

# ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

№ 15 (115)  
2008

---

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Выпуск 1

---

ПОСВЯЩАЕТСЯ  
65- ЛЕТИЮ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Редакционная коллегия

академик РАН Васильев С.Н., академик РАН Еремин И.И., к.ф.-м.н.,  
профессор Заляпин В.И., д.ф.-м.н., профессор Кадченко С.И., д.ф.-м.н.,  
профессор Кожанов А.И., д.ф.-м.н., профессор Лакеев А.В., к.ф.-м.н.  
Манакова Н.А. (*отв. секретарь*), д.ф.-м.н., профессор Менихес Л.Д., д.ф.-м.н.,  
профессор Свиридюк Г.А. (*отв. редактор*), д.ф.-м.н., профессор  
Соколинский Л.Б., д.ф.-м.н., профессор Танана В.П., д.ф.-м.н., профессор  
Ченцов А.Г., д.ф.-м.н., профессор Ширяев В.И.

## Содержание

ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Г.А. Свиридюк ..... 3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА

А.А. Баязитова ..... 4

УСТОЙЧИВЫЕ ЯВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов ..... 9

НАХОЖДЕНИЕ ОДНО-, ДВУХ- И ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА А.А. Гришкевич, L. Piątek, А. Бурмутаев . . . . .	12
НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ С.А. Загребина, Н.П. Соловьева . . . . .	23
О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ СОСТАВНОГО ТИПА А.И. Кожанов . . . . .	27
ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОМ ОПЕРАТОРЕ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ КВАЗИОКРЕСТНОСТЯХ И МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕТВИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ Р.Ю. Леонтьев . . . . .	37
МОДЕЛЬ ВАРИАНТОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ БАЗАМИ ДАННЫХ ДЛЯ ГРИД А.В. Лепихов . . . . .	42
ПРИМЕНЕНИЕ ДОПОЛНЕНИЙ ПАРСОСЧЕТАНИЯМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ MAX TSP А.В. Панюков, С.А. Тычинин . . . . .	54
О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ П.О. Пивоварова . . . . .	64
МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ ГРИД-ОБОЛОЧЕК СИСТЕМНОГО СЛОЯ В ТЕХНОЛОГИИ CAE/BEANS Г.И. Радченко . . . . .	69
О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В.П. Танана, А.И. Сидикова . . . . .	81
О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ В.Е. Федоров . . . . .	89
ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ Е.В. Шафранов . . . . .	100
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ А.С. Шипилов . . . . .	106
SUMMARIES . . . . .	111

## ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Глубокоуважаемый коллега,

Вы держите в руках первый номер Вестника ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование». Основоположники математического моделирования – А.Н. Тихонов и А.А. Самарский – понимали его как методологию, суть которой выражена в триаде «модель – алгоритм – программа». Причем, под «моделью» понималось уравнение или система уравнений, выведенных из законов природы, как, например, уравнение теплопроводности, полученное Ж.Б. Фурье, или система уравнений Навье – Стокса, описывающая динамику вязкой несжимаемой жидкости. И поскольку модель базируется на законах природы, то для ее верификации считалась достаточной хорошая согласованность с экспериментом.

Однако открытие в прошлом столетии новых математических объектов – странных аттракторов и солитонов – вновь, как это уже не раз бывало в истории, поставило математическую общественность перед необходимостью качественного исследования математических моделей. Ведь такое исследование не только подводит прочный фундамент под интуитивно ясные гипотезы о существовании и единственности решений или их устойчивости, но и позволяет выявить неочевидные свойства моделей, неявно влияющие как на создание алгоритма, так и на конструирование программного продукта. Именно качественное изучение модели Чернобыльской катастрофы позволило группе математиков и механиков под руководством Н.Н. Моисеева прийти к неутешительному выводу о возможности второго взрыва. И когда этот взрыв все-таки произошел, его последствия удалось своевременно локализовать.

Программирование как область знания, занимающаяся алгоритмами и программами, в глазах создателя и исследователя моделей до недавнего времени выглядела скорее как технология, чем как наука. Работа по подбору нужного алгоритма или по его конструированию из имеющихся, а затем трансляции полученного в программный продукт была хоть и творческой, но очень рутинной. Эту ситуацию взорвало появление многоядерных процессоров, способных пока что в разы, а в перспективе – на порядки увеличивать скорость вычислений. В связи с этим возникла необходимость не только ревизии прикладных аспектов программирования, но и пересмотра основ. Сейчас программирование, как и полвека, как и четверть века назад, опять находится в состоянии науки, пока еще не получившей своих основных результатов; и математическое сообщество очень заинтересовано в том, чтобы на своем новом этапе развития программирование было ориентировано прежде всего на математическое моделирование.

Таким образом, основной целью создания новой серии Вестника ЮУрГУ является пропаганда союза качественных и количественных исследований математических моделей, и я от лица всей редколлегии приглашаю к сотрудничеству всех заинтересованных лиц.

*Г.А. Свиридюк*

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА

А.А. Баязитова

Уравнение Хоффа описывает динамику выпучивания двутавровой балки. Впервые рассмотрена обратная коэффициентная задача, моделирующая эксперимент, в результате которого при дополнительных измерениях изучается не только динамика выпучивания, но и свойства материала балки. Показано существование единственного решения этой задачи.

**Ключевые слова:** уравнение Хоффа, фазовое пространство, обратная задача

## Введение

Уравнение Хоффа

$$\lambda u_t + u_{txx} = \alpha u + \beta u^3 \quad (1)$$

моделирует выпучивание двутавровой балки при постоянной нагрузке. Уравнение (1) изучалось на разных множествах и в различных аспектах (см. [1 – 5] и библиографию там). Однако, несмотря на различие аспектов во всех цитированных работах, подход к исследованию уравнения (1) одинаков. Уравнение (1) редуцируется к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \quad (2)$$

где  $L$  и  $M$  – линейные, а  $N$  – ,вообще говоря, нелинейный операторы, действующие из пространства  $\mathcal{U}$  в пространство  $\mathcal{F}$ . Пространства  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{F}$  обычно банаховы и подбираются таким образом, чтобы купировать те или иные краевые [1 – 4] или какие-нибудь другие [5] условия. Причем, параметры  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , характеризующие свойства материала балки, и  $\lambda \in \mathbb{R}$ , характеризующий нагрузку, предполагаются известными.

Между тем, физически осмысленной является задача нахождения не только решения уравнения (1), но и параметров  $\alpha, \beta$  для того, чтобы узнать различия между имеющимся материалом балки и предполагаемым. Такие задачи относятся к обратным или некорректным задачам, теория и приложения которых в настоящее время достаточно полно разработаны (см. [6 – 8] и библиографию там). Однако исследование обратных задач для уравнений соболевского типа находится сейчас в начальной стадии [9], [10], причем по традиции первыми изучаются линейные задачи. Статья содержит первое исследование коэффициентной обратной задачи для полулинейного уравнения соболевского типа. Основное содержание статьи состоит из двух частей, в первой находится постановка прямой задачи и относящиеся к ней результаты, почерпнутые из [2]; а во второй – постановка и рассмотрение обратной задачи.

## 1. Прямая задача

В полосе  $(0, l) \times \mathbb{R}$  ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

и начальному

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, l) \quad (4)$$

условиям. Сначала необходимо задачу (1), (3) редуцировать к уравнению (2). Для этого, следуя [2], введем в рассмотрение пространства  $\mathcal{U} = W_2^1$  и  $\mathcal{F} = W_2^{-1}$  (здесь и далее все функциональные пространства определены на интервале  $(0, l)$ ) и зададим операторы

$$\langle Lu, v \rangle = \int_0^l (\lambda uv - u_x v_x) dx, \quad \langle Mu, v \rangle = \alpha \int_0^l uv dx,$$

$$\langle N(u), v \rangle = \beta \int_0^l u^3 v dx \quad \forall u, v \in W_2^1,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в смысле  $L_2$ . Операторы  $L, M \in \mathfrak{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , а  $N \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ . По построению оператор  $L$  фредгольмов (т.е.  $\text{ind } L = 0$ ), а оператор  $M$   $(L, 0)$ -ограничен. Кроме того, спектр  $\sigma(L) = \{\lambda_k : \lambda_k = \lambda - (\frac{\pi k}{l})^2, k = 1, 2, \dots\}$  оператора  $L$  вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке  $-\infty$ . Таким образом, редукция задачи (1), (3) – (4) к задаче

$$u(0) = u_0 \tag{5}$$

для уравнения (2) закончена. Вектор-функцию  $u \in C^1((-\tau, \tau); \mathcal{U})$ , удовлетворяющую уравнению (2) при некотором  $\tau \in \mathbb{R}_+$  назовем решением этого уравнения, а если решение вдобавок удовлетворяет условию (5), то будем называть его решением задачи (2), (5). Если  $\ker L = \{0\}$ , то уравнение (2) тривиально редуцируется к эквивалентному ему уравнению

$$\dot{u} = F(u), \tag{6}$$

где оператор  $F = L^{-1}(M + N) \in C^\infty(\mathcal{U})$  по построению. Существование единственного локального решения  $u \in C^\infty((-\tau, \tau); \mathcal{U})$  задачи (2), (5) при любом  $u_0 \in \mathcal{U}$  – результат классической теоремы Коши. Другое дело, если  $\ker L \neq \{0\}$ . В этом случае полезным оказывается следующее понятие.

**Определение 1.** Множество  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{U}$  называется фазовым пространством уравнения (2), если

- (i) любое решение  $u = u(t)$  уравнения (2) лежит в  $\mathfrak{F}$  как траектория, т.е.  $u(t) \in \mathfrak{F}$  при всех  $t \in (-\tau, \tau)$ ;
- (ii) при любом  $u_0 \in \mathfrak{F}$  существует единственное решение задачи (2), (5).

**Теорема 1.** ([2]). Пусть

- (i)  $\lambda \neq (\frac{\pi k}{l})^2$ . Тогда фазовым пространством уравнения (1) служит все пространство  $\mathcal{U}$ .
- (ii)  $\lambda = (\frac{\pi k}{l})^2$ , ненулевые коэффициенты  $\alpha, \beta$  удовлетворяют соотношению  $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ . Тогда фазовым пространством уравнения (1) служит простое многообразие  $\mathfrak{M} = \{u \in \mathcal{U} : \langle \alpha u + \beta u^3, \chi_k \rangle = 0\}$ , где через  $\{\chi_k\}$  обозначены ортонормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\{\lambda_k\}$  оператора  $L$ .

## 2. Обратная задача

Для уравнений (1) рассмотрим обратную задачу (3) – (4) с дополнительными условиями

$$(\lambda + \Delta)u_t(x_1, 0) = \varphi, \quad x_1 \in (0, l) \quad (7)$$

$$(\lambda + \Delta)u_t(x_2, 0) = \psi, \quad x_2 \in (0, l). \quad (8)$$

Здесь  $\varphi, \psi$  показывают изменение скорости в точках  $x_1$  и  $x_2$  балки в начальный промежуток времени. Подставляя правую часть уравнения (1) при  $t = 0$  в (7), (8), получаем системы уравнений относительно  $\alpha, \beta$

$$\begin{cases} \alpha u_0(x_1) + \beta u_0^3(x_1) = \varphi \\ \alpha u_0(x_2) + \beta u_0^3(x_2) = \psi. \end{cases} \quad (9)$$

Для систем уравнений (9) воспользуемся правилом Крамера

(i) Если  $\Delta = u_0(x_1)u_0^3(x_2) - u_0(x_2)u_0^3(x_1) \neq 0$ , то существует единственное решение  $\alpha, \beta$  каждой из систем уравнений (9), причем

$$\alpha = \frac{\varphi u_0^3(x_2) - \psi u_0^3(x_1)}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\psi u_0(x_1) - \varphi u_0(x_2)}{\Delta}; \quad (10)$$

(ii) Если  $\Delta = 0, \varphi = \psi = 0$ , то существует бесконечно много пар решений  $\alpha, \beta$ ; если же  $\varphi$  или  $\psi \neq 0$ , то решения не существует.

Нас интересует случай, когда  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , поэтому дополнительно предполагаем  $\varphi u_0^3(x_2) \neq \psi u_0^3(x_1)$  и  $\varphi u_0(x_2) \neq \psi u_0(x_1)$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\lambda \neq (\frac{\pi k}{l})^2$ . Тогда при любых  $u_0 \in \mathcal{U}$ ,  $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$  таких, что  $u_0(x_1) \neq 0, u_0(x_2) \neq 0, u_0(x_1) \neq \pm u_0(x_2), \varphi u_0^3(x_2) \neq \psi u_0^3(x_1)$  и  $\varphi u_0(x_2) \neq \psi u_0(x_1)$  существует единственное решение обратной задачи (1), (3) – (4), (7) – (8).

*Доказательство.* В силу условий  $u_0(x_1) \neq 0, u_0(x_2) \neq 0$  и  $u_0(x_1) \neq \pm u_0(x_2)$  определитель системы  $\Delta = u_0(x_1)u_0(x_2)(u_0(x_2) - u_0(x_1))(u_0(x_2) + u_0(x_1))$  не равен нулю, а при  $\varphi u_0^3(x_2) \neq \psi u_0^3(x_1)$  и  $\varphi u_0(x_2) \neq \psi u_0(x_1)$  коэффициенты  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , поэтому в силу теоремы 1 решение обратной задачи существует и единственно для любых  $u_0 \in \mathcal{U}$ .  $\square$

Рассмотрим теперь случай нетривиального ядра  $\ker L$ . Для выполнения условий теоремы 1 необходимо, чтобы решения систем (9) были все одного знака. Из (10) следует, что для того, чтобы  $\alpha, \beta > 0$ , должно быть выполнено

$$\begin{cases} \varphi u_0^3(x_2) - \psi u_0^3(x_1) > 0 \\ \psi u_0(x_1) - \varphi u_0(x_2) > 0 \\ u_0(x_1)u_0^3(x_2) - u_0(x_2)u_0^3(x_1) > 0 \end{cases} \quad (11)$$

или

$$\begin{cases} \varphi u_0^3(x_2) - \psi u_0^3(x_1) < 0 \\ \psi u_0(x_1) - \varphi u_0(x_2) < 0 \\ u_0(x_1)u_0^3(x_2) - u_0(x_2)u_0^3(x_1) < 0, \end{cases} \quad (12)$$

а для того, чтобы  $\alpha, \beta < 0$

$$\begin{cases} \varphi u_0^3(x_2) - \psi u_0^3(x_1) > 0 \\ \psi u_0(x_1) - \varphi u_0(x_2) > 0 \\ u_0(x_1)u_0^3(x_2) - u_0(x_2)u_0^3(x_1) < 0 \end{cases} \quad (13)$$

или

$$\begin{cases} \varphi u_0^3(x_2) - \psi u_0^3(x_1) < 0 \\ \psi u_0(x_1) - \varphi u_0(x_2) < 0 \\ u_0(x_1)u_0^3(x_2) - u_0(x_2)u_0^3(x_1) > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Обозначим через  $\mathfrak{D}^+$  область допустимых значений  $\varphi, \psi$ , при которых  $\alpha > 0, \beta > 0$  (т.е. всегда верна одна из систем неравенств (11) или (12)), а через  $\mathfrak{D}^-$  область допустимых значений  $\varphi, \psi$ , при которых  $\alpha < 0, \beta < 0$  (т.е. всегда верна одна из систем неравенств (13) или (14)). Введем множества

$$\mathfrak{A}^1 = \begin{cases} 0 < u_0(x_1) < u_0(x_2) \\ 0 < -u_0(x_2) < u_0(x_1) \\ u_0(x_1) < u_0(x_2) < 0 \\ 0 < -u_0(x_1) < u_0(x_2) \end{cases}$$

и

$$\mathfrak{A}^2 = \begin{cases} 0 < u_0(x_2) < -u_0(x_1) \\ u_0(x_2) < u_0(x_1) < 0 \\ 0 < u_0(x_2) < u_0(x_1) \\ 0 < u_0(x_1) < -u_0(x_2). \end{cases}$$

Оказывается, что

$$\mathfrak{D}^+ = \begin{cases} \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi < \psi < \left(\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\right)^3\varphi, \text{ если } u_0(x_1), u_0(x_2) \in \mathfrak{A}^1 \\ \left(\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\right)^3\varphi < \psi < \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi, \text{ если } u_0(x_1), u_0(x_2) \in \mathfrak{A}^2, \end{cases} \quad (15)$$

