами последовательной кинематической структуры, в которых каждый провод перемещает выходное звено только по одной координате.

Однако с появлением и развитием микропроцессорных систем управления и научных основ мехатроники задачи управления движением выходного звена механизмов с параллельными приводами стали вполне разрешимыми, что и вызвало практический интерес к таким механизмам и появление станков-гексаподов с шестью управляемыми координатами [2].

Наряду с преимуществами (малой материальной емкостью и хорошими динамическими

свойствами) эти станки обладают и недостатками. Главными из них являются отмеченные выше сложность управления и наличие особых положений, а также недостаточные жесткость и величины перемещений по некоторым координатам.

Рассматриваемая ниже кинематическая схема станка-гексапода (рис. 2) существенно отличается от традиционной для этого класса станков схемы платформы Стюарта и имеет перед ней, на взгляд автора, определенные преимущества.

Исполнительным органом станка является гильза 1. На верхнем и нижнем торцах гильзы расположены сферические шарниры 2 и 3, по три шарнира на каждом торце. Центры шарниров каждого торца расположены на окружностях с интервалом 120° , а между собой две группы сферических шарниров смещены на 60° . На неподвижном основании 4 равномерно расположены шесть двухосных (кардановых) шарниров 5, которые соединены стержнями 6 и 7 изменяемой длины с шарнирами 2 и 3, расположенными на торцах гильзы 1. Шарниры верхней и нижней групп стержней на основании 4 чередуются. В гильзе 1 расположен вращающийся от электродвигателя 8 шпиндель с закрепленным в нем инструментом 9.

Удлиняя по одному и тому же закону все нижние стержни и соответственно укорачивая верхние, можно вертикально опускать гильзу 1. При этом силовая нагрузка на инструмент воспринимается всеми шестью приводами стержней равномерно.

Изменяя по периодическому закону длины всех стержней со смещением по фазе на 60° , можно осуществлять движение оси гильзы по поверхности прямого кругового цилиндра с вертикальной осью.

Изменяя длины верхних стержней по периодическому закону со смещением по фазе на 60° , а длины противоположных им нижних стержней в противофазе, можно осуществлять движение оси гильзы по поверхности прямого кругового конуса. Более сложные алгоритмы изменения длин стержней позволяют перемещать ось гильзы по весьма сложным траекториям.

Реактивный момент на статоре электродвигателя 8 воспринимается всеми шестью стержнями, поскольку поворот гильзы под действием реактивного момента вокруг своей оси при неизменной длине всех стержней возможен только при смещении ее фланцев с шарнирами 2 и 3 навстречу друг другу. Поскольку фланцы соединены жесткой гильзой 1, то такой поворот возможен только в пределах, обусловленных упругой деформацией всех стержней, работающих на растяжение или сжатие. Это обеспечивает достаточную жесткость механизма по координате φ_2 (см. рис. 2).

Управление поворотом гильзы вокруг своей оси имеет свои особенности. Во-первых, при обработке вращающимися (от электродвигателя 8) инструментами (сверлами, фрезами, шлифовальными кругами и т. п.) такое движение гильзы не требуется. Однако при закреплении на гиль-

зе некоторых видов схватов и измерительных головок оно должно быть предусмотрено. Поворот гильзы вокруг своей оси достигается одновременным уменьшением или увеличением длин всех шести стержней. При этом следует иметь ввиду то обстоятельство, что некоторые из положений механизма по отношению к координате φ_z являются особыми. При особых положениях гильзы все стержни располагаются в плоскостях, проходящих через ось гильзы и центр своего неподвижного шарнира. Механизм становится неуправляемым по координате φ_z . Поэтому необходим, например, дополнительный привод для выведения механизма из особых положений, либо эти положения должны быть запрещены.

Рассматриваемый механизм имеет пять основных геометрических параметров: D – диаметр окружности расположения центров неподвижных шарниров; d – диаметр окружностей расположения центров подвижных шарниров; L – длина гильзы (расстояние между плоскостями расположения подвижных шарниров); l_{\min} , l_{\max} – минимальная и максимальная длина каждого из шести стержней.

При этом параметры d и l_{\min} , как правило, определяются конструктивно – из условий размещения шарниров на фланцах гильзы и на нижних частях стержней. Для аналитического определения остальных из названных параметров необходимо задать величины желаемых перемещений гильзы (параметры рабочей зоны станка) и составить необходимые соотношения.

Введем неподвижную правую прямоугольную систему координат станка $Oxyz$, координатная плоскость xOy которой совпадает с плоскостью расположения центров неподвижных шарниров, а начало координат – с центром окружности (диаметром D), на которой они расположены (см. рис. 2).

Примем, что в исходном положении ось гильзы совпадает с осью Oz , а плоскость xOy делит длину гильзы пополам. Проекция всех шести стержней на плоскость xOy являются касательными к окружности диаметром d с центром в точке O . В процессе работы станка гильза может поворачиваться вокруг своей оси от этого исходного положения ($\varphi_z = 0$) в противоположных направлениях теоретически вплоть до указанных выше особых положений.

На рис. 3, а, где показан вид станка сверху (с положительного конца оси Oz), предельные углы поворота гильзы вокруг оси Oz обозначены φ_{z1} и φ_{z2} . При указанном на рисунке значении l_{\max} достигается только одно особое положение ($\varphi_z = \varphi_{z1}$).

Рассмотрим определение геометрических параметров станка, обеспечивающих его рабочее пространство, ограниченное сферой радиуса R , при движении гильзы без поворота вокруг своей оси, занимающей вертикальное положение.

Для этого необходимо, чтобы при указанном движении гильзы любая ее точка могла быть совмещена с любой точкой пространства, ограниченного сферой радиуса R с центром, совпадающим с положением этой точки при указанном выше исходном положении гильзы.

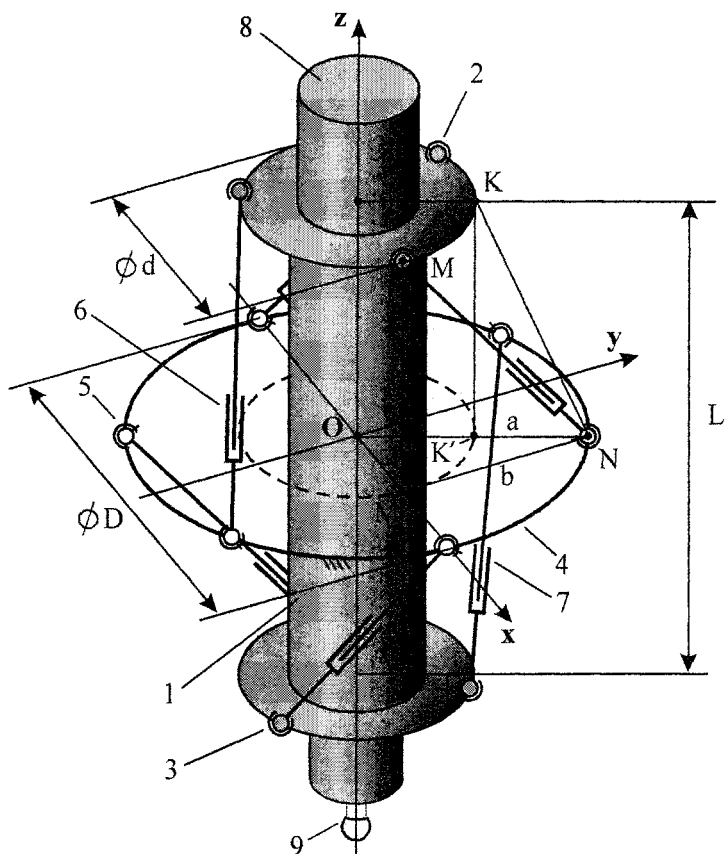


Рис. 2

При исходном положении гильзы, показанном на рис. 2, длины всех стержней одинаковы и равны l_0 . Расчет этой длины проведем для стержня NM.

$$l_0 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}, \quad (1)$$

где b – длина касательной NM'.