а

$$\mathfrak{D}^- = \begin{cases} \left(\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\right)^3\varphi < \psi < \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi, \text{ если } u_0(x_1), u_0(x_2) \in \mathfrak{A}^1 \\ \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi < \psi < \left(\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\right)^3\varphi, \text{ если } u_0(x_1), u_0(x_2) \in \mathfrak{A}^2. \end{cases} \quad (16)$$

Для примера найдем области допустимых значений  $\varphi$  и  $\psi$ , при которых решения  $\alpha, \beta > 0$  в случае  $\Delta > 0$ , то есть разрешим систему (11). В зависимости от знаков  $u_0(x_1)$  и  $u_0(x_2)$  возможны четыре случая:

- (i) Пусть  $u_0(x_1) > 0, u_0(x_2) > 0$ . Тогда  $u_0(x_1) + u_0(x_2) > 0$  и, для того, чтобы выполнялось  $\Delta > 0$  необходимо  $u_0(x_2) - u_0(x_1) > 0$ , то есть получился случай  $0 < u_0(x_1) < u_0(x_2)$ . В этом случае система (11) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi < \psi < \frac{u_0^3(x_2)}{u_0^3(x_1)}\varphi.$$

- (ii) Пусть  $u_0(x_1) > 0, u_0(x_2) < 0$ . Тогда  $u_0(x_2) - u_0(x_1) < 0$  и, для того, чтобы выполнялось  $\Delta > 0$  необходимо  $u_0(x_2) + u_0(x_1) > 0$ , то есть получился случай  $0 < -u_0(x_2) < u_0(x_1)$ . В этом случае система (11) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi < \psi < \frac{u_0^3(x_2)}{u_0^3(x_1)}\varphi.$$

- (iii) Пусть  $u_0(x_1) < 0, u_0(x_2) > 0$ . Тогда  $u_0(x_2) - u_0(x_1) > 0$  и, для того, чтобы выполнялось  $\Delta > 0$ , необходимо  $u_0(x_2) + u_0(x_1) < 0$ , то есть получился случай  $0 < u_0(x_2) < -u_0(x_1)$ . В этом случае система (11) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_0^3(x_2)}{u_0^3(x_1)}\varphi < \psi < \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi.$$

- (iv) Пусть  $u(x_1) < 0$ ,  $u(x_2) < 0$ . Тогда  $u(x_1) + u(x_2) < 0$  и для того, чтобы выполнялось  $\Delta > 0$ , необходимо  $u(x_2) - u(x_1) < 0$ , то есть получился случай  $0 < -u(x_1) < -u(x_2)$ . В этом случае система (11) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_0^3(x_2)}{u_0^3(x_1)}\varphi < \psi < \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi.$$

Аналогично разрешаются системы (12) – (14).

Пусть  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^+ \cup \mathfrak{D}^-$ . Из всего вышесказанного следует

### Теорема 2.

- (i) Пусть  $\lambda \neq (\frac{\pi k}{l})^2$ . Тогда при любых  $u_0 \in \mathfrak{U}$ ,  $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$  таких, что  $u_0(0) \neq 0$ ,  $u_0(l) \neq 0$ ,  $u_0(0) \neq \pm u_0(l)$ ,  $\varphi u_0^3(l) \neq \psi u_0^3(0)$  и  $\varphi u_0(l) \neq \psi u_0(0)$  существует единственное решение обратной задачи (1), (3) – (4), (6) – (7).
- (ii) Пусть  $\lambda = (\frac{\pi k}{l})^2$ . Тогда при любых  $u_0 \in \mathfrak{U}$ ,  $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}$  таких, что  $u_0(0) \neq 0$ ,  $u_0(l) \neq 0$ ,  $u_0(0) \neq \pm u_0(l)$  и  $\langle (\varphi u_0^3(l) - \psi u_0^3(0))u_0 + (\psi u_0(0) - \varphi u_0(l))u_0^3, \chi_k \rangle \geq 0$  существует единственное решение  $u \in \mathfrak{U}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$  обратной задачи (1), (3) – (4), (7) – (8).

### Литература

1. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. «Математика». – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192 – 207.
2. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292 – 297.
3. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринева // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54 – 60.
4. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т.42, № 1. – С.126 – 131.
5. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филингов. – М.: Наука, 1995.
6. Романов, В.Г. Устойчивость в обратных задачах / В.Г. Романов. – М.: Науч. мир, 2005.
7. Fedorov, V.E. An inverse problem for linear Sobolev type equations / V.E. Fedorov, A.V. Urazaeva // J. Inv. Ill - Posed Problems. – 2004. – V. 12, № 5. – P. 1 – 9.
8. Свиридюк, Г.А. Обратная задача для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения, посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа». – Новосибирск, 2007. – С. 244 – 250.

Кафедра уравнений математической физики,  
Южно-Уральский государственный университет  
alfiya@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 10 марта 2008 г.



# УСТОЙЧИВЫЕ ЯВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Маширабов*

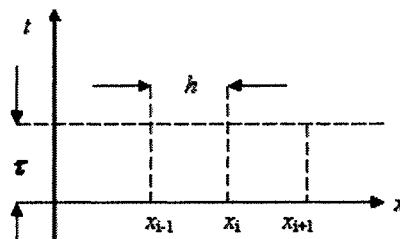
Предлагается численный метод интегрирования уравнения теплопроводности, основанный на комбинации явной и неявной схемы с использованием линейных дифференциальных уравнений первого порядка (обыкновенных или с частными производными – в зависимости от наличия в исходном уравнении производных первого порядка по пространственным переменным).

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, устойчивый, явная схема, дифференциальное уравнение первого порядка.

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Обозначим через  $\tau$  шаг по переменной  $t$ , через  $h$  – шаг по переменной  $x$ . Через  $u_{i-1}, u_i, u_{i+1}$  обозначим значения функции  $u$  при  $t = t_0$  (на оси  $x$ ) в точках  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ , через  $\bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}$  обозначим значения функции  $u$  при  $t = t_0 + \tau$  в тех же точках (см. рисунок). Зная значения  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) нам надо вычислить значения  $\bar{u}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).



Коэффициенты уравнения (1) и обозначения приведены к безразмерному виду.

Явная схема выглядит так [1, 2]:

$$\bar{u}_i = u_i + \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \tau. \quad (2)$$

Расчетная схема

(Значения  $\bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}$  уже вычислены).

Неявная схема выглядит так [1, 2]:

$$\bar{u}_i \left( 1 + \frac{2}{h^2} \tau \right) - \frac{\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_{i+1}}{h^2} \tau = u_i. \quad (3)$$

Это приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений с так называемой трехдиагональной матрицей. Для одномерного уравнения эта схема предпочтительна, ибо явная схема неустойчива при  $\tau > h^2/2$ , в то время как неявная схема устойчива при всех значениях  $\tau$ .

Однако в многомерных случаях неявная схема оказывается не столь удобной. Имея в виду дальнейшие применения численных методов к многомерному уравнению, запишем такую схему

$$\frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{2}{h^2} \bar{u}_i = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{h^2} \quad (4)$$

и перейдем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ . Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} + \frac{2}{h^2}\bar{u}_i = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{h^2}. \quad (5)$$

Его решение

$$\bar{u}_i = u_i \cdot q + (1 - q) \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{2}, \quad (6)$$

где  $q = \exp(-2\tau/h^2) < 1$ .

С одной стороны, полученная схема явная ( $\bar{u}_i$  определяется по значениям  $u_i$  на предыдущем временном слое в соседних узлах), с другой стороны, эта схема абсолютно устойчива. Действительно, полагая

$$\bar{u}_i = \lambda u_i e^{j - \nu\varphi} \quad (j - \text{мнимая единица}),$$

получаем  $\lambda = q + (1 - q) \cos(i\varphi) < 1$ .

Это означает, что значения  $\bar{u}_i$  убывают со скоростью геометрической прогрессии.

Если в формуле (6) разложить  $\exp(-2\tau/h^2)$  в ряд Тейлора и удержать первые два члена  $\exp(-2\tau/h^2) \approx 1 - 2\tau/h^2$ , то получим обычную явную схему (2). Если  $2\tau/h^2 > 1$ , то схема неустойчива.

Теперь рассмотрим уравнение теплопроводности для двумерного случая в полярной системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (7)$$

Обозначим  $h$  – шаг по переменной  $r$ ,  $\tau$  – шаг по переменной  $t$ ,  $\alpha$  – шаг по переменной  $\varphi$ .

Явная схема выглядит так

$$\bar{u}_{ik} = u_{ik} + \left( \frac{2r_i + h}{2r_i} u_{i+1,k} + \frac{2r_i - h}{2r_i} u_{i-1,k} - 2u_{ik} \right) \frac{\tau}{h^2} + \left( \frac{u_{i,k-1} + u_{i,k+1}}{r_i^2} - \frac{2u_{ik}}{r_i^2} \right) \frac{\tau}{\alpha^2}. \quad (8)$$

Здесь  $i$  – номер узла сетки по  $r$ ,  $k$  – номер узла сетки по  $\varphi$ . Повторяя процедуру перемещения  $u_{ik}$  в  $\bar{u}_{ik}$ , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{u}_{ik}}{dt} + \left( \frac{2}{h^2} + \frac{2}{(r_i \cdot \alpha)^2} \right) \bar{u}_{ik} = f_{ik}, \quad (9)$$

где

$$f_{ik} = \left( \frac{2r_i + h}{2r_i} u_{i+1,k} + \frac{2r_i - h}{2r_i} u_{i-1,k} \right) \frac{1}{h^2} + \frac{u_{i,k-1} + u_{i,k+1}}{(r_i \alpha)^2}. \quad (10)$$

Обозначим

$$\mu = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{(r_i \alpha)^2}. \quad (11)$$

Получаем решение

$$\bar{u}_{ik} = u_{ik} e^{-\mu\tau} + (1 - e^{-\mu\tau}) \frac{f_{ik}}{\mu}, \quad (12)$$

т.е. опять возникает устойчивая явная схема.

Однако во многих случаях приходится рассматривать вращающуюся систему координат с постоянной угловой скоростью  $\omega$  [3].

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \omega \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (13)$$

В этом случае для устойчивости схемы приходим к линейному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_{ik} - \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{u}_{ik} + \mu \bar{u}_{ik} = f_{ik}. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что для каждого значения  $r$  правая часть  $f_{ik}$  является функцией (разумеется, известной) аргумента  $\varphi$ .

Решение (явная схема) выглядит так:

$$\bar{u}_{ik} = u(\varphi + \omega\tau)e^{-\mu\tau} + \int_0^\tau e^{-\mu\varphi} f(\varphi + \omega s) d\varphi. \quad (15)$$

Имеется в виду, что  $u(\varphi + \omega\tau)$  означают узлы  $(i, k)$  сетки, при которых  $u_{ik} = u(\varphi + \omega\tau)$ , т.е. значение  $\varphi + \omega\tau$  попадает в узел  $(i, k)$ .

Аналогичный смысл имеет выражение  $f(\varphi + \omega s)$ .

Таким образом, выражение (15) задает явную устойчивую схему для уравнения теплопроводности во вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  полярной системе координат; интеграл в правой части (15) предполагает численное интегрирование заданных в узлах сетки функции.

## Литература

1. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989.
2. Годунов, С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1977.
3. Геренштейн, А.В. Расчет температурных полей в цилиндре при действии поверхностных тепловых источников «Тепло 4.0» / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов, Е.А. Геренштейн / Государственная регистрация в Отраслевом фонде алгоритмов и программ. – М.: ФГ-НУ ГКЦИТ, 2008. – № 9776, 20.02.2008.

Кафедра прикладной математики,  
Южно-Уральский государственный университет

*Поступила в редакцию 21 марта 2008 г.*

# НАХОЖДЕНИЕ ОДНО-, ДВУХ- И ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА

*А.А. Гришкевич, Е. Ригтек, А. Бурмутаев*

На основе оригинальной процедуры нахождения всех минимальных разрезов графа предложен эффективный метод перечисления одно-, двух- и трехэлементных разрезов, т.е. метод перечисления разрезов, не являющихся минимальными.

**Ключевые слова:** *граф, минимальный разрез, квазимиимальный разрез, неразложимый разрез, дистрибутивная решетка, алгоритм*

## Введение

При моделировании структур сложных систем важная роль принадлежит таким комбинаторным конструкциям, как разрезы [1–4]. Если каждому разрезу поставить в соответствие некоторое число, например, количество содержащихся в разрезе элементов, то может быть выделено подмножество разрезов, содержащих минимальное число элементов, т.е. подмножество минимальных разрезов. Важными для практики и интересными для исследования с теоретической точки зрения являются как минимальные разрезы графов, разделяющих две выделенные вершины графа [5, 6], так и разрезы, близкие к минимальным (квазимиимальные разрезы) [7, 8], в частности, одно-, двух- и трехэлементные разрезы [9, 10].

Являясь по сути промежуточным, этап определения разрезов при моделировании структур остается одним из самых трудоемких, и поэтому предъявляет особо высокие требования к эффективности используемых алгоритмов. В [10] отмечается, что «вся оптимизационная часть, заключающаяся в возможном сокращении времени расчетов, сводится к сокращению количества сочетаний элементов, при исключении которых схема подвергается проверке на связность».

Исследование теоретико-порядковых свойств минимальных разрезов позволило выявить структуру дистрибутивной решетки [11]. Рассмотрение дистрибутивной решетки минимальных разрезов дало принципиально новый подход к задаче перечисления множества минимальных разрезов, результатом чего явилась разработка оригинального эффективного комбинаторного алгоритма поиска минимальных разрезов. Созданный алгоритм явился основой для построения алгоритмов перечисления разрезов, близких к минимальным, в частности, перечисления одно-, двух и трехэлементных разрезов.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$  – ориентированный граф, где  $\mathcal{V} = \{v\}$  – множество вершин графа,  $\mathcal{U} = \{u = (i, j) : i \in \mathcal{V}, j \in \mathcal{V}\}$  – множество ориентированных дуг графа.

В графе  $\mathcal{G}$  выделим две вершины – источник  $s$  и сток  $t$  ( $s, t \in \mathcal{V}$ ,  $s \neq t$ ). Пусть  $A, B$  ( $A \cap B = \emptyset$ ) некоторые подмножества множества вершин. Обозначим

$$(A, B) = \{(i, j) : (i, j) \in \mathcal{U}, i \in A, j \in B\}$$

множество ориентированных дуг, ведущих из  $i \in A$  в  $j \in B$ . Дополнительно предположим, что, во-первых, между любыми двумя вершинами  $i, j \in \mathcal{V}$  имеется не более одной ориентированной дуги  $(i, j) \in \mathcal{U}$  и одной ориентированной дуги  $(j, i) \in \mathcal{U}$ , и, во-вторых, отсутствуют петли (т.е. дуги вида  $(i, i) \notin \mathcal{U}$ ).

Разрезом [3], разделяющим вершины  $s, t$  графа  $\mathcal{G}$ , называется множество дуг  $r = (R, \bar{R}) \subseteq \mathcal{U}$ , где  $R \cap \bar{R} = \emptyset$ ,  $R \cup \bar{R} = \mathcal{V}$ ,  $s \in R$ ,  $t \in \bar{R}$ . Множество всех таких разрезов обозначим посредством  $\mathcal{R}$ .

Каждому ребру  $u \in \mathcal{U}$  графа  $\mathcal{G}$  поставим в соответствие неотрицательное число  $c(u) \geq 0$ , которое назовем весом (пропускной способностью) ребра. Пропускную способность (вес) разреза  $r \in \mathcal{R}$  определим при помощи

$$c(r) = c(R, \bar{R}) = \sum_{u \in (R, \bar{R})} c(u).$$

Под одно-, двух- и трехэлементными разрезами графа  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$  будем понимать соответственно разрезы веса один, два и три в случае, когда  $c(u) = 1$  для всех  $u \in \mathcal{U}$ . Такое название оправдано тем, что одноэлементные (двухэлементные, трехэлементные) разрезы состоят из одного (двух, трех) элементов (дуг графа). Множества одно-, двух- и трехэлементных разрезов обозначим  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  соответственно. Задача заключается в перечислении всех элементов указанных множеств.