Из прямоугольного треугольника OM'N находим

$$b^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2. \quad (2)$$

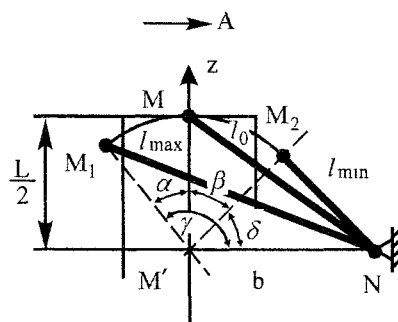
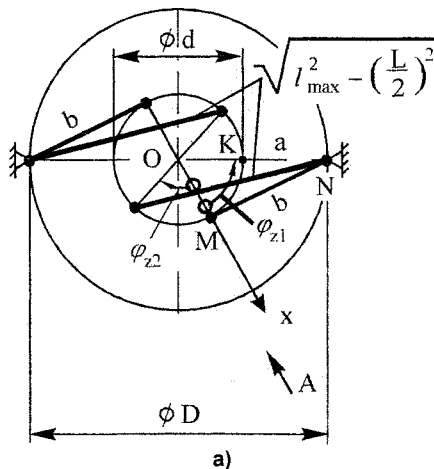


Рис. 3

Тогда

$$l_0 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}. \quad (3)$$

Поскольку по условиям задачи точка M, как и любая другая точка гильзы, должна описывать сферу с заданным радиусом R, то при указанном угловом положении гильзы

$$l_{\max} = l_0 + R; \quad (4)$$

$$l'_{\min} = l_0 - R. \quad (5)$$

При других угловых положениях гильзы требуемые длины стержней будут отличаться от рассчитанных по формулам (4) и (5). Наименьшие длины стержней требуются для особого углового положения гильзы $\varphi_z = \varphi_{z1}$. Определим l_{\min} для этого положения из треугольника NKK' (см. рис. 2):

$$l_{\min} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - R, \quad (6)$$

где $a^2 = \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right)^2. \quad (7)$

Объединяя равенства (6) и (7), получаем

$$(l_{\min} + R)^2 = \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2. \quad (8)$$

Из выражений (3) и (4) находим

$$(l_{\max} - R)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2. \quad (9)$$

Левые части уравнений (8) и (9) не равны между собой, так как l_{\min} рассчитывается для особого положения гильзы ($\varphi_z = \varphi_{z1}$), а l_{\max} – для исходного ($\varphi_z = 0$).

В уравнениях (8) и (9) три неизвестных – D , L , l_{\max} . Поэтому одну из этих величин необходимо задать дополнительно к заданным значениям d и l_{\min} .

Если $\frac{d}{2}$ есть не только радиус расположения центров сферических шарниров на фланцах гильзы, но и действительный наружный радиус «тела» гильзы, то должно выполняться неравенство:

$$\frac{D}{2} - \frac{d}{2} > R, \quad (10)$$

поскольку в противном случае смещение гильзы в горизонтальном направлении на величину R невозможно, так как этому помешают неподвижные шарниры. С учетом того, что действительный наружный диаметр гильзы может быть меньше d , при предварительных расчетах можно принять, что

$$D = 2R + d. \quad (11)$$

Тогда из уравнения (8) находим

$$L = 2\sqrt{l_{\min}^2 + 2Rl_{\min}}. \quad (12)$$

Из уравнения (9) находим

$$l_{\max} = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} + R. \quad (13)$$

Рассчитав по уравнениям (11)–(13) значения D , L и l_{\max} , можно найти углы α и β отклонения оси гильзы от вертикали при исходном угловом положении гильзы $\varphi_z = 0$. При увеличении длин двух противоположных стержней верхней и нижней групп от l_0 до l_{\max} этот угол будет равен α . При уменьшении длин двух противоположных стержней от l_0 до l_{\min} этот угол будет равен β (рис. 3, б).

Вначале по теореме косинусов найдем угол γ :

$$\gamma = \arccos \frac{b^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - l_{\max}^2}{bL} = \arccos \frac{l_0^2 - l_{\max}^2}{bL}. \quad (14)$$

Формула (14) справедлива при $l_{\max} \leq b + \frac{L}{2}$. В противном случае угол γ достигает 180° (еще одно особое положение механизма) при $l = l_\gamma = b + \frac{L}{2}$.

Аналогично находим угол δ :

$$\delta = \arccos \frac{b^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - l_{\min}^2}{bL} = \arccos \frac{l_0^2 - l_{\min}^2}{bL}. \quad (15)$$

После этого находим углы α и β :

$$\alpha = \gamma - 90^\circ; \quad \beta = 90^\circ - \delta. \quad (16)$$

Определим угол поворота гильзы вокруг вертикальной оси от исходного до особого положения, т. е. при уменьшении длин всех стержней от l_0 до $l_{\min} + R$ (см. рис. 3, а):

$$\varphi_{z1} = \arccos \frac{d}{D}. \quad (17)$$

Предельное значение угла φ_{z2} соответствует длине всех стержней, равной l_{\max} :

$$\varphi_{z2} = \arccos \frac{D^2 + d^2 + L^2 - 4l_{\max}^2}{2Dd} - 90^\circ. \quad (18)$$

Формула (18) справедлива при $l_{\max} \leq \sqrt{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$. В противном случае $\varphi_{z2} = 90^\circ$, и

это значение достигается при $l = l_z = \sqrt{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$.

Рассмотрим пример. Задано: $R = 120$ мм; $l_{\min} = 100$ мм; $d = 200$ мм.

Из уравнения (11) находим $D = 2 \cdot 120 + 200 = 440$ мм.

Из уравнения (2) находим $b^2 = 220^2 - 100^2 = 38400$, $b \approx 195,959$ мм.

Далее из уравнения (12) находим $\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 10\,000 + 24\,000 = 34\,000$; $L \approx 368,78$ мм. Из уравне-

ния (1) следует, что $l_0^2 = 38400 + 34000 = 72400$; $l_0 \approx 269,07$ мм, а из уравнений (4) или (13) нахо-

дим $l_{\max} = 389,07$ мм. Проверим выполнение неравенства $l_{\max} \leq b + \frac{L}{2}$: $l_{\gamma} = b + \frac{L}{2} = 380,35 < l_{\max}$.