## 2. Дистрибутивная решетка минимальных разрезов

В множестве разрезов  $\mathcal{R}$  графа  $\mathcal{G}$  относительно функции веса  $c$  может быть выделено подмножество минимальных разрезов (разрезов минимального веса)

$$\mathcal{M}_{\min, c} = \{m : m = \arg \min_{r \in \mathcal{R}} c(r)\}.$$

На множестве  $\mathcal{M}_{\min, c}$  определяются бинарные операции  $\vee, \wedge$ . Для любых  $m_i = (M_i, \bar{M}_i) \in \mathcal{M}_{\min, c}$ ,  $i = 1, 2$ , положим

$$m_1 \vee m_2 = (M_1 \cup M_2, \overline{M_1 \cup M_2}), \quad m_1 \wedge m_2 = (M_1 \cap M_2, \overline{M_1 \cap M_2}).$$

Множество минимальных разрезов  $\mathcal{M}_{\min, c}$  с введенными на нем операциями  $\vee, \wedge$  является дистрибутивной [12, 13] решеткой  $\langle \mathcal{M}_{\min, c}; \vee, \wedge \rangle$  [11].

Минимальный разрез  $p \in \mathcal{M}_{\min, c}$  дистрибутивной решетки называется неприводимым ( $\vee$ -неприводимым) [11], если для любых  $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_{\min, c}$  из соотношения  $p = m_1 \vee m_2$  вытекает  $p = m_1$  или  $p = m_2$ . Обозначим через  $\mathcal{P}_c = \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\min, c}}$  множество неприводимых разрезов решетки  $\langle \mathcal{M}_{\min, c}; \vee, \wedge \rangle$ . Очевидно, что  $\mathcal{P}_c$  является частично упорядоченным множеством как подмножество частично упорядоченного множества  $\mathcal{M}_{\min, c}$ .

В дистрибутивной решетке множество минимальных разрезов графа может быть аналитически описано [11],

$$\mathcal{M}_{\min, c} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_c)} \bigvee_{a \in A} a,$$

где  $\mathcal{A}(\mathcal{P}_c)$  – множество антицепей  $A$  частично упорядоченного множества  $\mathcal{P}_c$ .

Указанное представление служит основой нового декомпозиционного подхода к перечислению минимальных разрезов графа, состоящего, во-первых, из поиска только неприводимых минимальных разрезов в графе, и, во-вторых, из синтеза всего множества минимальных разрезов по частично упорядоченному подмножеству неприводимых разрезов в дистрибутивной решетке минимальных разрезов. Предлагаемый подход позволяет сократить поиск в

графе (число проверок графа на связность) за счет выделения только подмножества неприводимых минимальных разрезов.

Ниже рассматривается построение алгоритма перечисления одно-, двух- и трехэлементных минимальных разрезов графа.

### 3. Алгоритм поиска $k$ -элементных разрезов графа

Рассмотрим алгоритм

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \mathcal{S}; k; \mathcal{M}_k; R_1^k, R_2^k, \dots, R_k^k)$$

перечисления множества  $k$ -элементных ( $k = 1, 2, 3$ ) реберных разрезов  $\mathcal{M}_k$ , разделяющих вершины  $s$  и  $t$  ( $s, t \in \mathcal{V}$ ,  $s \neq t$ ) ориентированного графа  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$  и минимальных относительно функции веса  $c_{\mathcal{S}}(u)$  ( $c_{\mathcal{S}}(u) = \infty$ , если  $u \in \mathcal{S}$ ,  $c_{\mathcal{S}}(u) = 1$ , если  $u \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$ ).

*Входные данные:*  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ ;  $s, t$ ;  $\mathcal{S}$ ;  $k$ . Множество  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$  есть подмножество дуг графа, на вхождение которых в разрезы наложен запрет;  $k$  - число элементов (дуг графа) в разрезе.

*Выходные данные:*  $\mathcal{M}_k$ ;  $R_1^k, R_2^k, \dots, R_k^k$ . Множество  $\mathcal{M}_k$  содержит  $k$ -элементные разрезы графа  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$  между вершинами  $s$  и  $t$ , минимальные относительно функции веса  $c_{\mathcal{S}}(u)$ . Если таких разрезов не существует, то  $\mathcal{M}_k = \emptyset$ .  $R_1^k, R_2^k, \dots, R_k^k$  - вспомогательные множества.

*Промежуточные переменные:*  $M$ ;  $f(u)$ ,  $c(f)$ ;  $c_{\mathcal{S}}(u)$ ,  $\delta(u)$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ;  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k$ .  $M$  - множество помеченных вершин в методе пометок Форда - Фалкерсона [5, 6];  $f$  - поток из  $s$  в  $t$  в форме узлы-дуги [6];  $c(f)$  - величина потока  $f$ ;  $c_{\mathcal{S}}(u)$  - вес (пропускная способность) ребра;  $\delta(u)$  - текущее значение пропускной способности ребра  $u$ ;  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{M}_k$  - представление частично упорядоченного множества неприводимых минимальных разрезов  $\mathcal{P}$  в виде объединения линейно упорядоченных множеств  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**Алгоритм поиска одноэлементных минимальных реберных разрезов**  $KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \emptyset; 1; \mathcal{M}_1; R_1^1)$ . Множество минимальных одноэлементных разрезов  $\mathcal{M}_1$  может трактоваться как множество разрезов минимального веса (веса один), разделяющих вершины  $s$  и  $t$  во взвешенном графе  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$  с заданной функцией веса  $c(u) = 1 = c_{\emptyset}(u)$  для всех  $u \in \mathcal{U}$ .

*Шаг 1.* Положить  $\mathcal{M}_1 := \emptyset$ ,  $R_1^1 := \emptyset$ . Для всех  $u \in \mathcal{U}$  положить  $\delta(u) = c_{\mathcal{S}}(u)$ ,  $f(u) := 0$ .

*Шаг 2.* Применить метод пометок [5, 6]. Если  $t \notin M$ , то искомого разреза не существует. Return. Иначе увеличить величину потока на единицу.

*Шаг 3.* Применить метод пометок [5, 6]. Если  $t \in M$ , то Return. Иначе получаем одноэлементный разрез  $m = (M, \bar{M})$ .

*Шаг 4.* Запомнить одноэлементный разрез  $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1 \cup m$ . Для  $e = (M, \bar{M})$  положить  $\delta(e) := \infty$ ,  $R_1^1 := R_1^1 \cup e$ . Перейти к шагу 3.

В данном случае  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{P}$ , и свойство дистрибутивности не используется. Предложенный алгоритм выделения множества одноэлементных разрезов ориентированного графа  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$  имеет временную сложность  $O(|\mathcal{U}|)$ .

**Алгоритм поиска двухэлементных минимальных реберных разрезов**  $KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \emptyset; 2; \mathcal{M}_2; R_1^2, R_2^2)$ . Множество минимальных двухэлементных разрезов  $\mathcal{M}_2$  может трактоваться как множество разрезов минимального веса (веса два), разделяющих вершины  $s$  и  $t$  во взвешенном графе  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$  с заданной функцией веса  $c(u) = 1 = c_{\emptyset}(u)$  для всех  $u \in \mathcal{U}$  при отсутствии разрезов веса один (одноэлементных разрезов). Дистрибутивность решетки множества минимальных двухэлементных разрезов есть частный случай дистрибутивности решетки множества минимальных разрезов взвешенного графа, разделяющих вершины  $s$  и  $t$ .

*Шаг 1.* Положить  $\mathcal{M}_2 := \emptyset$ . Для всех  $u \in \mathcal{U}$  положить  $\delta(u) = c_S(u)$ ,  $f(u) := 0$ .  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 := \emptyset$ ,  $R_1^2 = R_2^2 := \emptyset$ . Построить максимальный поток  $f$  (получить максимальный поток в форме узлы-дуги) [6]. Если  $c(f) \neq 2$ , то Return.

*Шаг 2.* Произвести цепное разложение потока  $f$  (получить максимальный поток в форме дуги-цепи) [5] и получить две цепи  $\mathcal{C}_i = (\mathcal{A}_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , на каждой из которых поток равен единице ( $c(\mathcal{C}_i) = 1$ ).

*Шаг 3.* Применить метод пометок [5, 6]. Если  $t \in M$ , то перейти к шагу 5. Иначе получаем двухэлементный разрез  $m = (M, \bar{M})$ .

*Шаг 4.* Запомнить двухэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов)  $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P}_1 \cup m$ . Для  $e = m \cap \mathcal{E}_1$  положить  $\delta(e) := \infty$ ,  $R_1^2 := R_1^2 \cup e$ . Перейти к шагу 3.

*Шаг 5.* Для всех  $e \in R_1^2$  положить  $\delta(e) := c_S(e)$ .

*Шаг 6.* Применить метод пометок [5, 6]. Если  $t \in M$ , то перейти к шагу 8. Иначе получаем двухэлементный разрез  $m = (M, \bar{M})$ .

*Шаг 7.* Запомнить двухэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов)  $\mathcal{P}_2 := \mathcal{P}_2 \cup m$ . Для  $e = m \cap \mathcal{E}_2$  положить  $\delta(e) := \infty$ ,  $R_2^2 := R_2^2 \cup e$ . Перейти к шагу 6.

На этапе выделения множества неприводимых трехэлементных разрезов построены линейно упорядоченные множества

$$R_1^2 = \{a_1 < a_2 < \dots < a_m\} \subseteq \mathcal{E}_1, \quad R_2^2 = \{b_1 < b_2 < \dots < b_n\} \subseteq \mathcal{E}_2.$$

Здесь  $1, 2, \dots, m$ ;  $1, 2, \dots, n$  – порядковый номер соответствующего элемента в соответствующей цепи (порядковый номер получения элемента цепи на шагах 3–4 (множество  $R_1^2$ ) и 6–7 (множество  $R_2^2$ ) алгоритма). Аналогично линейный порядок может быть рассмотрен и в множествах

$$\mathcal{P}_1 = \{p_1 < p_2 < \dots < p_m\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{q_1 < q_2 < \dots < q_n\}.$$

Цепи  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , в свою очередь, определяют частичный порядок в частично упорядоченном множестве  $\mathcal{P}$ , т.к. для множества  $\mathcal{P}$  число Дилуорса  $d(\mathcal{P}) = 2$ . Таким образом, на шагах 3–7 алгоритма получена информация не только о составе множества  $\mathcal{P}$ , но и о частичном порядке в множестве  $\mathcal{P}$ .

Пусть  $\langle \mathcal{M}_2; \vee, \wedge \rangle$  – дистрибутивная решетка;  $R_1^2 \times R_2^2 = \{(a, b) : a \in R_1^2, b \in R_2^2\}$  декартово произведение цепей  $R_1, R_2$ ;  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq R_1^2 \times R_2^2$ ; для всех  $r, s \in R_1^2 \times R_2^2$  бинарные операции  $\vee, \wedge$  задаются

$$r \vee s = (r_a, r_b) \vee (s_a, s_b) = (\sup\{r_a, s_a\}, \sup\{r_b, s_b\}),$$

$$r \wedge s = (r_a, r_b) \wedge (s_a, s_b) = (\inf\{r_a, s_a\}, \inf\{r_b, s_b\});$$

а отношение порядка описывается

$$r \leq s \Leftrightarrow (r_a \leq s_a \ \& \ r_b \leq s_b), \quad r < s \Leftrightarrow (r \leq s \ \& \ r \neq s).$$

Множество  $\mathcal{P}$  есть подмножество  $\vee$ -неприводимых элементов решетки  $\mathcal{M}_2$ , причем  $p_1 = q_1$  – нулевой элемент решетки  $\mathcal{M}_2$ . Нахождение множества  $\mathcal{M}_2$  заключается в синтезе множества минимальных разрезов (подмножества  $\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{P}$ ) по частично упорядоченному подмножеству неприводимых минимальных разрезов  $\mathcal{P}$  в дистрибутивной решетке множества минимальных разрезов  $\langle \mathcal{M}_2; \vee, \wedge \rangle$ . Использование такого подхода позволяет найти множество  $\mathcal{M}_2$  по частично упорядоченному множеству  $\mathcal{P}$  без использования графа  $\mathcal{G}$ .

Алгоритм синтеза двухэлементных разрезов по подмножеству неприводимых элементов.

*Шаг 8.*  $\mathcal{M}_2 := \mathcal{P}$ ,  $i := 1$ .

*Шаг 9.* Выберем  $p_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathcal{P}_1$ .

*Шаг 10.* Для  $\beta_i$  найдем порядковый номер  $j$  элемента  $q_j = (\alpha_j, \beta_j) \in \mathcal{P}_2$  такого, что  $\beta_j = \beta_i$ .

*Шаг 11.* Если  $\alpha_i \leq \alpha_j$ , то идти к шагу 15.

*Шаг 12.* Получить новый элемент решетки  $s = p_i \vee q_j = (\alpha_i, \beta_j) = (s_a, s_b)$ . Запомнить полученный элемент  $\mathcal{M}_2 := \mathcal{M}_2 \cup s$ .

*Шаг 13.*  $j := j + 1$ .

*Шаг 14.* Если  $j \leq n$ , то идти к шагу 11.

*Шаг 15.*  $i := i + 1$ .

*Шаг 16.* Если  $i \leq m$ , то идти к шагу 9.

*Шаг 17.* Return.

Предложенный алгоритм выделения множества неприводимых двухэлементных разрезов ориентированного графа  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$  имеет временную сложность  $O(|\mathcal{U}|)$ . При синтезе множества трехэлементных разрезов сложность алгоритма  $O(|\mathcal{M}_2|)$ . Таким образом, получена линейная оценка сложности  $O(\max\{|\mathcal{U}|, |\mathcal{M}_2|\})$  для алгоритма определения множества минимальных двухэлементных разрезов  $\mathcal{M}_2$  графа  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$ .

**Алгоритм поиска трехэлементных минимальных реберных разрезов  $KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \emptyset; 3; \mathcal{M}_3; R_1^3, R_2^3, R_3^3)$ .** Множество минимальных трехэлементных разрезов  $\mathcal{M}_3$  может трактоваться как множество разрезов минимального веса (веса три), разделяющих вершины  $s$  и  $t$  во взвешенном графе  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$  с заданной функцией веса  $c(u) = 1 = c_\emptyset(u)$  для всех  $u \in \mathcal{U}$  при отсутствии разрезов веса один и два (одно- и двухэлементных разрезов). Дистрибутивность решетки множества минимальных трехэлементных разрезов есть частный случай дистрибутивности решетки множества минимальных разрезов взвешенного графа, разделяющих вершины  $s$  и  $t$ .

*Шаг 1.* Положить  $\mathcal{M}_3 := \emptyset$ . Для всех  $u \in \mathcal{U}$  положить  $\delta(u) = c_S(u)$ ,  $f(u) := 0$ .  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 := \emptyset$ ,  $R_1^3 = R_2^3 = R_3^3 := \emptyset$ . Построить максимальный поток  $f$  (получить максимальный поток в форме узлы-дуги) [6]. Если  $c(f) \neq 3$ , то Return.

*Шаг 2.* Произвести цепное разложение потока  $f$  (получить максимальный поток в форме дуги-цепи) [5] и получить три цепи  $\mathcal{C}_i = (\mathcal{A}_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , на каждой из которых поток равен единице ( $c(\mathcal{C}_i) = 1$ ).

*Шаг 3.* Применить метод пометок [5, 6]. Если  $t \in M$ , то перейти к шагу 5. Иначе получаем трехэлементный разрез  $m = (M, \overline{M})$ .

*Шаг 4.* Запомнить трехэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов)  $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P}_1 \cup m$ . Для  $e = m \cap \mathcal{E}_1$  положить  $\delta(e) := \infty$ ,  $R_1^3 := R_1^3 \cup e$ . Перейти к шагу 3.

*Шаг 5.* Для всех  $e \in R_1^3$  положить  $\delta(e) := c_S(e)$ .

*Шаг 6.* Применить метод пометок [5, 6]. Если  $t \in M$ , то перейти к шагу 8. Иначе получаем трехэлементный разрез  $m = (M, \overline{M})$ .

*Шаг 7.* Запомнить трехэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов)  $\mathcal{P}_2 := \mathcal{P}_2 \cup m$ . Для  $e = m \cap \mathcal{E}_2$  положить  $\delta(e) := \infty$ ,  $R_2^3 := R_2^3 \cup e$ . Перейти к шагу 6.

*Шаг 8.* Для всех  $e \in R_2^3$  положить  $\delta(e) := c_S(e)$ .

*Шаг 9.* Применить метод пометок [5, 6]. Если  $t \in M$ , то перейти к шагу 11. Иначе получаем трехэлементный разрез  $m = (M, \overline{M})$ .

*Шаг 10.* Запомнить трехэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов)  $\mathcal{P}_3 := \mathcal{P}_3 \cup m$ . Для  $e = m \cap \mathcal{E}_3$  положить  $\delta(e) := \infty$ ,  $R_3^3 := R_3^3 \cup e$ . Перейти к шагу 9.

На этапе выделения множества неприводимых трехэлементных разрезов построены ли-



нейно упорядоченные множества

$$R_1^3 = \{a_1 < a_2 < \dots < a_m\} \subseteq \mathcal{E}_1, R_2^3 = \{b_1 < b_2 < \dots < b_n\} \subseteq \mathcal{E}_2,$$

$$R_3^3 = \{c_1 < c_2 < \dots < c_k\} \subseteq \mathcal{E}_3.$$

Здесь  $1, 2, \dots, m; 1, 2, \dots, n; 1, 2, \dots, k$  – порядковый номер соответствующего элемента в соответствующей цепи (порядковый номер получения элемента цепи на шагах 3–4 (множество  $R_1^3$ ), 6–7 (множество  $R_2^3$ ) и 9–10 (множество  $R_3^3$ ) алгоритма). Аналогично линейный порядок может быть рассмотрен и в множествах

$$\mathcal{P}_1 = \{p_1 < p_2 < \dots < p_m\}, \mathcal{P}_2 = \{q_1 < q_2 < \dots < q_n\},$$

$$\mathcal{P}_3 = \{r_1 < r_2 < \dots < r_k\}.$$

Цепи  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{P}_3$ , в свою очередь, определяют частичный порядок в частично упорядоченном множестве  $\mathcal{P}$ , т.к. для множества  $\mathcal{P}$  число Дилуорса  $d(\mathcal{P}) = 3$ . Таким образом, на шагах 3–10 алгоритма получена информация не только о составе множества  $\mathcal{P}$ , но и о частичном порядке в множестве  $\mathcal{P}$ .

Пусть  $\langle \mathcal{M}_3; \vee, \wedge \rangle$  – дистрибутивная решетка;

$$R_1^3 \times R_2^3 \times R_3^3 = \{(a, b, c) : a \in R_1^3, b \in R_2^3, c \in R_3^3\}$$

декартово произведение цепей  $R_1^3, R_2^3, R_3^3$ ;

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \subseteq \mathcal{M}_3 \subseteq R_1^3 \times R_2^3 \times R_3^3;$$

для всех  $r, s \in R_1^3 \times R_2^3 \times R_3^3$  бинарные операции  $\vee, \wedge$  задаются

$$r \vee s = (r_a, r_b, r_c) \vee (s_a, s_b, s_c) = (\sup\{r_a, s_a\}, \sup\{r_b, s_b\}, \sup\{r_c, s_c\}),$$

$$r \wedge s = (r_a, r_b, r_c) \wedge (s_a, s_b, s_c) = (\inf\{r_a, s_a\}, \inf\{r_b, s_b\}, \inf\{r_c, s_c\});$$

а отношение порядка описывается

$$r \leq s \Leftrightarrow (r_a \leq s_a \ \& \ r_b \leq s_b \ \& \ r_c \leq s_c), \quad r < s \Leftrightarrow (r \leq s \ \& \ r \neq s).$$

Множество  $\mathcal{P}$  есть подмножество  $\vee$ -неприводимых элементов решетки  $\mathcal{M}_3$ , причем  $p_1 = q_1 = r_1$  – нулевой элемент решетки  $\mathcal{M}_3$ . Нахождение множества  $\mathcal{M}_3$  заключается в синтезе множества минимальных разрезов (подмножества  $\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{P}$ ) по частично упорядоченному подмножеству неприводимых минимальных разрезов  $\mathcal{P}$  в дистрибутивной решетке множества минимальных разрезов  $\langle \mathcal{M}_3; \vee, \wedge \rangle$ . Использование такого подхода позволяет найти множество  $\mathcal{M}_3$  по частично упорядоченному множеству  $\mathcal{P}$  без использования графа  $\mathcal{G}$ .

Алгоритм синтеза трехэлементных разрезов по подмножеству неприводимых элементов.

*Шаг 11.*  $\mathcal{M}_3 := \mathcal{P}, i := 1$ .

*Шаг 12.* Выберем  $p_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathcal{P}_1$ .

*Шаг 13.* Для  $\beta_i$  найдем порядковый номер  $j$  элемента  $q_j = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \in \mathcal{P}_2$  такого, что  $\beta_j = \beta_i$ .

*Шаг 14.* Если  $\alpha_i < \alpha_j$ , то идти к шагу 23.

*Шаг 15.* Получить новый элемент решетки  $s = p_i \vee q_j = (\alpha_i, \beta_j, s_c) = (s_a, s_b, s_c)$ .

*Шаг 16.* Для  $s_c$  найдем порядковый номер  $l$  элемента  $r_l = (\alpha_l, \beta_l, \gamma_l) \in \mathcal{P}_3$  такого, что  $\gamma_l = s_c$ .

*Шаг 17.* Если  $s_a < \alpha_l$  или  $s_b < \beta_l$ , то идти к шагу 21.

*Шаг 18.* Получить новый элемент решетки  $t = p_i \vee q_j \vee r_l = (s_a, s_b, \gamma_l)$ . Запомнить полученный элемент  $\mathcal{M}_3 := \mathcal{M}_3 \cup t$ .

*Шаг 19.*  $l := l + 1$ .

*Шаг 20.* Если  $l \leq k$ , то идти к шагу 17.

*Шаг 21.*  $j := j + 1$ .

*Шаг 22.* Если  $j \leq n$ , то идти к шагу 14.

*Шаг 23.*  $i := i + 1$ .

*Шаг 24.* Если  $i \leq m$ , то идти к шагу 12.

*Шаг 25.* Return.

Предложенный алгоритм выделения множества неприводимых трехэлементных разрезов ориентированного графа  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$  имеет временную сложность  $O(|\mathcal{U}|)$ . При синтезе множества трехэлементных разрезов сложность алгоритма  $O(|\mathcal{M}_3|)$ . Таким образом, получена линейная оценка сложности  $O(\max\{|\mathcal{U}|, |\mathcal{M}_3|\})$  для алгоритма определения множества минимальных трехэлементных разрезов  $\mathcal{M}_3$  графа  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$  [14].

#### 4. Дистрибутивные решетки подмножеств квазимиимальных разрезов

Пусть  $\mathcal{S} = \{u : u \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U}$ , причем для любого  $m \in \mathcal{M}_{\min, c} \Rightarrow m \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ . Рассмотрим функцию  $c_{\mathcal{S}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , которую определим следующим образом:

$$c_{\mathcal{S}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } u \in \mathcal{S}, \\ c(u), & \text{если } u \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{S}. \end{cases}$$

Построенная функция веса запрещает все минимальные разрезы относительно функции веса  $c$ , т.к. по меньшей мере одно ребро указанного разреза имеет вес  $\infty$ . Для заданных  $\mathcal{S}$ ,  $c_{\mathcal{S}}$  множество минимальных разрезов графа  $\mathcal{G}$ , обозначим  $\mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}}}$ .

Рассмотрим совокупность всевозможных множеств  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}\}$  для  $\mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}}}$ .

Множество квазимиимальных (следующих за минимальными, ближайших к минимальным) разрезов есть

$$\mathcal{M}_{\min+1, c} = \left\{ \arg \min_{r \in \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{S}} \mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}}}} c(r) \right\}.$$

Представленное соотношение позволяет рассмотреть множество квазимиимальных разрезов как совокупность дистрибутивных решеток, поскольку для некоторого  $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$

$$\mathcal{M}_{\min+1, c} = \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{S}^*} \mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}}}.$$

Иными словами, множество квазимиимальных разрезов (не обладающее свойством дистрибутивной решетки) может быть представлено в виде объединения подмножеств, каждое из которых обладает структурой дистрибутивной решетки.

Соответственно, множество квазимиимальных разрезов допускает представление

$$\mathcal{M}_{\min+1, c} = \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{S}^*} \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{c_{\mathcal{S}}})} \bigvee_{a \in A} a,$$

где  $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{c_{\mathcal{S}}})$  есть множество антицепей подмножества неприводимых разрезов  $\mathcal{P}_{c_{\mathcal{S}}} \subseteq \mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}}}$  дистрибутивной решетки  $\langle \mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}}}; \vee, \wedge \rangle$ .

Полученное соотношение сводит поиск квазимиимальных разрезов к целенаправленному и эффективному поиску минимальных разрезов последовательности графов  $\mathcal{G}$  с модифицированной функцией веса  $c_S$  для совокупности множеств  $\{S\} = S^*$  [15].

Ниже рассматриваются вопросы построения множества  $S^*$  при перечислении квазимиимальных трехэлементных разрезов.

## 5. Алгоритм поиска одно-, двух- и трехэлементных разрезов графа

Перечисление указанных разрезов может быть сведено к последовательности задач перечисления минимальных одно-, двух- и трехэлементных разрезов.

**Перечисление двухэлементных (трехэлементных) разрезов при существовании одноэлементных разрезов (и отсутствии двухэлементных разрезов).** Двухэлементные (трехэлементные) разрезы в данном случае минимальными не являются. Множество дуг графа  $\mathcal{G}$ , образующих одноэлементные разрезы, есть  $R_1^1$ . Очевидно, что любое такое ребро не может входить в двухэлементный (трехэлементный) разрез. Придавая указанным ребрам разрезов достаточно большие веса (запрещая вхождение соответствующих ребер графа в минимальные разрезы), можно добиться того, что двухэлементные (трехэлементные) разрезы будут минимальными. Т.е.

$$S^* = \{R_1^1\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{\min+1,c} = \mathcal{M}_{1+1,c} = \mathcal{M}_{\min,c_S},$$

$$(\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{\min+1,c} = \mathcal{M}_{\min,c_S}).$$

И нахождение двухэлементных (трехэлементных) разрезов может быть осуществлено на основе

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^1; 2; \mathcal{M}_2^1; R_1^2, R_2^2)$$

$$(KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^1; 3; \mathcal{M}_3^1; R_1^3, R_2^3, R_3^3)).$$

**Перечисление трехэлементных разрезов при существовании двухэлементных и отсутствии одноэлементных разрезов.** Трехэлементные разрезы в данном случае минимальными не являются. Трехэлементный разрез может: 1) не содержать дуг двухэлементных разрезов, 2) содержать одну дугу двухэлементного разреза, 3) содержать по одной дуге двух различных двухэлементных разрезов.

Случай 1. Множество дуг графа  $\mathcal{G}$ , образующих двухэлементные разрезы, есть  $R_1^2 \cup R_2^2$ . Очевидно, что любое такое ребро не может входить в требуемый трехэлементный разрез. И нахождение трехэлементных разрезов может быть осуществлено на основе

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^2 \cup R_2^2; 3; \mathcal{M}_3^2; R_1^3, R_2^3, R_3^3).$$

Случай 2. При получении двухэлементных разрезов были выделены две цепи  $\mathcal{C}_1 = (\mathcal{A}_1, \mathcal{E}_1)$ ,  $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{A}_2, \mathcal{E}_2)$  и совокупности дуг  $R_1^2 \subseteq \mathcal{E}_1$  ( $R_2^2 \subseteq \mathcal{E}_2$ ) первой (второй) цепи. Для любого двухэлементного разреза  $m \in \mathcal{M}_2$  справедливо  $m \cap R_1^2 \neq \emptyset$ ,  $m \cap R_2^2 \neq \emptyset$ , причем  $R_1^2 \cap R_2^2 = \emptyset$ . Соответственно, множество трехэлементных разрезов  $\mathcal{M}_3^3$  ( $\mathcal{M}_3^4$ ), которые содержат дугу двухэлементного разреза из множества  $R_2^2$  ( $R_1^2$ ), может быть найдено при помощи

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^2; 3; \mathcal{M}_3^3; R_1^3, R_2^3, R_3^3)$$

$$(KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_2^2; 3; \mathcal{M}_3^4; R_1^3, R_2^3, R_3^3)).$$

Действительно, придание бесконечных весов дугам  $R_1^2$  ( $R_2^2$ ) запрещает все двухэлементные разрезы, поскольку для любого  $m \in \mathcal{M}_2$  справедливо  $m \cap R_1^2 \neq \emptyset$  ( $m \cap R_2^2 \neq \emptyset$ ), однако использование дуг  $R_2^2$  ( $R_1^2$ ) при конструировании трехэлементных разрезов возможно.

Случай 3. Будем последовательно перебирать все дуги  $u \in R_1^2$ . Для конструирования трехэлементных разрезов, которые содержат дугу  $u \in R_1^2$  и какую-то из дуг  $R_2^2$  нужно: 1) запретить вхождение дуг  $R_1^2 \setminus u$  (они не могут входить в трехэлементный разрез одновременно с дугой  $u$ ); 2) запретить двухэлементные разрезы, одной из дуг которых является дуга  $u$ , при этом разрешив вхождение дуги  $u$ , что достигается путем выделения множества дуг

$$R_2^{2u} = \{y : y \in R_2^2, (u, y) \in \mathcal{M}_2\}.$$

Таким образом, запрещение множества

$$\mathcal{S}_u = (R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u}$$

позволяет найти все требуемые трехэлементные разрезы с дугой  $u$ . Т.е.

$$\mathcal{S}^* = \{\mathcal{S}_u = (R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u} : u \in R_1^2\},$$

$$\mathcal{M}_3^5 = \bigcup_{\mathcal{S}_u \in \mathcal{S}^*} \mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}_u}},$$

где  $\mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}_u}}$  находится на основе

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \mathcal{S}_u; 3; \mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}_u}}; R_1^3, R_2^3, R_3^3).$$

Следовательно,

$$\mathcal{S}^* = \{R_1^2 \cup R_2^2, R_1^2, R_2^2\} \bigcup_{u \in R_1^2} (R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u}.$$

В действительности, чтобы получать неповторяющиеся сечения, достаточно выбрать

$$\mathcal{S}^* = \{R_1^2\} \bigcup_{u \in R_1^2} (\mathcal{E}_1 \setminus u) \cup R_2^{2u}.$$

**Перечисление трехэлементных разрезов при существовании одно- и двухэлементных разрезов.** В этом случае для любого множества, используемого при определении трехэлементных разрезов при существовании двухэлементных, требуется добавить множество  $R_1^1$ .

**Перечисление одно-, двух- и трехэлементных разрезов в общем случае.** Объединив вышеприведенные рассуждения, имеем:

*Шаг 1.* Найти множество одноэлементных разрезов  $\mathcal{M}_1$  графа

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \emptyset; 1; \mathcal{M}_1; R_1^1).$$

*Шаг 2.* Найти множество двухэлементных разрезов  $\mathcal{M}_2$  графа

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^1; 2; \mathcal{M}_2; R_1^2, R_2^2).$$

*Шаг 3.* Найти множество разрезов  $\mathcal{M}_3^3$

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^1 \cup R_1^2; 3; \mathcal{M}_3^3; R_1^3, R_2^3, R_3^3),$$

$$\mathcal{M}_3 := \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_3^3.$$

Шаг 4. Для всех  $u \in R_1^2$  выполнить

$$\left\{ \begin{aligned} R_2^{2u} &= \{y : y \in R_2^2, (u, y) \in \mathcal{M}_2\}, \\ K CUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^1 \cup (\mathcal{E}_1 \setminus u) \cup R_2^{2u}; 3; \mathcal{M}_{\min, c_{S_u}}; R_1^3, R_2^3, R_3^3), \\ \mathcal{M}_3 &:= \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_{\min, c_{S_u}}. \end{aligned} \right\}$$

Шаг 5. Построить множество одно-, двух- и трехэлементных разрезов

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3.$$

Таким образом, предложен способ формального построения множества  $S^*$  при перечислении трехэлементных квазиминимальных разрезов графа. При этом

$$|S^*| - 1 \leq \min\{|R_1^2|, |R_2^2|\} \leq |\mathcal{P}_{\mathcal{M}_2}| \leq |\mathcal{M}_2|.$$

Получено представление множества квазиминимальных трехэлементных разрезов в виде объединения дистрибутивных решеток.

## 6. Пример

На основе представленного алгоритма разработана компьютерная программа. Программа написана на языке C++, содержит 1700 строк кода и после компиляции занимает 380 КВ оперативной памяти. В программе дополнительно реализованы возможности: 1) нахождения разрезов в графах, содержащих ориентированные/неориентированные дуги; 2) нахождения разрезов из дуг/вершин графа. Исходный граф при работе программы задается в виде множества  $\{s=\text{номер\_начальной\_вершины\_источник}, t=\text{номер\_конечной\_вершины\_сток}\}$ ; ориентированные дуги: начальная\_вершина\_дуги конечная\_вершина\_дуги номер\_дуги; неориентированные дуги: вершина\_дуги вершина\_дуги номер\_дуги; ... }.