Следовательно, угол γ достигает 180° при $l < l_{\max}$. Поэтому теоретически $\alpha = 90^\circ$.

По формулам (15) и (16) рассчитаем углы δ и β : $\delta = 30,7^\circ$; $\beta = 59,3^\circ$.

Далее находим $\varphi_{z1} = \arccos \frac{200}{440} \approx 62,96^\circ$. После этого находим значение l_z , при котором

$\varphi_z = \varphi_{z2} = 90^\circ$: $l_z = \sqrt{(220+100)^2 + 34\,000} \approx 369,32 < l_{\max}$. Из этого следует, что и угол $\varphi_{z2} = 90^\circ$ теоретически достижим. Итак, при заданных параметрах $R = 120$ мм, $l_{\min} = 100$ мм, $d = 200$ мм нашли следующие расчетные геометрические параметры станка: $D = 440$ мм, $L = 368,78$ мм, $l_{\max} = 389,07$ мм углы отклонения оси гильзы от вертикали $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 59,3^\circ$, углы поворота гильзы вокруг своей оси $\varphi_{z1} = 62,96^\circ$, $\varphi_{z2} = 90^\circ$. Следует еще раз отметить, что найденные углы $\alpha = 90^\circ$ и $\varphi_{z2} = 90^\circ$ скорее всего окажутся нереализуемыми по условиям столкновения конструктивных элементов станка. Реальные значения этих углов могут быть определены при конструировании станка.

Литература

1. Глазунов, В.А. *Пространственные механизмы параллельной структуры* / В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.Р. Крайнев. – М.: Наука, 1991. – 95 с.
2. Астанин, В.О. *Исследование металлорежущего станка нетрадиционной компоновки* / В.О. Астанин, В.М. Сергиенко // *Станки и инструмент*. – 1993. – № 3. – С. 5–8.

СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ ПРОЧНОСТИ СКОРОСТНЫХ РЕЛЬСОШЛИФОВАЛЬНЫХ КРУГОВ

А.Б. Чаплыгин, В.В. Райт, В.Г. Шеркунов, Н.В. Судаков, С.В. Марченко

Увеличение скорости ремонта рельсов на железной дороге ограничено прочностью кругов рельсошлифовального поезда. Настоящая работа посвящена повышению эксплуатационных характеристик абразивных кругов.

Актуальной задачей ОАО «Российские железные дороги» является увеличение скорости движения подвижного состава, которая сдерживается повышенным износом рельсового пути [1–3]. Ускорить процесс восстановления рельсового полотна возможно путем увеличения скорости шлифования рельсов и, как следствие, разработки торцешлифовальных кругов, способных работать со скоростью 100 м/с.

Обеспечение безопасной работы круга на повышенных скоростях достигается за счет применения термопрессования, дополнительных упрочняющих элементов и оптимизации состава связки кругов. Скорость разрыва круга $V_{разр}$ при вращении в наибольшей степени зависит от прочности на изгиб материала шлифовального круга [4, 5]:

$$V_{разр} = K \cdot \sqrt{\frac{\sigma_u}{\gamma \cdot (1 + \alpha + \alpha^2)}},$$

где K – эмпирический коэффициент; σ_u – статическая прочность на изгиб; γ – плотность образца; $\alpha = \frac{d}{D}$ – коэффициент формы, зависящий от внутреннего d и наружного D диаметров круга.

Исследования разных типов кругов на испытательных стендах позволили установить величину эмпирического коэффициента, которая для кругов с армирующими элементами равна 11,3.

Зная значения K , σ_u , γ , α можно рассчитать скорость разрыва круга $V_{разр}$ и коэффициент запаса прочности

$$S = \left(\frac{V_{разр}}{V_{раб}} \right)^2,$$

где $V_{раб}$ – рабочая скорость круга, которую примем равной 100 м/с.

Физико-механические свойства материала кругов испытывались на образцах в виде брусков 150×90×20 мм. Напряжение изгиба в момент разрушения образца определялось на специальном стенде [6]. Твердость определялась на пескоструйном приборе мод. 910 по ГОСТ 18118. Плотность образцов γ определялась измерением линейных размеров и взвешиванием. Звуковой индекс (ЗИ) образцов, связанный с модулем упругости, определялся при помощи прибора «Импульс» измерением скорости ультразвука по таблице звуковых индексов [7].

При изготовлении скоростных абразивных изделий используют термопрессование: теплое и горячее. При теплом прессовании температура пресс-формы лежит в интервале от 60 °С до 100 °С, при горячем прессовании – от 170 °С до 180 °С. При нагреве в температурном интервале 60–100 °С формируемая смесь становится пластичной и под давлением хорошо уплотняется. При дальнейшем увеличении температуры (горячее прессование) происходит частичная полимеризация связующего с получением почти беспористой структуры изделия.

Образцы изготавливались по рецептуре рабочей части круга с применением электрокорунда циркониевого (ЭК) зернистостей 160, 125 и 100, и по рецептуре нерабочей части с карбидом кремния зернистости 12 двумя способами: теплым и горячим прессованием.

Результаты испытаний брусков приведены в таблице.

Из табличных данных видно, что бруски, изготовленные методом горячего прессования, имеют более высокую плотность, прочность, скорость ультразвуковых колебаний, ЗИ и твердость, чем бруски, изготовленные методом теплового прессования.

Физико-механические свойства образцов

Параметры	Ед. изм.	Теплое прессование		Горячее прессование	
		Рабочая часть	Нерабочая часть	Рабочая часть	Нерабочая часть
Плотность	г/см ³	3,30	2,41	3,38	2,69
Разрушающее напряжение при изгибе	кгс/см ²	76±50	800±40	820±40	1070±50
Скорость УЗК	м/с	4620±20	4260±40	4800±30	5010±50
Звуковой индекс	ЗИ	43	39–41	45	47
Глубина лунки	мм	0,25±0,1	1,8±0,15	0,20±0,1	1,6±0,15
Степень твердости	–	ЧТ	ЧТ	ЧТ	ЧТ
Расчетная скорость при разрыве круга	м/с	145±5	174±5	140±4	190±5
Расчетный коэффициент запаса прочности	–	2,1±0,15	3,05±0,15	2,2±0,1	3,6±0,2

Экспериментальная партия абразивных кругов 250×50×76, применяемых на рельсошлифовальных поездах, была изготовлена методом горячего прессования.

Конструктивно шлифовальные круги состоит из двух частей: рабочей, содержащей ЭЦ, и нерабочей несущей части, где вместо ЭЦ используется мелкозернистый карбид кремния, что позволяет повысить прочность круга в целом и снизить расход дорогостоящего ЭЦ.

С целью повышения уровня безопасности при работе круги армированы стеклянним ровингом по наружному диаметру не в два слоя, как серийный для работы со скоростью 50 м/с, а в четыре слоя.

Для удаления влаги формовочные смеси до прессования кондиционировались при 65±5 °С в течение 12 часов. Прессование производилось на гидропрессе усилием 250 т.с. при температуре 180 °С с выдержкой под давлением 40 мин. Сушка осуществлялась при максимальной температуре 185 °С в течение 16 часов.