Для иллюстрации работы алгоритма выбран граф  $\{s=0, t=30\}$ ; ориентированные дуги: 0 13 1, 0 18 8; неориентированные дуги: 13 14 3, 18 19 9, 13 18 2, 14 15 4, 15 20 6, 20 19 10, 14 16 5, 19 21 11, 16 21 7; ориентированные дуги: 16 30 33, 21 30 34}.

При работе алгоритма получены следующие промежуточные множества.  $\mathcal{M}_1 = \emptyset$ .

$$C_1 = \{0, 1, 13, 3, 14, 5, 16, 33, 30\}, C_2 = \{0, 8, 18, 9, 19, 11, 21, 34\}.$$

$$R_1^2 = \{1, 13, 3, 14, 5, 16, 33\}, R_2^2 = \{8, 18, 9, 19, 11, 21\}.$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_2} = \{1\ 8, 1\ 18, 13\ 8, 13\ 9, 13\ 19, 3\ 18, 14\ 18, 14\ 11, 14\ 21, 5\ 19, 16\ 19, 16\ 34, 33\ 21\}.$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{P}_{\mathcal{M}_2} \cup \{13\ 18, 3\ 9, 14\ 9, 3\ 19, 14\ 19, 5\ 11, 5\ 21, 16\ 11, 16\ 21, 33\ 34\}. \mathcal{M}_3^3 = \emptyset.$$

$$S_1 = \{13, 3, 14, 5, 16, 33; 8, 18\}, \mathcal{M}_{\min, c_{S_1}} = \{1\ 9\ 2, 1\ 19\ 2\}.$$

$$S_{13} = \{1, 3, 14, 5, 16, 33; 8, 18, 9\ 19\}, \mathcal{M}_{\min, c_{S_{13}}} = \{13\ 11\ 10, 13\ 11\ 20, 13\ 11\ 6, 13\ 11\ 15, 13\ 11\ 4, 13\ 21\ 10, 13\ 21\ 20, 13\ 21\ 6, 13\ 21\ 15, 13\ 21\ 4\}.$$

$$S_3 = \{1, 13, 14, 5, 16, 33; 18, 9, 19\}, \mathcal{M}_{\min, c_{S_3}} = \{3\ 8\ 2, 3\ 11\ 10, 3\ 11\ 20, 3\ 11\ 6, 3\ 11\ 15, 3\ 11\ 4, 3\ 21\ 10, 3\ 21\ 20, 3\ 21\ 6, 3\ 21\ 15, 3\ 21\ 4\}.$$

$$S_{14} = \{1, 13, 3, 5, 16, 33; 18, 9, 19, 11, 21\}, \mathcal{M}_{\min, c_{S_{14}}} = \{14\ 8\ 2, 14\ 34\ 7\}.$$

$$S_5 = \{1, 13, 3, 14, 16, 33; 19, 11, 21\}, \mathcal{M}_{\min, c_{S_5}} = \{5\ 18\ 4, 5\ 18\ 15, 5\ 18\ 6, 5\ 18\ 20, 5\ 18\ 10, 5\ 9\ 4, 5\ 9\ 15, 5\ 9\ 6, 5\ 9\ 20, 5\ 9\ 10, 5\ 34\ 7\}.$$

$$S_{16} = \{1, 13, 3, 14, 5, 33; 19, 11, 21, 34\}, \mathcal{M}_{\min, c_{S_{16}}} = \{16\ 18\ 4, 16\ 18\ 15, 16\ 18\ 6, 16\ 18\ 20, 16\ 18\ 10, 16\ 9\ 4, 16\ 9\ 15, 16\ 9\ 6, 16\ 9\ 20, 16\ 9\ 10\}.$$

$$S_{33} = \{1, 13, 3, 14, 5, 16; 34\}, \mathcal{M}_{\min, c_{S_{33}}} = \{33\ 19\ 7, 33\ 11\ 7\}.$$

Окончательно, программой найдено следующее множество одно-, двух- и трехэлементных разрезов

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_{\min, c_{S_1}} \cup \mathcal{M}_{\min, c_{S_{13}}} \cup \mathcal{M}_{\min, c_{S_3}} \cup \mathcal{M}_{\min, c_{S_{14}}} \cup \mathcal{M}_{\min, c_{S_5}} \cup \mathcal{M}_{\min, c_{S_{16}}} \cup \mathcal{M}_{\min, c_{S_{33}}}.$$

## Литература

1. Дэвис, Д. Сети связи для вычислительных машин / Д. Дэвис, Д. Барбер. – М.: Мир, 1976.
2. Фрэнк, Г. Сети, связь и потоки / Г. Фрэнк, И. Фриш. – М.: Связь, 1978.
3. Герасимов, В.Г. Электротехнический справочник. В 4 т. Т.3: Производство, передача и распределение электрической энергии / В.Г. Герасимов и др. – М.: Изд-во МЭИ, 2002.
4. Picard, J.C. Selected applications of minimum cuts in networks / J.C. Picard, M. Queyranne // *INFOR. Can. J. Oper. Res. And Inf. Process.* – 1982. – Т. 20, № 4. – С. 394 – 422.
5. Форд, Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. – М.: Мир, 1966.
6. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. – М.: Мир, 1974.
7. Hamacher, H.W. On finding the K best cuts in a network / H.W. Hamacher, J.C. Picard, M. Queyranne // *Operations Research Letters.* – 1984. – Т. 2, № 6. – С. 303 – 304.
8. Vazirani, V.V. Suboptimal cuts – their enumeration, weight and number / V.V. Vazirani, M. Yannakakis // *Lect. Nites Comput.* – 1992. – Т. 623. – С. 366 – 377.
9. Allan, R.N. An efficient algorithm for deducing the minimal cuts and reliability indices of a general network configuration / R.N. Allan, R. Billinton, M.F. De Oliveira // *IEEE Trans.* – 1976. – Т. R-25, № 4. – С. 226 – 233.
10. Методы оценки структурной надежности сложных схем электроэнергетических систем при меняющихся коммутационных состояниях / Ю.А Фокин, Р.С. Алиев, А.Н. Туманин, О.В. Файницкий // *Изв. АН. Энергетика.* – 1997. – № 4. – С. 111 – 118.
11. Гришкевич, А.А. Комбинаторные методы исследования экстремальных структур математических моделей электрических цепей и систем / А.А. Гришкевич. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004.
12. Айгнер, М. Комбинаторная теория / М. Айгнер. – М.: Мир, 1982.
13. Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М.: Мир, 1982.
14. Grishkevich, A.A. Algorithm for finding minimal 3-elements cuts in graph / A.A. Grishkevich, L. Piątek // *Polish J. of Environmental Studies.* – 2007. – Т. 16, № 4а. – С. 218 – 222.
15. Grishkevich, A.A. Перечисление квазимиимальных разрезов графа / A.A. Grishkevich, L. Piątek // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* – 2007. – Т. 14, № 3. – С. 530.

Zakład metod numerycznych  
Czenstochowa University of Technology  
a.grischkevich@el.pcz.czyst.pl

*Поступила в редакцию 5 марта 2008 г.*

# НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

С.А. Загребина, Н.П. Соловьева

Статья посвящена изучению однозначной разрешимости начально-конечной задачи для эволюционных линейных уравнений соболевского типа на конечном связном ориентированном графе.

**Ключевые слова:** эволюционные линейные уравнения соболевского типа, начально-конечная задача, относительно  $p$ -секториальные операторы, связный ориентированный граф

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  – банаховы пространства; оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  (т.е. линейен и непрерывен), а оператор  $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  (т.е. линейен, замкнут и плотно определен). Введем в рассмотрение  $L$ -резольвентное множество  $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$  и  $L$ -спектр  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$  оператора  $M$  [1]. Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** [1] Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален справа и слева. Тогда существуют проекторы  $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  и  $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$  такие, что операторы  $L \in \mathcal{L}(\ker P; \ker Q) \cap \mathcal{L}(\text{im}P; \text{im}Q)$  и  $M \in Cl(\ker P; \ker Q) \cap Cl(\text{im}P; \text{im}Q)$ .

**Замечание 1.** Теорема 1 верна и в случае  $(L, p)$ -секториальности оператора  $M$ , но при дополнительном требовании рефлексивности пространств  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  (теорема Яги – Федорова).

**Теорема 2.** [2] Пусть  $\sigma^L(M) = \sigma_{in}^L(M) \cup \sigma_{ex}^L(M)$ , причем  $\sigma_{in}^L(M)$  содержится в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  с кусочно гладкой границей  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$ . Тогда существуют проекторы  $P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  и  $Q_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$  такие, что операторы  $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\text{im}P_{in}; \text{im}Q_{in})$  и  $M \in Cl(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap Cl(\text{im}P_{in}; \text{im}Q_{in})$ .

Проекторы  $P_{in}$  и  $Q_{in}$  имеют вид

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu, \quad Q_{in} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu,$$

где контур  $\gamma = \partial\Omega$ .

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теорем 1 и 2. Тогда  $P_{in}P = PP_{in} = P_{in}$  и  $Q_{in}Q = QQ_{in} = Q_{in}$ .

Положим  $P_{ex} = P - P_{in}$ , в силу следствия 1  $P_{ex} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  – проектор. Возьмем  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$  и рассмотрим задачу

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0 \quad (1)$$

для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (2)$$

Вектор-функцию  $u \in C^1((0, T); \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; \mathfrak{U})$ , удовлетворяющую уравнению (2), назовем его *решением*; решение  $u = u(t)$  уравнения (2) назовем *решением задачи* (1), (2), если  $\lim_{t \rightarrow 0+} P_{ex}(u(t) - u_0) = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow T-} P_{in}(u(t) - u_T) = 0$ .

**Теорема 3.** [3] Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален, выполнены условия  $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$  и условия теоремы 2, существует оператор  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ . Тогда для любых  $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$  и вектор-функции  $f = f(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , такой, что  $f^0 \in C^p([0, T]; \mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0, T); \mathfrak{F}^0)$ ,  $f^{in} \in C([0, T]; \mathfrak{F}^{in})$ ,  $f^{ex} \in C^1([0, T]; \mathfrak{F}^{ex})$ , существует единственное решение задачи (1), (2), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = - \sum_{q=0}^p G^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t) + U_{in}^{t-T} u_T - \int_t^T R_{in}^{t-s} f^{in}(s) ds + U_{ex}^t u_0 + \int_0^t R_{ex}^{t-s} f^{ex}(s) ds.$$

Здесь  $R_{in}^t = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$ ,  $R_{ex}^t = P_{ex} (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$ .

История задачи (1) начинается с одной стороны в [4], где она названа задачей Веригина, а с другой стороны и независимо – в [5], где она названа задачей сопряжения. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов  $P_{in}$  и  $P_{ex}$  рассматриваются спектральные проекторы оператора  $L$ , причем  $L$  вдобавок предполагается самосопряженным. Наш подход основан на концепции относительного спектра, предложенной Г.А. Свиридюком. Первые результаты в этом направлении изложены в [6], где рассмотрен частный случай задачи (1), причем с более жесткими, чем здесь, условиями на  $L$ -спектр оператора  $M$ . В [7] рассмотрена задача (1), но для тех же условий на  $L$ -спектр оператора  $M$ , что и в [6], однако для  $(L, p)$ -ограниченного оператора  $M$  отмечена возможность большего произвола в относительно спектральных условиях. В [8] результаты [7] распространены на случай  $(L, p)$ -радиального оператора  $M$ . Нам кажется, наиболее удобным эту задачу называть начально-конечной задачей.

Пусть теперь  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ , где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_i\}$  – множество ребер, – конечный связный ориентированный граф, причем каждое его ребро  $E_i$  имеет длину  $l_i \in \mathbb{R}_+$  и площадь поперечного сечения  $d_j \in \mathbb{R}_+$ . На графе  $\mathbf{G}$  рассмотрим линейные уравнения в частных производных

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \beta u_{jxx} - \alpha u_{jxxx} + \gamma u_j + f_j. \tag{3}$$

Дифференциальные уравнения на графах – сравнительно новая часть математического знания. Первые публикации в этой области появились в последнее десятилетие XX века, первая монография – в 2004 г. [9]. Уравнения соболевского типа на графах впервые были рассмотрены в 2002 г. [10]; первое диссертационное исследование в этом направлении было выполнено в 2002 – 2005 гг. [11]. Обобщенная задача Шоултера – Сидорова была рассмотрена в 2006 г. [12]. Заметим еще, что уравнения (3) относятся к эволюционным [13], так как их линейные дифференциальные операторы порождают разрешающую полугруппу, в то время как линейные операторы, рассмотренных в [11] динамических уравнений, порождают разрешающие группы.

Нас интересуют решения задачи (1), (2), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \tag{4}$$

где  $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i) (E^{\alpha(\omega)}(V_i))$  – множество ребер с началом (концом) в вершине  $V_i$ ;

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0; \tag{5}$$



$$u_{jxx}(0, t) = u_{kxx}(0, t) = u_{mxx}(l_m, t) = u_{nxx}(l_n, t), \quad (6)$$

где  $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$ ;

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jxxxx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kxxxx}(l_k, t) = 0 \quad (7)$$

с нормой

$$\|u\|_u^2 = \sum_{E_j \in \varepsilon} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxxxx}^2 + u_{jxxx}^2 + u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Все пояснения по физическому смыслу этих условий можно посмотреть в статье П.О. Пивоваровой в данном Вестнике.

Введем в рассмотрение банаховы пространства  $\mathfrak{F} = \{g = (g_1, g_2, \dots, v_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ ,  $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^2(0, l_j)\}$  и выполняются (4), (5) с нормой

$$\|u\|_u^2 = \sum_{E_j \in \varepsilon} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2) dx$$

и зададим оператор  $A : u \rightarrow (-u_{1xx}, -u_{2xx}, \dots, -u_{jxx}, \dots)$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ . Возьмем  $\lambda \in \mathbb{R}$  и построим оператор  $L = \lambda + A$ . По построению оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а его спектр  $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$ , где  $\{\lambda_k\}$  собственные значения оператора  $A$ , занумерованные по неубыванию с учетом их кратности.

Наконец, введем в рассмотрение еще одно банахово пространство  $\text{dom}M = \{u \in \mathfrak{U} : u_j \in W_2^4(0, l_j)\}$  и выполняются условия (4) – (7)}. Формулой  $B : u \rightarrow (u_{1xxxx}, u_{2xxxx}, \dots, u_{jxxxx}, \dots)$  зададим оператор  $B \in \mathcal{L}(\text{dom}M; \mathfrak{F})$  и  $\sigma(B) = \{\lambda_k^2\}$ . Возьмем  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  и построим оператор  $M = -\beta A - \alpha B + \gamma$ . По построению оператор  $M \in \mathcal{L}(\text{dom}M; \mathfrak{F})$ , а значит  $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ .

**Лемма 1.** При любых  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  и  $\beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$  таких, что либо  $-\lambda \notin \sigma(A)$ , либо  $-\lambda \in \sigma(A)$  и  $-\lambda$  не является корнем уравнения  $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \gamma = 0$ , оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -секториален.

Тогда  $L$ -спектр оператора  $M$

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{-\alpha\lambda_k^2 - \beta\lambda_k + \gamma}{\lambda + \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda + \lambda_l = 0\} \right\}$$

вещественен, дискретен и сгущается только к  $+\infty$ . Это значит, что выполняются условия теоремы 2, причем для любого замкнутого контура  $\gamma \in \mathbb{C}$ , ограничивающего область, содержащую конечное множество точек из  $\sigma^L(M)$ , и непересекающегося с  $\sigma^L(M)$ . Итак, все условия теоремы 3 выполнены, и поэтому справедлива

**Теорема 4.** При любых  $\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R}$ , любой вектор-функции  $f \in C^1([0, T], \mathfrak{F})$  и любых начальных, конечных значениях  $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$ , существует единственное решение задачи (1) для уравнения (3) с условиями (4) – (7).

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридую за постановку задачи и интерес к работе.

## Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

2. Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Келлер – Челябинск, 1997.
3. Загребина, С.А. Задача Шоултера – Сидорова – Веригина для линейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа. – Новосибирск, 2007. – С. 150 – 157.
4. Панков, А.А. Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной / А.А. Панков, Т.Е. Панкова // Докл. Акад. наук Украины. – 1993. – № 9. – С. 18 – 20.
5. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
6. Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно  $p$ -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т.38, № 12. – С. 1646 – 1652.
7. Загребина, С.А. О задаче Шоултера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
8. Загребина, С.А. Обобщенная задача Шоултера – Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно  $(L, p)$ -радиальным оператором / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева // Вестн. МаГУ. Сер. «Математика». – 2006. – Вып. 9. – С. 17 – 27.
9. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В.Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. – М.: Физматлит, 2004.
10. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах/ Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
11. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.В. Шеметова – Магнитогорск, 2005.
12. Загребина, С.А. Задача Шоултера – Сидорова для уравнения соболевского типа на графе / С.А. Загребина // Оптимизация, управление, интеллект. – 2006. – 1 (12). – С. 42 – 40.
13. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1989. – Т. 304, № 2. – С. 301 – 304.

Кафедра «Уравнения математической физики»,  
Южно-Уральский государственный университет  
zsophiya@mail.ru

*Поступила в редакцию 1 марта 2008 г.*

## О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ СОСТАВНОГО ТИПА

*А.И. Кожанов*

Для уравнений составного типа, называемых также псевдопараболическими уравнениями, исследуется разрешимость обратной задачи нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента, зависящего от выделенной временной переменной. В качестве дополнительного условия предлагается условие интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

**Ключевые слова:** уравнения составного типа; неизвестный коэффициент; интегральное условие переопределения; регулярные решения; существование и единственность

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой (для простоты — бесконечнодифференцируемой) границей  $\Gamma$ ,  $Q$  есть цилиндр  $\Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $b^{ij}(x, t)$ ,  $b^i(x, t)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $b(x, t)$ ,  $K(x)$ ,  $f(x, t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $\mu(t)$  — определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$  заданные функции,  $Bu$  — дифференциальный оператор, определенный равенством

$$Bu = b^{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + b^i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u$$

(по повторяющимся индексам здесь и далее ведется суммирование в пределах от 1 до  $n$ ).

Обратная задача: найти функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$ , связанные в цилиндре  $Q$  уравнением

$$q(t)u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  условий

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} K(x)u(x, t) dx = \mu(t), \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

В рассматриваемой обратной задаче условия (2) и (3) являются условиями обычной первой начально — краевой задачи для уравнения составного типа (1), условие же (4) есть условие переопределения интегрального вида, необходимое вследствие наличия дополнительной неизвестной (наряду с решением  $u(x, t)$ ) функции  $q(t)$ . Подобные обратные задачи для уравнений составного типа (1) ранее не изучались.

Целью настоящей работы является доказательство разрешимости обратной задачи (1) — (4) в классе регулярных решений. Техника доказательства основана на переходе от исходной задачи к новой уже прямой начально — краевой задаче для нелинейного интегро — дифференциального уравнения составного типа вида (1), исследовании разрешимости новой задачи и далее построении с помощью решения новой задачи решения рассматриваемой обратной задачи. Близкая техника ранее использовалась автором в работах [1 — 3].

Перейдем к содержательной части работы.

Определим пространства  $\mathring{V}_1$  и  $\mathring{V}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathring{V}_1 &= \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega)), \\ &v_t(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega)), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; \mathring{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))\}, \\ \mathring{V}_2 &= \{v(x, t) : v(x, t) \in \mathring{V}_1, \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))\}; \end{aligned}$$

нормы в этих пространствах определим равенствами

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathring{V}_1} &= \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(0, T; \mathring{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))}, \\ \|v\|_{\mathring{V}_2} &= \|v\|_{\mathring{V}_1} + \|v_{tt}\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Для функций  $v(x, t)$  из пространств  $\mathring{V}_1$  и  $\mathring{V}_2$  для почти всех  $t$  из отрезка  $[0, T]$  выполняются неравенства

$$\|v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_0 \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_1 \|\delta v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (5)$$

$$\|v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2T \int_0^t \|v_\tau(x, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau + 2\|v(x, 0)\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (6)$$

— см. [4]. Далее, определим дифференциальный оператор  $B_1$ :

$$B_1 v = b_t^{ij}(x, t)v_{x_i x_j} + b_t^i(x, t)v_{x_i} + b_t(x, t)v.$$

Предполагая, что коэффициенты операторов  $B$  и  $B_1$  ограничены, нетрудно показать, что для функций  $v(x, t)$  из пространств  $\mathring{V}_1$  и  $\mathring{V}_2$  для почти всех  $t$  из отрезка  $[0, T]$  выполняются неравенства

$$\|Bv(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq b_0 \|\Delta v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (7)$$

$$\|B_1 v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq b_1 \|\Delta v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (8)$$

с некоторыми постоянными, определяющимися лишь функциями  $b^{ij}(x, t)$ ,  $b^i(x, t)$  и  $b(x, t)$ , областью  $\Omega$  и числом  $T$ .

Неравенства (5) – (8), а также собственно числа  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $b_0$  и  $b_1$  нам понадобятся ниже.

Определим другие величины, которые понадобятся ниже. Пусть  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  есть заданные положительные постоянные (роль  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  будет прояснена ниже). Положим далее

$$F(t) = \int_{\Omega} K(x) f(x, t) dx,$$

$$\beta_1 = \max \left( \frac{3}{2} + \frac{b_0}{2} + b_1 T^2 + 2b_0 T, \frac{\mu_0}{2\gamma_0} \right),$$

$$\beta_2 = \left| \frac{1}{2} \int_Q f_t^2 dx dt + 2 \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \left[ \int_{\Omega} f^2(x, t) dx \right] + (b_1 T + 2b_0) \int_{\Omega} (\Delta u_0)^2 dx + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx + \int_{\Omega} B u_0 \Delta u_1 dx - \int_{\Omega} f(x, 0) \Delta u_1 dx \right|, \\
 & N_1 = 4\beta_2 \exp(4\beta_1 T), \\
 & N_2 = \beta_1 T N_1 + \beta_2, \\
 & N_3 = 2T^2 N_1 + 2 \int_{\Omega} (\Delta u_0)^2 dx, \\
 & N_4 = \left( \int_{\Omega} K^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left[ N_1^{\frac{1}{2}} + (b_0 N_3)^{\frac{1}{2}} \right].
 \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия

$$b^{ij}(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad b^i(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad b(x, t) \in C(\bar{Q}),$$

$$K(x) \in C^1(\bar{\Omega}); \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \\
 u_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \quad \mu(t) \in C^2([0, T]);
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\mu''(t) \geq \mu_0 > 0, \quad F(t) \geq \gamma_0 + \gamma_1, \quad \gamma_0 > 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad t \in [0, T]; \tag{11}$$

$$\int_{\Omega} K(x) u_0(x) dx = \mu(0), \quad \int_{\Omega} K(x) u_1(x) dx = \mu'(0); \tag{12}$$

$$N_4 < \gamma_1. \tag{13}$$

Тогда обратная задача (1) – (4) имеет решение  $\{u(x, t), q(t)\}$  такое, что  $u(x, t) \in \overset{\circ}{V}_1$ ,  $q(t) \in L_2([0, T])$ .

*Доказательство.* Воспользуемся комбинацией метода срезов, метода неподвижной точки и метода регуляризации.

Пусть  $N$  есть заданное положительное число. Определим функцию  $G_N(\xi)$  (срезку):

$$G_N(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq N, \\ N, & \text{если } \xi > N, \\ -N, & \text{если } \xi < -N. \end{cases}$$

Далее, для заданной функции  $v(x, t)$  определим функции  $\psi(t, v)$  и  $\tilde{q}(t, v)$ :

$$\begin{aligned}
 \psi(t, v) = & \int_{\Omega} K_{x_i}(x) v_{x_i}(x) v_{x_i t}(x, t) dx + \int_{\Gamma} K(x) v_{x_i t}(x, t) \nu_i ds - \\
 & - \int_{\Omega} [K(x) b^i(x, t) - (K(x) b^{ij}(x, t))_{x_j}] v_{x_i}(x, t) dx - \int_{\Omega} K(x) b(x, t) v(x, t) dx + \\
 & + \int_{\Gamma} K(x) b^{ij}(x, t) v_{x_i}(x, t) \nu_j ds
 \end{aligned}$$

( $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  — вектор внутренней нормали к  $\Gamma$ ),

$$\tilde{q}(t, \nu) = \frac{F(t) - G_{\gamma_1}(\psi(t, \nu))}{\mu''(t)}.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$\tilde{q}(t, u)u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \quad (1')$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). В данной краевой задаче уравнение (1') представляет собой нелинейное «нагруженное» [5, 6] уравнение составного типа. Разрешимость поставленной задачи докажем с помощью метода регуляризации и метода неподвижной точки.

Пусть  $\varepsilon$  есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$\tilde{q}(t, u)u_{tt} - \varepsilon \Delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \quad (1'_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). Наконец, пусть  $v(x, t)$  есть заданная функция из пространства  $\overset{\circ}{V}_2$ . Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$\tilde{q}(t, v)u_{tt} - \varepsilon \delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \quad (1'_{\varepsilon, v})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3).

Пусть выполняются условия (9) – (12) за исключением условия  $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ . Тогда, как следует из [7], краевая задача (1'\_{\varepsilon, v}), (2), (3) будет разрешима в пространстве  $\overset{\circ}{V}_2$ . Следовательно, при выполнении указанных выше условий данная краевая задача порождает оператор  $\Phi$ , переводящий пространство  $\overset{\circ}{V}_2$  в себя:  $\Phi(v) = u$ . Докажем, что этот оператор имеет в пространстве  $\overset{\circ}{V}_2$  неподвижные точки.

Рассмотрим равенство

$$-\int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{q}(\tau, v)u_{\tau\tau} - \varepsilon \Delta u_{\tau\tau} - \Delta u_{\tau} - Bu + u_{\tau}] \Delta u_{\tau\tau} dx d\tau.$$

Интегрируя по частям и используя условия (2) и (3), нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{q} \sum_{i=1}^n u_{x_i\tau\tau}^2 + \varepsilon (\Delta u_{\tau\tau})^2] dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ [\Delta u_t(x, t)]^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2(x, t) \right\} dx = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} f \Delta u_{\tau\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} Bu \Delta u_{\tau\tau} dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i\tau} u_{x_i\tau\tau} dx d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Положительность функции  $\tilde{q}(\tau, v)$ , неравенство Юнга, неравенство (7) и лемма Гронуолла позволяют вывести из этого равенства априорную оценку

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau\tau})^2 dx d\tau + \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq C_0$$

с постоянной  $C_0$ , определяющейся лишь нормами функции  $f(x, t)$  в пространстве  $L_2(Q)$ , функцией  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  в пространстве  $W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$ , числами  $T$  и  $\varepsilon$ . Из этой оценки, из неравенств (5) и (6) вытекает оценка

$$\|u\|_{\dot{V}_2} \leq C_1 \tag{15}$$

с постоянной  $C_1$ , определяющейся теми же величинами, что и постоянная  $C_0$ .

С помощью оценки (15) нетрудно установить, что оператор  $\Phi$ , определенный выше, будет переводить некоторое замкнутое выпуклое ограниченное множество пространства  $\dot{V}_2$  в себя, и будет вполне непрерывным на пространстве  $\dot{V}_2$  — подробности рассуждений см. [1 – 3]. Согласно теореме Шаудера, оператор  $\Phi$  имеет в пространстве  $\dot{V}_2$ , по крайней мере, одну неподвижную точку  $u(x, t)$ . Эта неподвижная точка даст решение краевой задачи (1'<sub>ε</sub>), (2), (3), принадлежащее пространству  $\dot{V}_2$ .

Итак, краевая задача (1'<sub>ε</sub>), (2), (3) при фиксированном  $\varepsilon$  имеет решение, принадлежащее пространству  $\dot{V}_2$ ; обозначим это решение  $u^\varepsilon(x, t)$ . Покажем, что при выполнении всех условий теоремы 1 из семейства функций  $\{u^\varepsilon(x, t)\}$  можно извлечь последовательность, сходящуюся к решению краевой задачи (1'), (2), (3).

В равенстве (14), соответствующем уравнению (1'<sub>ε</sub>), выполним интегрирование по частям в первом и во втором слагаемом правой части. Получим равенство (индекс «ε» у решения временно опустим)

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{q} \sum_{i=1}^n u_{x_i \tau\tau}^2 + \varepsilon (\Delta u_{\tau\tau}^2)] dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{[\Delta u_t(x, t)]^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2(x, t)\} dx = \\ & = - \int_0^t \int_{\Omega} f_{\tau} \Delta u_{\tau} dx d\tau + \int_{\Omega} f(x, t) \Delta u_t(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} B u_{\tau} \Delta u_{\tau} dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} B_1 u \Delta u_{\tau} dx d\tau - \int_{\Omega} B u(x, t) \Delta u_t(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau} u_{x_i \tau\tau} dx d\tau - \\ & - \int_{\Omega} f(x, 0) \Delta u_1(x) dx + \int_{\Omega} B u_0 \Delta u_1 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx. \end{aligned}$$

Неравенство Юнга и положительность функции  $\tilde{q}(\tau, u)$  позволяют перейти от данного равенства к неравенству

$$\frac{\gamma_0}{\mu_0} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau\tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^t \int_{\Omega} f_{\tau}^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{\delta_2^2}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_{\Omega} f^2(x, t) dx + \frac{\delta_3^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{1}{2\delta_3^2} \int_0^t \int_{\Omega} (B u_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{\delta_4^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_4^2} \int_0^t \int_{\Omega} (B_1 u)^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{\delta_5^2}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2\delta_5^2} \int_{\Omega} [B u(x, t)]^2 dx + \frac{\delta_6^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau \tau}^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{1}{2\delta_6^2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx + \\
 & + \int_{\Omega} B u_0 \Delta u_1 dx - \int_{\Omega} f(x, 0) \Delta u_1 dx.
 \end{aligned}$$

Используя далее неравенства (6) – (8), приходим к следующему неравенству

$$\begin{aligned}
 & \frac{\gamma_0}{\mu_0} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i \tau \tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau \tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq \\
 & \leq \left( \frac{\delta_1^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2}{2} + \frac{b_0}{2\delta_3^2} + \frac{b_1 T^2}{\delta_4^2} + \frac{b_0 T}{\delta_5^2} \right) \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{\delta_2^2 + \delta_5^2}{2} \int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^t \int_{\Omega} f_{\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_{\Omega} f^2(x, t) dx + \\
 & + \left( \frac{b_1 T}{\delta_4^2} + \frac{b_0}{\delta_5^2} \right) \int_{\Omega} (\Delta u_0)^2 dx + \frac{\delta_0^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau \tau}^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{1}{2\delta_6^2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx + \int_{\Omega} B u_0 \Delta u_1 dx - \int_{\Omega} f(x, 0) \Delta u_1 dx.
 \end{aligned}$$



Положим  $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = 1$ ,  $\delta_2 = \delta_5 = \frac{1}{2}$ ,  $\delta_6 = \sqrt{\gamma_0 \mu_0^{-1}}$ . Учитывая введенные выше обозначения, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_0}{2\mu_0} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau \tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau \tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{4} \int_{\Omega} [\delta u_t(x, t)]^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq \beta_1 \int_0^t \int_{\Omega} [(\Delta u_{\tau})^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i \tau}^2] dx d\tau + \beta_2. \end{aligned}$$

Используя лемму Гронуолла, приходим к первой равномерной по  $\varepsilon$  априорной оценке решений краевой задачи (1'), (2), (3):

$$\int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq N_1. \quad (17)$$

Из этой оценки очевидным образом выводятся следующие оценки

$$\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau \tau})^2 dx d\tau \leq N_2, \quad (18)$$

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx \leq N_3. \quad (19)$$

Кроме того, в целом из оценки (16) следует оценка

$$\|u\|_{V_1^{\circ}} \leq N_0 \quad (20)$$

с постоянной  $N_0$ , определяющейся лишь коэффициентами оператора  $B$ , функциями  $f(x, t)$ ,  $K(x)$ ,  $\mu(t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ , областью  $\Omega$  и числом  $T$ .