Для определения фактического запаса прочности опытные круги были испытаны вращением до разрыва на испытательном станке. Коэффициент запаса прочности был обеспечен в интервале 2,6–2,9, что превышает требование к безопасности при работе кругов.

Таким образом, показана техническая возможность изготовления скоростных кругов, промышленное освоение производства которых увеличит производительность ремонта рельсового пути и, как следствие, среднюю скорость движения поездов с 60–80 км/ч до 100–120 км/ч.

Литература

1. Чаплыгин, Б.А. Повышение стойкости рельсошлифовальных кругов / Б.А. Чаплыгин, С.Н. Корчак, В.В. Райт // Сб. научн. трудов «Абразивный инструмент и металлообработка». – Челябинск, 2002. – С. 13–17.
2. К вопросу повышения качества шлифовальных кругов для обработки железнодорожных рельсов в пути / В.В. Райт [и др.] // Сб. научн. трудов «Теория, технология и оборудование для производства абразивного инструмента». – Челябинск, 2003. – С. 90–93.
3. Пути повышения физико-механических и эксплуатационных свойств шлифовальных кругов на бакелитовой связке / В.В. Райт [и др.] // Сб. научн. трудов «Абразивное производство». – Челябинск, 2004. – С. 45–48.
4. Ивашильников, В.Т. Прогрессивное шлифование / В.Т. Ивашильников. – Челябинск: Южно-Уральское кн. изд-во, 1976. – С. 67–71.
5. Талеманн, М. Прочностные свойства абразивного инструмента на бакелитовой связке / М. Талеманн // *Internationaie Tagurg fur Sehbeiftechnik in Innsbruk*. – 1970. – С. 19–22.
6. Тарнопольский, Ю.М. Методы статистических испытаний армированных пластиков / Ю.М. Тарнопольский, Т.Я. Кинцис. – М.: Химия, 1975. – С. 168–202.
7. Ультразвуковой контроль абразивного инструмента: методические рекомендации. УралВНИИАШ. – М.: ВНИИТЭМР, 1988. – 25 с.

РАСЧЕТ МИНИМАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ЗАДНЕГО УГЛА РЕЗЦА ПРИ ТОЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С НЕКРУГЛЫМИ НАПРАВЛЯЮЩИМИ

И.А. Щуров, В.В. Ворона

Рассматривается обработка точением внутренней цилиндрической поверхности детали с некруглой направляющей линией. Точение производится резцом, совершающим синхронные с вращением заготовки радиальные перемещения. Для исключения удара задней поверхности резца о заготовку необходимо обеспечить достаточную величину заднего угла. Статья посвящена расчету минимальной величины последнего на основе определения огибающей семейства линий – направляющих поверхности детали при ее движении относительно инструмента.

В машиностроении применяются детали, поверхности которых относятся к классу цилиндрических поверхностей. В качестве направляющих линий таких поверхностей среди прочего используются кривые, описываемые в полярной системе координат уравнением [1, 2]

$$\rho(\psi) = a - b \cos(n\psi), \quad (1)$$

где a – средний радиус синусоиды, b – эксцентриситет, n – количество осей симметрии кривой.

Одним из способов получения указанных поверхностей является точение или растачивание резцом. При этом резцу наряду с движением подачи D_s вдоль оси заготовки сообщается радиальное движение D_{rp} по закону $\Delta(\psi) = \epsilon \cos(n\psi)$ посредством шупа, жестко связанного с резцом и опирающегося на требуемое копирное устройство, причем шуп располагают оппозитно получаемой поверхности [3–5]. Одновременно с перемещениями резца заготовка совершает вращательное движение вокруг своей оси, обеспечивая главное движение резания D_r (рис. 1).

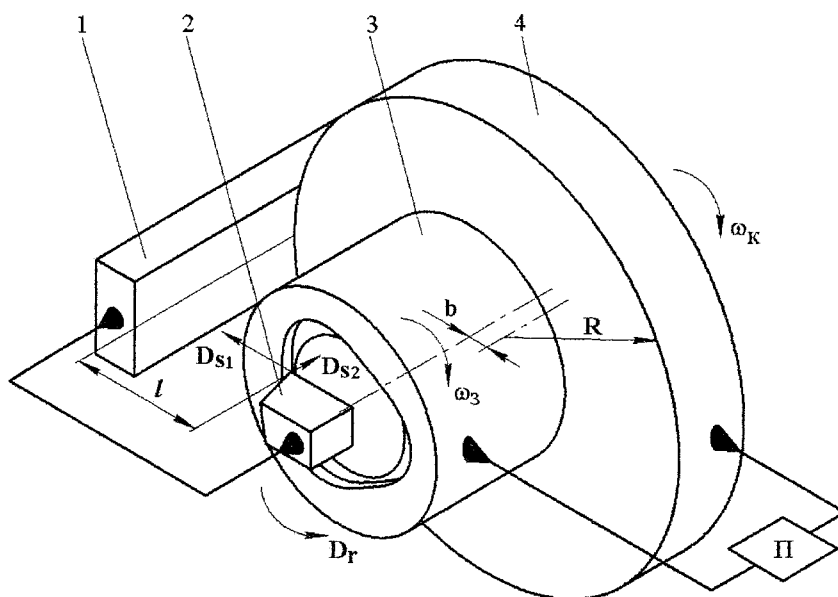


Рис. 1. Схема обработки: 1 – шуп, 2 – резец, 3 – заготовка, 4 – копир

Одной из проблем при реализации такой операции обработки является правильная заточка инструмента, так как при повороте детали на некоторый угол τ в процессе обработки проекция инструмента на плоскость, перпендикулярную рабочей плоскости, может пересекать сечение получаемой поверхности, что приведет к браку изделия и поломке резца (рис. 2).

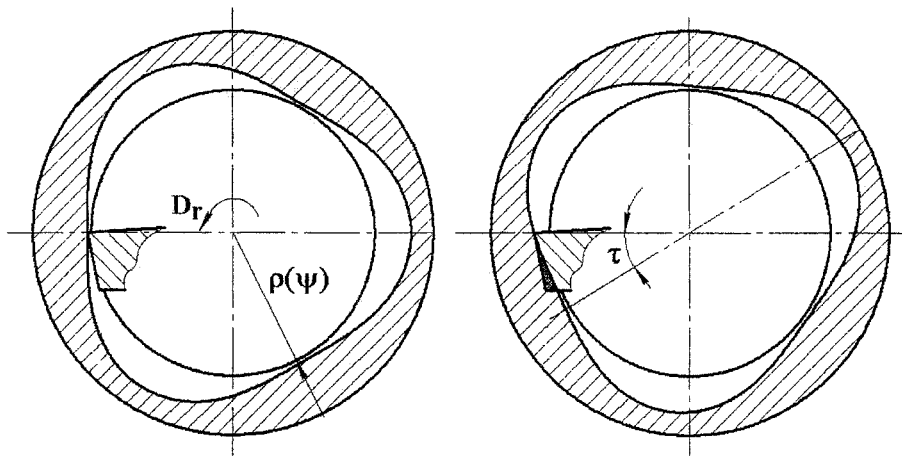


Рис. 2. Расположение сечений резца и детали: а – в начальный период обработки; б – при повороте на угол τ

В связи с этим возникает задача определения предельного угла наклона проекции линии пересечения главной и вспомогательной задних поверхностей на плоскость, перпендикулярную рабочей. При исследовании процесса было замечено, что искомый угол при обработке внутренних поверхностей больше, чем при обработке наружных, поэтому задача может быть сведена к определению предельного положения точки радиального профиля детали на высоте, равной высоте державки резца. Для решения этой задачи найдем уравнение семейства профилей детали при ее формообразующем движении относительно вершины резца.

В декартовой системе координат указанная кривая (1) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} X = \rho(\psi) \cos \psi; \\ Y = \rho(\psi) \sin \psi. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку заготовка, а с ней и данный профиль, вращаются, то при повороте декартовой системы на угол ω новые координаты будут определяться как

$$\begin{cases} X_1 = \rho(\psi) \cos \psi \cos \omega - \rho(\psi) \sin \psi \sin \omega; \\ Y_1 = \rho(\psi) \sin \psi \sin \omega + \rho(\psi) \cos \psi \cos \omega. \end{cases} \quad (3)$$

Вынося $\rho(\psi)$ за скобки и преобразуя по известным тригонометрическим формулам, получим:

$$\begin{cases} X_1 = \rho(\psi) \cos(\psi + \omega); \\ Y_1 = \rho(\psi) \sin(\psi + \omega). \end{cases} \quad (4)$$

Как отмечалось ранее, в реальной обработке резец перемещается в горизонтальной плоскости по закону, обеспечивающему формирование синусоидального профиля, при одновременном вращении заготовки. В данном случае примем резец неподвижным в соответствующей неподвижной системе координат, а заготовке сообщим необходимое движение вдоль оси абсцисс. Тогда, с учетом подстановки в (4) значения радиус-вектора из (1), получим

$$\begin{cases} X_1 = (a - b \cos(n\psi)) \cos(\psi + \omega) + b \cos(n\omega); \\ Y_1 = (a - b \cos(n\psi)) \sin(\psi + \omega). \end{cases} \quad (5)$$

Пусть высота державки резца в радиальной плоскости, проходящей через его вершину, равна h (рис. 3). Тогда из второго уравнения системы (4), зная, что $Y_1 = -h$, найдем взаимосвязь угла поворота профиля ω с величиной h и углом поворота радиус-вектора ψ :

$$\omega = \arcsin\left(\frac{-h}{a - b \cos(n\psi)}\right) - \psi. \quad (6)$$

Подставляя (6) в первое уравнение системы (5), получим:

$$X_1 = (a - b \cos(n\psi)) \cos\left[\arcsin\left(\frac{-h}{a - b \cos(n\psi)}\right)\right] + b \cos\left[n\left(\arcsin\left(\frac{-h}{a - b \cos(n\psi)}\right) - \psi\right)\right]. \quad (7)$$

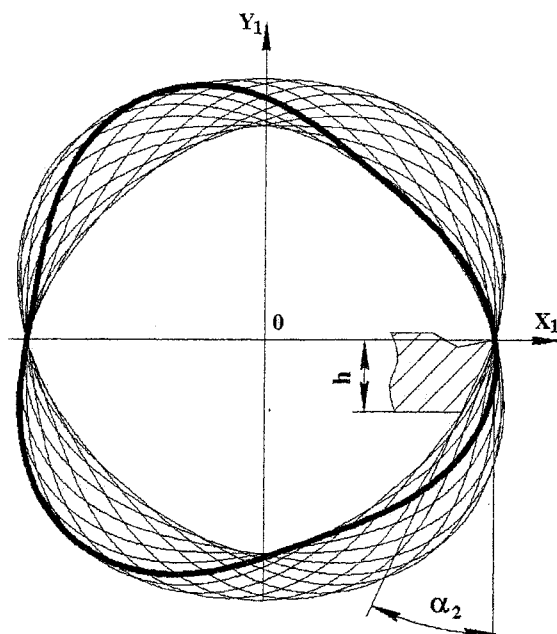


Рис. 3. Семейство кривых ($a=40, b=4, n=3$) по системе (5) и положение реза

Из уравнения (7) можно найти такое значение величины ψ , когда X_1 будет иметь минимальное значение в одной из координатных полуплоскостей. Экстремальное значение X_1 можно получить, например, протабулировав (7) или определяя производную по ψ .

Обозначив

$$F(\psi) = \arcsin\left(\frac{-h}{a - b \cos(n\psi)}\right),$$

выражение (7) можно свести к виду

$$X_1 = (a - b \cos(n\psi)) \cos(F(\psi)) + b \cos(n(F(\psi) - \psi)).$$

Тогда экстремальное значение X_1 находится из выражения

$$\frac{\partial [a \cos(F(\psi)) - b \cos(n\psi) \cos(F(\psi)) + b \cos(n(F(\psi) - \psi))]}{\partial \psi} = 0. \quad (8)$$

Дифференцирование по ψ в последнем уравнении не представляет собой математической трудности, однако является достаточно громоздким и здесь не приводится. Полученное уравнение является трансцендентным относительно ψ и решается на ЭВМ.

Определив из (8) значение угла ψ , после подстановки в (6) и далее в (5) находятся значения координат точек профиля, по которым затем рассчитывается значение предельного угла инструмента в радиальной плоскости:

$$\alpha_2 = \arctg\left(\frac{Y_1}{X_1}\right).$$

Расчет предельного угла α_2 позволяет определить зависимость между задними углами α , α_1 и углами в плане φ , φ_1 по уравнению

$$\alpha_1 = \arctg \left[\frac{\frac{\operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin \varphi_1}{\sin(\varphi + \varphi_1)}}{\frac{1}{\cos \varphi_1} - \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_1)}} \right].$$

В одном из случаев обработки растачиванием детали ЦСКБ «Прогресс» г. Самара ($a = 10$, $b = 0,625$, $n = 3$) для ряда высот державок резцов h был рассчитан ряд значений предельных радиальных углов α_2 . Результаты расчета приведены в таблице.

Значения предельных углов α_2 при растачивании детали

h , мм	3	4	5	6	7	8
α_2 , град	19,15	22,1	24,86	28,18	31,56	35,63

Таким образом, была установлена взаимосвязь предельного угла наклона проекции линии пересечения главной и вспомогательной задних поверхностей на плоскость, перпендикулярную рабочей, и высоты державки резца при обработке некруглых цилиндрических поверхностей синусоидального профиля с базированием щупа, связанного с резцом, по поверхности копира оппозитно поверхности детали.

В ходе исследования процесса токарной обработки рассматриваемой цилиндрической поверхности были сделаны следующие наблюдения:

- при увеличении высоты державки резца предельный угол возрастает;
- с уменьшением эксцентриситета b при постоянных a , n и h предельный угол уменьшается;
- с увеличением количества осей симметрии n при постоянных a , b и h предельный угол увеличивается;
- с увеличением среднего радиуса a при постоянных n , b и h предельный угол уменьшается;
- если геометрия профиля соответствует рекомендациям, приведенным в работах [1, 2], то с увеличением количества осей симметрии n при постоянных среднем радиусе a и высоте державки предельный угол уменьшается.