Оценки (18) и (20), теоремы о компактности вложений  $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$ ,  $W_2^1(Q) \subset L_2(\Gamma)$  [8, 9], о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду [9] и о слабой компактности ограниченного в  $L_2$  множества [10] дают существование функции  $u(x, t)$ , а также последовательностей  $\{\varepsilon_m\}$  и  $\{u_m(x, t)\}$  таких, что при  $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_m \rightarrow 0, \\ & u_m(x, t) \rightarrow u(x, t), u_{mx_i}(x, t) \rightarrow u_{x_i}(x, t), u_{mt}(x, t) \rightarrow u_t(x, t), \\ & u_{mx_it}(x, t) \rightarrow u_{x_it}(x, t) \text{ сильно в } L_2(Q) \text{ и почти всюду в } Q, \\ & u_{mx_i}(x, t) \rightarrow u_{x_i}(x, t), u_{mx_it}(x, t) \rightarrow u_{x_it} \text{ сильно в} \\ & L_2(\Gamma \times (0, T)) \text{ и почти всюду на } \Gamma \times (0, T), \\ & u_{mx_ix_j}(x, t) \rightarrow u_{x_ix_j}(x, t), u_{mx_ix_jt}(x, t) \rightarrow u_{x_ix_jt}, \\ & u_{mtt}(x, t) \rightarrow u_{tt}(x, t) \text{ слабо в } L_2(Q), \varepsilon_m \Delta u_{mtt}(x, t) \rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q). \end{aligned}$$

Из данных сходимостей следует, что предельная функция  $u(x, t)$  принадлежит пространству  $V_1^{\circ}$ , является решением краевой задачи (1'), (2), (3), и что для нее сохраняются оценки (17), (19) и (20). Оценки (17) и (19) означают, в частности, что выполняется неравенство ;

$$|\psi(t, u)| \leq N_4.$$

Из этого неравенства и из условия (13) вытекает, что для решения  $u(x, t)$  краевой задачи (1'), (2), (3) имеет место равенство

$$G_{\gamma_1}(\psi(t, u)) = \psi(t, u).$$

Положим,

$$q(t) = \frac{F(t) - \psi(t, u)}{\mu''(t)}.$$

Очевидно, что функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$  связаны в цилиндре  $Q$  уравнением (1). Умножим уравнение (1) с указанной выше функцией  $q(t)$  на функцию  $K(x)\mu''(t)$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Полученное равенство и равенство (21) дают систему

$$q(t) \int_{\Omega} K(x)u_{tt}(x, t) + \psi(t, u) = F(t), \quad q(t)\mu''(t) + \psi(t, u) = F(t).$$

Из этой системы и вследствие положительности функции  $q(t)$  и условий согласования (12) вытекает, что выполняется равенство

$$\int_{\Omega} K(x)u(x, t) dx = \mu(t).$$

Следовательно, для функции  $u(x, t)$ , являющейся решением краевой задачи (1'), (2), (3), выполняется условие переопределения (4).

Итак, построенные функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$  связаны в цилиндре  $Q$  уравнением (1), для функции  $u(x, t)$  выполняются условия (2) – (4), функция  $u(x, t)$  принадлежит пространству  $\overset{\circ}{V}_1$ , функция  $q(t)$  — пространству  $L_{\infty}([0, T])$ . Другими словами, построено требуемое решение рассматриваемой обратной задачи. □

Пусть  $\bar{\gamma}$  есть заданное положительное число. Определим множество  $W_1$ :

$$W_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in \overset{\circ}{V}_1, \quad |\psi(t, v)| \leq \bar{\gamma} \quad \forall t \in [0, T]\}.$$

**Теорема 2.** Пусть выполняются условие (9), а также условия

$$\mu''(t) \geq \mu_0 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \tag{22}$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad F(t) \geq \gamma > \bar{\gamma} \quad \text{при } t \in [0, T]; \tag{23}$$

$$K(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma. \tag{24}$$

Тогда обратная задача (1) – (4) не может иметь в множестве  $W_1$  более одного решения.

*Доказательство.* Предположим, что в множестве  $W_1$  имеется два решения  $\{u_1(x, t), q_1(t)\}$  и  $\{u_2(x, t), q_2(t)\}$  обратной задачи (1) – (4). Условие (22) позволяет дать представление функций  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  через функции  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ :

$$q_1(t) = \frac{F(t) - \psi(t, u_1)}{\mu''(t)}, \quad q_2(t) = \frac{F(t) - \psi(t, u_2)}{\mu''(t)}.$$

Положим  $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Имеют место равенство

$$q_1(t)w_{tt} - \Delta w_t - Bw = [q_2(t) - q_1(t)]u_{2tt}, \quad (x, t) \in Q;$$

$$w(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0, \quad w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad u \in \Omega.$$

Следствием этих равенств является равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} q_1(\tau) w_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx = \int_0^t \int_{\Omega} b^{ij} w_{x_i \tau} w_{x_j \tau} dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (b^i - b_{x_j}^{ij}) w_{x_i} w_{\tau\tau} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} b_{\tau}^{ij} w_{x_i} w_{x_j \tau} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} b w w_{\tau\tau} dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\psi(\tau, u_1) - \psi(\tau, u_2)}{\mu''(\tau)} u_{2\tau\tau} w_{\tau\tau} dx d\tau. \end{aligned}$$

Используя условия (22) – (24) и применяя неравенство Юнга, а также первое неравенство (5) и неравенство (6), нетрудно от данного равенства перейти к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx \leq \\ & \leq M_1 \int_0^t \left[ 1 + \int_{\Omega} u_{2\tau\tau}^2 dy \right] \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx \right) d\tau, \end{aligned}$$

постоянная  $M_1$  в котором определяется лишь функциями  $f(x, t)$ ,  $k(x)$ ,  $\mu(t)$ , коэффициентами оператора  $B$  и областью  $\Omega$ . Из этого неравенства и из леммы Гронуолла вытекает, что функции  $w_{x_i t}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $w_{tt}(x, t)$  являются тождественно нулевыми в цилиндре  $Q$  функциями. Но тогда и функция  $w(x, t)$  будет тождественно нулевой в  $Q$  функцией. Другими словами, функции  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  будут совпадать почти всюду в цилиндре  $Q$ . Из совпадения функций  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  вытекает совпадение функций  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$ .  $\square$

Определим множество  $W_2$ :

$$W_2 = \{v(x, t) : v(x, t) \in \overset{\circ}{V}_1, \Delta v_{tt}(x, t) \in L_2(Q), |\psi(t, v)| \leq \bar{\gamma} \forall t \in [0, T]\}.$$

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (9), (22) и (23). Тогда обратная задача (1) – (4) не может иметь в множестве  $W_2$  более одного решения.

Для доказательства этой теоремы достаточно уравнение для функции  $w(x, t)$  умножить на  $\Delta w_{tt}$  и проинтегрировать. Лемма Гронуолла вновь даст тождество  $w(x, t) \equiv 0$ . Из этого тождества и следует требуемое.

Сделаем несколько замечаний.

Аналогичные результаты о разрешимости обратной задачи нахождения решения  $u(x, t)$  и коэффициента  $q(t)$  при второй производной по времени, о единственности решений можно получить при замене условия (2) на условие

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \times (0, T)} = 0. \tag{2'}$$

Далее, изложенными выше методами можно исследовать разрешимость обратных задач нахождения решения  $u(x, t)$  и коэффициента при второй производной по времени с заданием на боковой границе цилиндра  $Q$  граничных условий первой или второй краевых задач в

более общей ситуации — при замене оператора Лапласа произвольным линейным эллиптическим оператором, в случае функции  $K$ , зависящей не только от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , но и от переменной  $t$ .

Разрешимость вспомогательной линейной краевой задачи  $(1'_{\varepsilon, v})$ , (2), (3) нетрудно установить непосредственно — например, с помощью метода Галеркина с выбором специального базиса.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта N 06-01-00439, и Сибирского отделения РАН, интеграционный проект N 48.*

## Литература

1. Кожанов, А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, №4. – С. 722 – 744.
2. Кожанов, А.И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче / А.И. Кожанов // Мат. заметки. – 2004. – Т. 76, Вып. 6. – С. 840 – 853.
3. Кожанов, А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, №12. – С. 2168 – 2184.
4. Нахушев, А.М. Уравнение математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. школа, 1995.
5. Дженалиев, М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев. – Алматы: Ин-т теор. и прикладной математики, 1995.
6. Якубов С.Я. Линейные дифференциально – операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985.
7. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988.
8. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. – М.: Наука, 1967.
9. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,  
г. Новосибирск  
kozhanov@math.nsc.ru

*Поступила в редакцию 21 марта 2008 г.*

# ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОМ ОПЕРАТОРЕ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ КВАЗИОКРЕСТНОСТЯХ И МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕТВИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Р.Ю. Леонтьев*

Рассматривается нелинейное операторное уравнение  $F(x, \lambda) = 0$  с условием  $F(0, 0) \equiv 0$ . Оператор  $F_x(0, 0)$  не является непрерывно обратимым. Строятся непрерывные решения  $x(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  в открытом множестве  $S$  линейного нормированного пространства  $\Lambda$ . Нуль принадлежит границе множества  $S$ . Доказанные теоремы существования решений иллюстрируются примерами.

**Ключевые слова:** секториальная квазиокрестность, банахово пространство, нелинейное операторное уравнение, линейное нормированное пространство, двухточечная краевая задача, теорема о неявном операторе

Пусть  $X, Y$  – банаховы пространства,  $\Lambda$  – линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (1)$$

где  $F : X \oplus \Lambda \rightarrow Y$ ,  $F(0, 0) \equiv 0$ , оператор  $F_x(0, 0)$  не является непрерывно обратимым. В работе, продолжающей исследования [1], [2], доказано существование непрерывных решений уравнения  $x(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  в секториальной квазиокрестности нуля и дан способ их построения. Результатом работы являются теоремы существования минимальных ветвей максимального порядка малости решений нелинейных уравнений и дополняют результаты [1].

**Определение 1.** Секториальной квазиокрестностью точки  $0 \in \Lambda$  будем называть открытое множество  $S \subset \Lambda$ , такое что  $0 \in \partial S$ .

Далее пусть  $a(\lambda)$  некоторая функция  $a(\lambda) : S \rightarrow R_+$ ,  $a(\lambda) \rightarrow 0$  при  $S \ni \lambda \rightarrow 0$ . Вводится множество  $\Omega = \{(x, \lambda) \in X \oplus \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}$ , где  $r > 0$ . Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть в  $\Omega$  выполнены условия: 1) оператор  $F(x, \lambda)$  непрерывен по  $x$  и  $\lambda$  и имеет частную производную Фреше  $F_x(x, \lambda)$ , непрерывную по  $x$  и  $\lambda$ ; 2)  $F(0, 0) = 0$ , оператор  $F_x(0, \lambda)$  непрерывно обратим при  $\lambda \in S$ , причем  $\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O(\frac{1}{a(\lambda)})$ ;

3)  $\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L\|x\|$ ; 4)  $\|F(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ .

Тогда найдется число  $r_0 \in (0, r)$  и секториальная квазиокрестность нуля  $S_0 \subset S$  такие, что для каждого  $\lambda \in S_0$  уравнение (1) имеет в шаре  $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$  непрерывное решение  $x(\lambda) \rightarrow 0$  при  $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Уравнение (1) с помощью замены  $x = a(\lambda)V$  приводится к эквивалентному уравнению

$$V = \Phi(V, \lambda), \quad (2)$$

где оператор  $\Phi(V, \lambda)$  имеет вид

$$\Phi(V, \lambda) \equiv V - \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0, \lambda) F(a(\lambda)V, \lambda).$$

Нетрудно видеть, что оператор  $\Phi(V, \lambda)$  при  $\lambda \in S$ ,  $\|V\| \leq r_0 \leq r$  является сжатием. Действительно, применяя формулу конечных приращений Лагранжа и условие 3) теоремы, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| &\leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \int_0^1 \|F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda)\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq \\ &\leq CL \int_0^1 \{\|V_2\| + \Theta(\|V_1\| + \|V_2\|)\} d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq 2CLr_0 \|V_1 - V_2\|, \end{aligned}$$

здесь  $C, L - const.$  Выберем  $r_0 < \frac{1}{2CL}$ , тогда оператор  $\Phi(V, \lambda)$  при  $\lambda \in S$  и  $\|V\| \leq r_0$  будет сжатием.

Более того, при достаточно малых  $\lambda$  в силу оценки 4) оператор  $\Phi(V, \lambda)$  переводит шар  $\|V\| \leq r_0$  в себя. Действительно,

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda) F(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \frac{C_1}{a^2(\lambda)} \|F(0, \lambda)\|.$$

Далее, в силу условия 4), можно выбрать множество  $S_0 \subset S$  так, что при  $\forall \lambda \in S_0$  будет выполнено  $\frac{C_1}{a^2(\lambda)} \|F(0, \lambda)\| \leq (1 - q)r_0$ .

Поэтому на основании принципа сжимающих отображений операторное уравнение (2) имеет единственное решение  $V(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Возвращаясь к переменной  $x$  получаем, что уравнение (1) имеет малое непрерывное решение, вообще говоря, не единственное.  $\square$

Если  $F_x(0, 0) \neq 0$ , то следующий результат позволяет в приложениях ослаблять условие 4) теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 1 и пусть выполнено условие:

5) линейное уравнение  $F_x(0, 0)x = F(0, \lambda)$ , где  $\lambda \in S$ , имеет решение  $x^*(\lambda)$ , причем выполнены оценки  $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$  и  $\|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| = O(a(\lambda))$  при  $\lambda \in S$ .

Тогда найдется число  $r_0 \in (0, r)$  и секториальная квазиокрестность нуля  $S_0 \subset S$  такие, что для каждого  $\lambda \in S_0$  уравнение (1) имеет в шаре  $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$  непрерывное решение  $x(\lambda) \rightarrow 0$  при  $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Уравнение (1) с помощью замены  $x = a(\lambda)V$  приводится к эквивалентному уравнению (2).

Сжимаемость оператора  $\Phi(V, \lambda)$  вытекает из условий 1)-3). (см. док-во теоремы 1). Покажем, что при достаточно малых  $\lambda \in S_0 \subset S$ , оператор  $\Phi(V, \lambda)$  переводил шар  $\|V\| \leq r_0$  в себя. Действительно, в силу условия 5) имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda)\| &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda) F(0, \lambda)\| = \\ &= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \left\| F_x^{-1}(0, \lambda) \left\{ F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda) + F_x(0, \lambda) \right\} x^*(\lambda) \right\| \leq qr_0 + \frac{C}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

В силу оценки из условия 5) при достаточно малых  $\lambda \in S_0 \subset S$  выполнится неравенство  $\frac{C}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\| \leq (1 - q)r_0$ , где  $C - const.$  Следовательно,  $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$  при  $\|V\| \leq r_0$  и  $\lambda \in S_0$ .  $\square$

**Пример 1.** Покажем, что уравнение

$$F(x, \lambda) \equiv \int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^3(s) ds - f(t, \lambda) = 0, \quad (6)$$

где  $x(t) \in C_{[0,1]}$ ,  $f(t, \lambda) = m(t)\lambda^n$ ,  $m(t) \in C_{[0,1]}$ ,  $n \geq 2$ ,  $S$  – суть проколота окружность нуля, имеет малое непрерывное решение  $x_\lambda(t) \rightarrow 0$  при  $S \ni \lambda \rightarrow 0$ . Здесь дифференциал Фреше имеет вид

$$F_x(x, \lambda)h = \int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t) - 3 \int_0^1 x^2(s)h(s) ds,$$

при этом

$$F_x^{-1}(0, \lambda)h = \frac{h(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 sh(s) ds.$$

Далее,  $F_x(0, 0) = 0$  и выполнена оценка

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Условия 1), 2) очевидно выполнены. В силу неравенств

$$\|F_x(x, \lambda)h - F_x(0, \lambda)h\| = \left\| 3 \int_0^1 x^2(s)h(s) ds \right\| \leq 3r\|x\| \|h\|$$

условие 3) тоже выполнено. Если  $n > 2$ , то выполнено условие 4), и по теореме 1, уравнение имеет малое непрерывное решение  $x_\lambda(t) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Если  $n = 2$ , то условие 4) не выполняется, но будет выполнено условие 5), если  $m(t) = \text{const} \cdot t$ . Таким образом, для того, чтобы данное уравнение при  $n = 2$  имело решение  $x_\lambda(t) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , достаточно, чтобы  $m(t) = \text{const} \cdot t$ .

**Пример 2.** Покажем, что двухточечная краевая задача для интегро-дифференциальной системы

$$\begin{cases} -y''(t) = x(t), & y(0) = y(1) = 0, & 0 < t < 1 \\ y(t) + \lambda x(t) + t \int_0^1 x(s)y(s) ds + f(t, \lambda) = 0, & \lambda > 0 \end{cases}$$

где  $f(t, \lambda) = m(t)\lambda^n$ ,  $m(t) \in L_2[0,1]$ ,  $n \geq 2$ , имеет малое непрерывное решение  $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \rightarrow (0, 0)$  при  $\lambda \rightarrow +0$ .