Литература

1. Синкевич, В.М. Принцип образования точением синусоидальных профилей для бесшпоночных соединений и их геометрия / В.М. Синкевич // *Технология судостроения*. – 1973. – № 7. – С. 48–53.
2. Синкевич, В.М. Новый вид профильных соединений в узлах судовых механизмов / В.М. Синкевич, Е.П. Митюк // *Вестник машиностроения*. – 1990. – № 11. – С. 60–63.
3. Чиненов, С.Г. Приспособление для обработки некруглых цилиндрических поверхностей / С.Г. Чиненов, В.В. Ворона, Т.П. Чиненова // *СТИН*. – 2005. – № 7. – С. 11–13.
4. Патент № 2245224 РФ, МПК 7 В 23 В 5/44. Устройство для обработки некруглых цилиндрических поверхностей.
5. Патент № 2280539 РФ, МПК 7 В 23 В 5/44. Устройство для обработки синусоидальных цилиндрических поверхностей.

К ВОПРОСУ ПРОИЗВОДСТВА ВЫСОКИХ АБРАЗИВНЫХ КРУГОВ

В.Н. Дятлов, В.Г. Шеркунов, С.В. Марченко, А.Б. Чаплыгин

Показаны возможные способы формования заготовок высоких абразивных кругов для бесцентрового шлифования. Определены их недостатки и преимущества. Установлена зависимость допустимой скорости вращения круга от надежности сцепления витков многослойной рулонной заготовки. Сделан вывод о целесообразности формования многослойных заготовок методом гидростатического прессования.

Высокие абразивные круги (250 мм и более) применяются для бесцентрового шлифования [1]. С увеличением высоты круга повышается качество шлифования и сокращается время вспомогательных операций.

Существующая технология предусматривает пакетную прокатку многослойных листовых заготовок и последующую вырубку из них сплошных либо полых цилиндрических заготовок. Готовые изделия из цилиндрических заготовок получают прессованием в закрытых штампах с последующей термообработкой. Существуют разновидности рассматриваемой схемы. В частности, один из вариантов не предусматривает многослойную прокатку. При этом вырубка, формирование пакета и прессование осуществляются одновременно на специальном оборудовании [2]. Недостатки применяемой в настоящее время технологии получения высоких заготовок очевидны: многооперационность, неизбежность значительных отходов при вырубке, высокая неоднородность деформации при прессовании и вероятность расслоения готовых абразивных кругов при эксплуатации.

Оптимальным вариантом получения высоких заготовок очевидно явился бы процесс непрерывного прессования длинных сплошных либо полых цилиндров с последующей порезкой их на требуемые (в соответствии с высотой круга) размеры непосредственно из сырой абразивной смеси с последующей термообработкой. Этот вариант по сравнению с многослойными аналогами отличается минимальным числом операций, практически исключает отходы, не ограничивает длину (высоту круга) заготовки и снижает до минимума вероятность расслоения заготовки при последующей обработке. Для реализации рассмотренной схемы требуется специальное оборудование, которым не располагает отечественное абразивное производство. На отечественных заводах используются валковые смесители, конечным продуктом которых является листовая заготовка ограниченной толщины (не более 20 мм). Этим и объясняется необходимость использования многослойных пакетов для получения высоких заготовок.

В рамках специфики существующего производства заслуживает внимания производство рулонных заготовок. Этот вариант предполагает плотную свертку листовой заготовки в рулон требуемого внутреннего и наружного диаметров непосредственно после смесителя. При этом отпадает необходимость в многослойной прокатке и вырубке, что сокращает число операций и отходы материала. Высота заготовки (круга) определяется шириной листа после смесителя, т. е. практически не ограничена. Вместе с тем следует иметь в виду, что для абразивных кругов, полученных из рулонной заготовки, усугубляется вероятность расслоения в процессе эксплуатации из-за центробежных сил, возникающих при вращении круга и действующих по нормали к поверхностям сцепления витков рулона.

Оценка напряженного состояния вращающегося диска (круга) делается методом сил теории упругости [3].

При вращении диска в качестве объемной силы выступает сила инерции

$$p = \rho a_n, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала диска; a_n – нормальное ускорение.

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \quad (2)$$

где r – текущий радиус диска, v – окружная скорость точки диска, находящейся на окружности с текущим радиусом; ω – угловая скорость диска.

Без учета веса диска задача по определению напряжений сводится к осесимметричной, для которой дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\varphi\varphi} + pr = 0, \quad (3)$$

где r – радиальная координата в цилиндрической системе координат; σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – нормальное радиальное и тангенциальное напряжения.

Из геометрических уравнений для осесимметричной задачи имеем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad (4)$$

где ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – радиальная и тангенциальная относительные деформации; u_r – радиальное перемещение.

Дополнив уравнения (3) и (4) обобщенным законом Гука [3], после формального преобразования уравнение (4) можно привести к следующему виду:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r \frac{du_r}{dr} - u_r = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r^3, \quad (5)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона.

Общее решение уравнения (5) имеет вид [3]

$$u_r = \frac{1}{E} [(1-\nu)c_2 r - (1+\nu)c_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho \omega^2 r^3], \quad (6)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

С учетом (6) вычисляются линейные деформации, после чего напряжения находятся из обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{rr} = c_2 + c_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2, \quad (7)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_2 - c_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2. \quad (8)$$

Константы c_1 и c_2 определяются из граничных условий задачи.

Для вращающегося диска со свободными от напряжений поверхностями $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_B$ и $r = R_H$ (R_B и R_H – внутренний и наружный радиус диска). Из этих условий следует

$$c_1 = -\frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 R_B^2 R_H^2, \quad c_2 = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (R_H^2 + R_B^2). \quad (9)$$

С учетом констант получим

$$\sigma_{rr} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (R_H^2 + R_B^2 - \frac{R_B^2 R_H^2}{r^2} - r^2), \quad (10)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (R_H^2 + R_B^2 + \frac{R_B^2 R_H^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2). \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) позволяют оценить напряженное состояние вращающихся абразивных кругов в процессе их эксплуатации.

Из условия $\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = 0$ следует, что максимальные растягивающие радиальные напряжения, способствующие расслоению круга, изготовленного из рулонной заготовки, возникают в кольцевом сечении $r = \sqrt{R_B R_H}$ и равны

$$\sigma_{rr \max} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (R_H - R_B)^2. \quad (12)$$

Максимальное окружное напряжение действует на внутренней границе ($r = R_B$)

$$\sigma_{\varphi\varphi \max} = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left(R_H^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} R_B^2 \right). \quad (13)$$

На рис. 1 показан характер распределения относительных радиальных напряжений $K_\sigma = \sigma_{rr} / \sigma_\sigma$ по сечению круга. Анализ показывает, что в зависимости от массы круга и скорости его вращения максимальные радиальные напряжения могут быть соизмеримы с пределом прочности σ_σ материала круга на разрыв. Это обстоятельство накладывает повышенные требования к прочности сцепления витков рулонной заготовки.

В общем случае следует ожидать, что расслоение будет происходить при радиальных напряжениях, меньших, чем предел прочности материала на разрыв. В связи с этим представим напряжение расслоения в виде

$$\sigma_p = k_c \sigma_\sigma, \quad (14)$$

где k_c – коэффициент сцепления ($k_c \leq 1$).

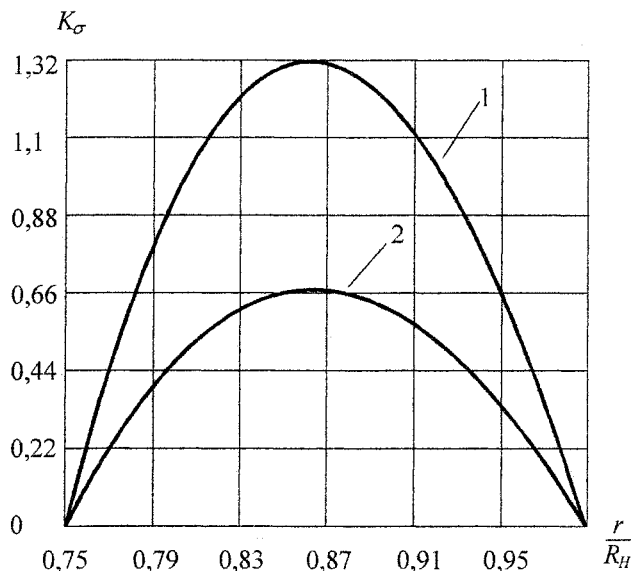


Рис. 1. Распределение относительных радиальных напряжений по сечению вращающегося круга ($R_H = 200$ мм, $R_B = 150$ мм, $\sigma_\sigma = 20$ МПа): 1 – окружная скорость круга 70 м/с; 2 – окружная скорость круга 50 м/с

Поделив (12) на σ_p и приравняв результат единице, получим условие безаварийной работы круга

$$\frac{3+\nu}{8k_c \sigma_\sigma} \rho \omega^2 (R_H - R_B)^2 = 1. \quad (15)$$

Из (15) можно найти максимально-возможную скорость вращения круга

$$\omega_{\max} = \frac{1}{R_H - R_B} \sqrt{\frac{8K_c \sigma_\sigma}{\rho(3+\nu)}}. \quad (16)$$

На рис. 2 показана зависимость максимальной угловой скорости вращения круга от наружного радиуса, а на рис. 3 – от коэффициента сцепления. Из рисунков следует, что для абразивных кругов, изготовленных из рулонной заготовки, надежность сцепления компонентов заготовки оказывает непосредственное влияние на возможные эксплуатационные характеристики.

Для надежного сцепления витков рулонной заготовки требуется применение нетрадиционных способов радиального уплотнения. Как возможный вариант радиального уплотнения рулонной заготовки может быть способ уплотнения заготовки центробежными силами при вращении ее в центрифуге. Однако такой способ не обеспечит равномерного уплотнения по всему сечению заготовки, так как сжимающие радиальные напряжения будут снижаться вплоть до нуля от наруж-

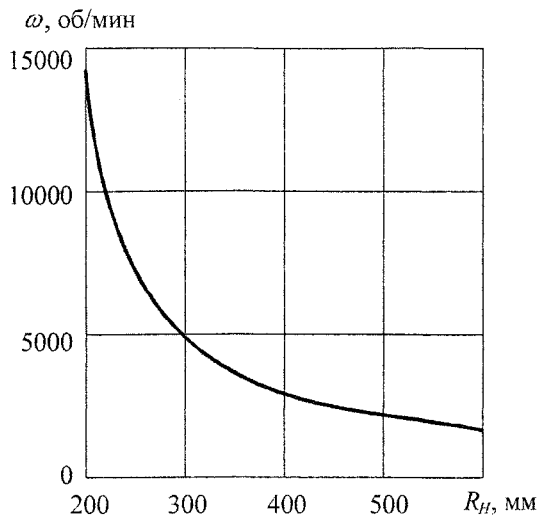


Рис. 2. Зависимость максимально-возможной угловой скорости от наружного радиуса диска ($k_c = 0,6$)

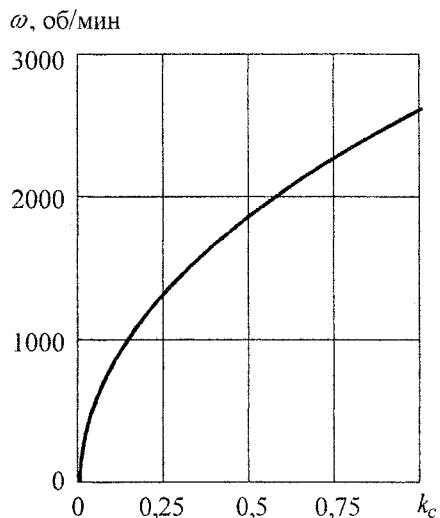


Рис. 3. Зависимость максимально-возможной угловой скорости от коэффициента сцепления ($R_n = 500 \text{ мм}$)

ного диаметра к внутреннему. Таким образом, решение проблемы надежного и однородного уплотнения рулонной заготовки требует применения нетрадиционных способов формования, одним из которых вероятно мог бы быть способ гидростатического прессования в эластичных оболочках.

Литература

1. Чаплыгин, Б.А. Получение высоких абразивных кругов на вулканитовой связке / Б.А. Чаплыгин // *Машины и технология обработки материалов давлением: сб. науч. трудов.* – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 1998. – С. 83–95.
2. Патент РФ № 2113975. Способ производства абразивного инструмента на вулканитовой связке / Л.А. Барков, В.И. Трусковский, В.Н. Дятлов и др. // *Опубл.* 30.10.98, Бюл. № 18.
3. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер; под ред. Г.С. Шапиро; пер. с англ. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 560 с.

Сведения об авторах

Ворона Владимир Викторович. Преподаватель кафедры «Технология машиностроения» Златоустовского филиала Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – обработка синусоидальных цилиндрических поверхностей.

Vladimir V. Vorona. Assistant professor of «Technology of machinery» department of Zlatoust of the South Ural State University. The area of scientific interests – machining sinusform cylindrical surfaces.

Гаврилов Константин Владимирович. Кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Автомобильный транспорт» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – гидродинамическая теория смазки, динамика подшипников скольжения.

Konstantin V. Gavrilov. The candidate of engineering science, senior teacher of «Motor transport» department of the South Urals State University. The area of scientific interests – hydrodynamic lubrication theory, sliding supports dynamics.

Дятлов Владимир Николаевич. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Машины и технологии обработки материалов давлением» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – производство абразивных материалов и технология изготовления инструмента из них.

Vladimir N. Dyatlov. The candidate of engineering science, senior lecturer of «Machines and Technologies of Handling Materials by Pressure» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – abrasive materials production and technology of manufacture of the instrument from them.

Захезин Альберт Михайлович. Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Теоретическая механика» Южно-Уральского государственного университета, член технических комитетов России по стандартизации «Виброакустическая диагностика», «Вибрация и удар», заведующий лабораторией «Вибродиагностика машин» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – вибродиагностика различных машин и сооружений, расчет вибронагруженности различных объектов.

Albert M. Zakhezin. The candidate of engineering science, ass. professor, ass. professor of the «Theoretical mechanics» department of the South Ural State University, member of Russia technical Committee of «Vibroacoustical diagnostic» and «Shock and Vibration», the head of «Vibrodiagnostic machine» Laboratory of the South Ural State University. The area of the scientific interests – the vibrodiagnostic of the different machine and construction, the different object vibroload account.

Ковнацкий Андрей Владимирович. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Основы проектирования машин» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – теория механизмов и машин.

Andrei V. Kovnatsky. The candidate of engineering science, senior lecturer of «Basic of Machine Design» department of the South Urals State University. The area of scientific interests – theory of machines and mechanisms.

Кондаков Сергей Владимирович. Кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры «Специальные и дорожно-строительные машины» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – теория движения, бесступенчатые передачи военных гусеничных машин.

Sergey V. Kondakov. The candidate of engineering science, the professor of «Special and road-building machines» department of the South Urals State University. The area of scientific interests – the theory of movement, power transfers of military caterpillar machines.

Мальшева Татьяна Васильевна. Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Теоретическая механика» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – вибродиагностика различных машин и сооружений, расчет вибронагруженности различных объектов.

Сведения об авторах

Tatiana V. Malysheva. The candidate of engineering science, ass. professor, ass. professor of the «Theoretical mechanics» department of the South Urals State University. The area of the scientific interests – the vibrodiagnostic of the different machine and construction, the different object vibroload account.

Марченко Сергей Васильевич. Заведующий лабораторией абразивного инструмента на вулканитовой связке ОАО «УралНИИАШ». Область научных интересов – производство абразивных материалов на вулканитовой связке и технология изготовления инструмента из них.

Sergey V. Marchenko. The head of laboratory abrasive materials on vulcanite base ОАО «Урал НИИАШ» The area of scientific interests – abrasive materials production on vulcanite base and technology of manufacture of the instrument from them.

Пожбелко Владимир Иванович. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Основы проектирования машин» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – теория механизмов и машин, вибротехника, динамическое моделирование в трибологии и биомеханике.

Vladimir I. Pozhbelko. The doctor of engineering science, professor, the head of «Basic of Machine Design» department of the South Urals State University. The area of scientific interests – theory of machines and mechanisms, vibrotechnics, tribology and biomechanics dynamic modeling.

Прокопьев Валерий Никифорович. Доктор технических наук, профессор, академик Российской академии транспорта, заведующий кафедрой «Автомобильный транспорт» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – динамика подшипников скольжения, трение, износ и смазка машин.

Valery N. Prokopiev. Doctor of engineering science, professor, the academician of the Russian academy of transport, the head of «Motor transport» department of the South Urals State University. The area of scientific interests – sliding supports dynamics, friction, wear, lubrication of machines.

Райт Вальтер Вильгельмович. Кандидат технических наук, заведующий лабораторией абразивного инструмента на бакелитовой связке ОАО «УралНИИАШ». Область научных интересов – производство абразивных материалов на бакелитовой связке и технология изготовления инструмента из них.

Valter V. Rait. The candidate of engineering science. The head of laboratory abrasive materials on bakelite base ОАО «Урал НИИАШ». The area of scientific interests – abrasive materials production on bakelite base and technology of manufacture of the instrument from them.

Тверской Михаил Михайлович. Доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации, заведующий кафедрой «Автоматизация механо-сборочного производства» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – автоматизация машиностроения, расчет и контроль массогеометрических характеристик изделий.

Mikhail M. Tverskoi. The doctor of engineering science, professor, the Honoured Scientist and Engineer of Russian Federation, head of «Mechano-Assembly Automation» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – automation of a machine industry, account and monitoring of mass-geometry characteristics of workpieces.

Телегин Александр Иванович. Доктор физико-математических наук, профессор, декан Электротехнического факультета Миасского филиала Южно-Уральского государственного университета, заведующий кафедрой «Системы управления и математическое моделирование». Область научных интересов – математическое моделирование управляемых систем.

Alexander I. Telegin. The doctor of physical-mathematical science, professor, the dean of the Electrotechnical faculty of the Miass branch of the South Ural State University, the head of «Control system and mathematical modeling» department. The area of scientific interests – mathematical modeling of the controllable systems.

Чаплыгин Александр Борисович. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Машины и технология обработки материалов давлением» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – обработка давлением порошковых композиционных материалов.

Alexander B. Chaplygin. The candidate of engineering science, senior lecturer of «Machines and Technologies of Handling Materials by Pressure» department of the South Ural State University. The area of scientific interest – handling of powdered composite materials by pressing.

Чернявский Александр Олегович. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная механика, динамика и прочность машин» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – механика твердого деформируемого тела: математические модели неупругого поведения малопластичных материалов и конструкций из них, трещины в термонагружаемых структурах, системы (сетки) взаимодействующих трещин в конструкциях.

Alexander O. Cherniavsky. The doctor of engineering science, professor, the head of «Applied mechanics, dynamics and strength of machines» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – mechanics of solids: mathematical modeling of stress-strain behavior and fracture of low-plastic materials, fracture mechanics, cracks in heat-stressed, crack systems (surface crack meshes).

Шагиахметов Алексей Ильясович. Старший преподаватель кафедры «Основы проектирования машин» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – теория механизмов и машин.

Aleksey I. Shagiahmetov. The senior teacher of «Basic of Machine Design» department of the South Urals State University. The area of scientific interests – theory of machines and mechanisms.

Шеркунов Виктор Георгиевич. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Машины и технология обработки материалов давлением» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – обработка сплошных и композиционных материалов прокаткой, прессованием и волочением.

Victor G. Sherkunov. The doctor of engineering science, professor, the head of «Machines and Technologies of Handling Materials by Pressure» department of the South Ural State University. The area of scientific interest – handling of solid and composite materials by rolling, pressing, dragging.

Шипилов Роман Дмитриевич. Аспирант кафедры «Прикладная механика, динамика и прочность машин» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – технология расчета напряженного деформированного состояния деталей.

Roman D. Shipilov. The post-graduate student of «Applied mechanics, dynamics and strength of machines» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – calculation methods of stress-strain mode.

Щуров Игорь Алексеевич. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Станки и инструмент» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – резьбообработка, обработка на станках с ЧПУ, расчет точности обработки и параметров инструментов на основе дискретного твердотельного (воксельного) моделирования.

Igor A. Schurov. The doctor of engineering science, professor, the head of «Machines and tools» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – machining of thread, CNC machining, account of accuracy of machining and tools parameters on the basis of discrete solid (voxel) models.

**ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

№ 11 (83) 2007

**Серия
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Выпуск 9**

Издательство Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 07.05.2007. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 9,30. Уч.-изд. л. 7,11. Тираж 500 экз. Заказ 128/36.

Отпечатано в типографии издательства ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.