Из первого уравнения системы имеем  $y(t) = \int_0^1 G(t, s)x(s) ds$ , где

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \\ (1-t)s, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Подставляя полученное выражение для  $y(t)$  во второе уравнение получим нелинейное интегральное уравнение:

$$F(x, \lambda) \equiv \int_0^1 G(t, s)x(s) ds + \lambda x(t) + t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds + f(t, \lambda) = 0.$$

Проверим выполнение условий теорем. Очевидно,  $F(x, \lambda)$  и  $F_x(x, \lambda)$  непрерывные операторы по  $x$  и  $\lambda$ . Далее,  $F_x(0, 0) = 0$ , а оператор  $F_x(0, \lambda)$  непрерывно обратим при  $\lambda > 0$ , причем выполнена оценка  $\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O(\frac{1}{\lambda})$ . Таким образом, выполнены условия 1), 2). Условие 3) справедливо ввиду оценки:

$$\begin{aligned} \|F_x(x, \lambda)h - F_x(0, \lambda)h\| &= \left\| t \int_0^1 \int_0^1 G(s, z)(x(s)h(z) + h(s)x(z)) dz ds \right\| \leq \\ &\leq \|t\| \cdot \|x\| \cdot \|h\| \cdot \int_0^1 \int_0^1 2\|G(s, z)\| dz ds \leq L\|x\| \cdot \|h\|. \end{aligned}$$

Условие 4), очевидно, выполнено при  $n > 2$ . Поэтому, по теореме 1, при  $n > 2$  уравнение имеет малое непрерывное решение  $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \rightarrow (0, 0)$  при  $\lambda \rightarrow +0$ . Если  $n = 2$ , то условие 4) не выполняется, но выполнится условие 5), если  $m(t)$  дважды дифференцируемая функция, причем  $m(0) = m(1) = 0$ . Таким образом, для того, чтобы данное уравнение при  $n = 2$  имело решение  $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \rightarrow (0, 0)$  при  $\lambda \rightarrow +0$  достаточно, чтобы  $m(t)$  была дважды дифференцируемой функцией, причем  $m(0) = m(1) = 0$ .

При проверке условий теорем 1, 2 в ряде приложений можно использовать следующий результат Н.А. Сидорова об обратимости оператор функций в окрестности фредгольмовых точек.

Рассматривается оператор-функция  $B - \lambda A$ , где  $B, A$  — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховых пространствах, с плотными областями определения,  $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A)$ . Фредгольмов оператор  $B$  имеет канонический полный  $A$ -жорданов набор (см. [3, гл. 9], [4]). Пусть  $\{\varphi_i^{(1)}\}, \{\psi_i^{(1)}\}, i = \overline{1, n}$  — базисы в  $\mathcal{N}(B)$  и  $\mathcal{N}(B^*)$  соответственно, проекторы

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle z_i^{(j)}, \quad P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \gamma_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(j)},$$

где  $B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}, B^*\psi_i^{(j)} = A^*\psi_i^{(j-1)}, \gamma_i^{(j)} = A\varphi_i^{(p_i+1-j)}, z_i^{(j)} = A^*\psi_i^{(p_i+1-j)}$  и ограниченный оператор

$$\Gamma = (B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i^{(j)} \rangle z_i^{(j)})^{-1}$$

соответствуют этому жорданову набору. Известно, что канонические полные наборы существуют и проекторы  $P$  и  $Q$  могут быть построены, если  $\lambda = 0$  — изолированная особая фредгольмова точка, т.е. оператор  $B - \lambda A$  непрерывно обратим в окрестности  $0 < |\lambda| < \rho$  (или, эквивалентно,  $\mu B - A$ , в окрестности  $R < |\mu| < +\infty$ ).

**Теорема 3.** *Оператор  $B - \lambda A$  непрерывно обратим в окрестности  $0 < |\lambda| < \rho$  тогда и только тогда, когда  $B$  имеет канонический полный  $A$ -жорданов набор. Причем при  $\lambda < \frac{1}{\|\Lambda\Gamma\|}$*

$$(B - \lambda A)^{-1} = \Gamma (I - \lambda A\Gamma)^{-1} (I - Q) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \sum_{s=1}^j \lambda^{-s} \langle \cdot, \psi_i^{(j+1-s)} \rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)}. \quad (11)$$

Теорема дополняет один известный результат о жордановых наборах (см. [3, гл. 9], [4]), так как здесь приводится компактное явное представление обратного оператора



ра  $(B - \lambda A)^{-1}$ . Доказательство тождества (11) использует  $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ -сплетаемость операторов  $B$ ,  $A$ ,  $\Gamma$  и представление единственного решения уравнения  $(B - \lambda A)x = f$  в виде  $x = \Gamma y + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} c_{ij} \varphi_i^{(j)}$ , где  $y = (I - \lambda A \Gamma)^{-1} (I - \mathcal{Q}) f$ . Вектор  $C$  из пространства  $R^{p_1 + \dots + p_n}$  определяется из системы линейных алгебраических уравнений с обратимой блочно-диагональной матрицей.

**Следствие 1.** Оценка  $\|(B - \lambda A)^{-1}\| \sim \frac{C}{|\lambda|^p}$  при  $\lambda \rightarrow 0$  (соответственно, оценка  $\|(\mu B - A)^{-1}\| \sim C |\mu|^{p-1}$  при  $\mu \rightarrow +\infty$ ) выполнена тогда и только тогда, когда  $p = \max(p_1, \dots, p_n)$ .

**Замечание 1.**  $p = 1$  тогда и только тогда, когда  $\det \left[ \langle A \varphi_i^{(1)}, \psi_k^{(1)} \rangle \right]_{i,k=1}^n \neq 0$ .

Автор благодарен профессору Н.А. Сидорову за постановку задачи и ценные замечания.

## Литература

1. Сидоров, Н.А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н.А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – Вып. 14. – С. 161 – 164.
2. Леонтьев, Р.Ю. Теорема о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». – Иркутск, 2007. – С. 20.
3. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. – М: Наука, 1969.
4. Логинов, Б.В. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления / Б.В. Логинов, Ю.В. Русаков // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и приложения. – Ташкент, 1978. – С. 133 – 148.
5. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М: Физматлит, 2002.

Кафедра математического анализа,  
Иркутский государственный университет  
lev\_roma@bk.ru

Поступила в редакцию 28 февраля 2008 г.

## МОДЕЛЬ ВАРИАНТОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ БАЗАМИ ДАННЫХ ДЛЯ ГРИД

*А.В. Лепихов*

Статья посвящена вопросам проектирования параллельных систем управления базами данных для грид-систем. Описаны общие требования и структура ПСУБД. Описана модель вариантов использования системы, приведены спецификации и диаграммы вариантов использования подсистем «Клиент» и «Координатор».

**Ключевые слова:** варианты использования, грид, система баз данных, параллельная обработка

### Введение

В связи со значительным ростом хранимой в электронном виде информации, в настоящее время системы баз данных зачастую используются для управления петабайтами данных. Типичным примером таких сверхбольших баз данных являются научные базы данных, накапливающие информацию, поставляемую ускорителями элементарных частиц. Подобные базы данных могут эффективно поддерживаться и обрабатываться параллельными системами управления базами данных (ПСУБД).

По этой причине в настоящее время одним из перспективных направлений в области параллельных систем баз данных является разработка систем управления базами данных для аппаратных платформ с многопроцессорной иерархической архитектурой и грид-систем. В такой системе процессорные устройства, память, диски и проч. связываются друг с другом в соответствии с некоторой иерархией. На первом уровне иерархии находятся процессорные ядра, размещенные на одном кристалле. На втором уровне находятся многоядерные процессоры, объединенные в многопроцессорные модули с общей памятью (SMP). На третьем уровне SMP-модули объединяются в кластер с помощью высокоскоростной соединительной сети. Четвертый уровень представляют грид-системы, включающие в себя несколько кластеров. Корпоративные грид-системы могут объединяться в кооперативные грид-объединения на базе Интернет.

Параллельным системам управления базами данных посвящено большое количество работ, обзор которых можно найти в [1–3]. Однако проблематика систем баз данных для грид исследована мало.

Целью настоящей статьи является описание спецификации ПСУБД ориентированной на использование в грид. Спецификация параллельной СУБД для грид разработана с учетом распределенного характера системы, неоднородности вычислительных узлов и коммуникационной сети. ПСУБД проектируется таким образом, чтобы изолировать пользователя от сложной структуры и технологий, лежащих в основе грид-системы. Требования к ПСУБД задаются при помощи модели вариантов использования [4], построенной на основе языка моделирования UML версии 2.0 [5].

Статья организована следующим образом. В разделе 1 описан механизм обработки запросов в параллельных СУБД и рассмотрена проблема появления перекосов. Приведены

основные требования, предъявляемые к разрабатываемой ПСУБД для грид-систем. В Разделе 2 рассмотрена структура ПСУБД, дано описание подсистем «Клиент», «Координатор» и «Ядро ПСУБД». Приводится диаграмма состояний подсистемы «Клиент». Раздел 3 посвящен описанию вариантов использования ПСУБД. Специфицированы варианты использования подсистем «Клиент» и «Координатор», представлены диаграммы вариантов использования. В разделе 4 дано описание форматов входных и выходных данных ПСУБД. В заключении суммируются основные полученные результаты.

## 1. Организация параллельной обработки запросов

### 1.1. Фрагментный параллелизм

Вопросам организации параллельной обработки запросов в многопроцессорных системах посвящен целый ряд работ (см. [6–8]). Одной из основных форм параллельной обработки запросов является *фрагментный параллелизм*. Фрагментный параллелизм предполагает *фрагментацию* – разбиение на непересекающиеся части каждого отношения базы данных. Фрагменты отношения распределяются по различным процессорным узлам многопроцессорной системы. Основная идея заключается в том, чтобы преобразовать запрос в набор параллельных агентов, каждый из которых будет обрабатывать свою часть запроса на выделенном для него процессорном узле. При этом он будет использовать расположенный на данном узле фрагмент и (возможно) результаты работы других агентов. В работе [6] преобразование запроса в набор параллельных агентов достигается путем вставки специального оператора *exchange* в дерево запроса. Обработка запроса в таком случае происходит следующим образом [9]. Пусть система состоит из  $n$  процессорных узлов. Запрос на языке SQL передается пользователем на *host*-машину, где он транслируется в некоторый *последовательный физический план*. Данный физический план преобразуется в *параллельный план*, представляющий собой совокупность параллельных агентов. Это достигается путем вставки параллельного оператора *exchange* в соответствующие места дерева запроса. Оператор *exchange* организует взаимодействие параллельных агентов и обеспечивает пересылку кортежей между агентами в тех случаях, когда это необходимо.

На следующем этапе параллельные агенты пересылаются с *host*-машины на соответствующие процессорные узлы, где интерпретируются исполнителем запросов. Результаты выполнения агентов объединяются корневым оператором *exchange* на выделенном процессорном узле.

### 1.2. Балансировка загрузки

Большое негативное влияние на производительность параллельных СУБД для многопроцессорных систем оказывает проблема перекосов [9]. Суть проблемы заключается в следующем. При параллельной обработке запроса каждый агент обрабатывает свою часть запроса на отдельном процессорном узле. В этом случае возникает ситуация, когда один или несколько агентов завершают обработку, в то время как остальные (загруженные) агенты активно работают. Таким образом, при обработке запроса часть процессорных узлов может простаивать, что уменьшает эффект от распараллеливания и увеличивает время обработки запроса. Подобные ситуации могут возникать вследствие неоднородности процессорных узлов, при неравномерном распределении базы данных по процессорным узлам и т.д.

Одним из наиболее известных способов решения данной проблемы является использование алгоритмов балансировки загрузки, основанных на репликации базы данных. В работе [10] в качестве стратегии репликации предлагается метод частичного зеркалирования. При использовании данной стратегии каждый фрагмент на логическом уровне разбивает-

ся на равномошные сегменты, являющиеся единицами репликации данных и балансировки загрузки. Фрагмент, расположенный на одном узле, частично реплицируется на остальных узлах многопроцессорной системы. Размер реплицируемой части фрагмента на каждом узле задается некоторым коэффициентом репликации.

Указанный метод позволяет нейтрализовать негативный эффект ситуации перекося: уменьшить время простоя процессорного узла и время обработки запроса.

### 1.3. Общие требования к параллельной СУБД

Параллельная система управления базами данных (ПСУБД) представляет собой программную систему, которая предназначена для параллельной обработки запросов в распределенных вычислительных системах.

ПСУБД поддерживает фрагментный параллелизм и имеет механизм балансировки загрузки, основанный на стратегии репликации, называемый методом частичного зеркалирования [10]. Заложенный в ПСУБД параллелизм обработки запросов прозрачен для пользователя.

ПСУБД поддерживает многопользовательский режим работы, т.е. одновременно система может обрабатывать запросы нескольких пользователей. Для организации приема запросов от пользователей в ПСУБД использован реляционный язык запросов RQL (см. раздел 4.1). Запрос, записанный на языке RQL, передается ПСУБД в виде текстового файла. После окончания обработки запроса ПСУБД передает пользователю *результатирующую таблицу и лог-файл*.

Результатирующая таблица представляется в виде текстового файла в формате CSV (Comma Separated Value) [11]. Если результатом запроса является пустая таблица, то текстовый файл с результирующей таблицей будет пустым.

Лог-файл передается пользователю в виде текстового файла в формате CSV. Лог-файл содержит диагностические сообщения о ходе выполнения запроса. Структура и семантика сообщений лог-файла определены в разделе 4.2.

## 2. Структура ПСУБД

Параллельная СУБД состоит из объектов четырех классов: *Пользователь Клиент*, *Координатор* и *Ядро ПСУБД*. Пример, демонстрирующий статическую структуру ПСУБД, показан на рис. 1.

Пользователь представляет собой человека, взаимодействующего с ПСУБД посредством Клиента, однако Клиент допускает вызов в формате командной строки и может быть использован программными системами, являющимися внешними по отношению к ПСУБД.

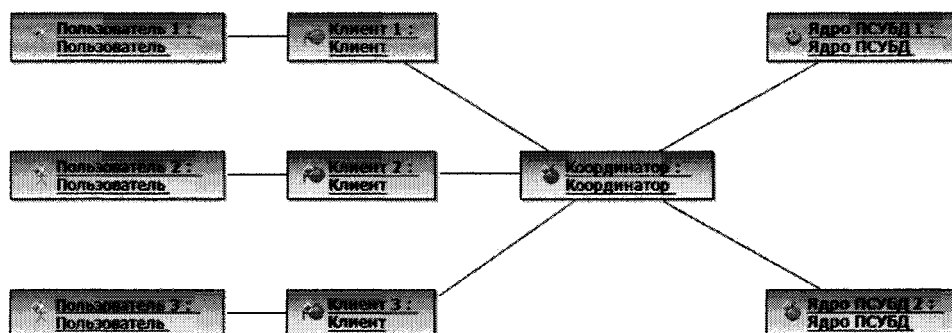


Рис. 1. Диаграмма объектов для случая с тремя Пользователями и двумя Ядрами ПСУБД

Клиент представляет собой подсистему ПСУБД, реализующую интерфейс Пользователя. Для каждого Пользователя ПСУБД порождается отдельный экземпляр Клиента. Поступающие от пользователя запросы Клиент передает Координатору, который обеспечивает совместную обработку запроса Ядрами ПСУБД.

Основной задачей Координатора является доставка запроса от Клиента на Ядра ПСУБД. Координатор принимает запрос от каждого обратившегося к нему Клиента и передает его Ядрам ПСУБД, которые будут выполнять обработку данного запроса. В рамках рассматриваемого примера совместная обработка запросов осуществляется двумя Ядрами ПСУБД и управляется одним Координатором. В целях повышения производительности в распределенной вычислительной системе может быть запущено несколько Координаторов. В таком случае Клиент может обращаться с запросами к любому доступному Координатору. Необходимость введения дополнительного Координатора может возникать, например, при увеличении количества Клиентов или объемов поступающих от Ядер ПСУБД результатов.

Ядро ПСУБД непосредственно выполняет обработку запроса и передает результат тому Координатору, от которого поступил запрос.

На рис. 2 показана типовая конфигурация размещения подсистем ПСУБД. Клиент запускается на рабочей станции пользователя (в данной конфигурации на консоли). Если с ПСУБД на одной рабочей станции взаимодействует несколько пользователей, то для каждого пользователя на данной рабочей станции запускается отдельный экземпляр Клиента.

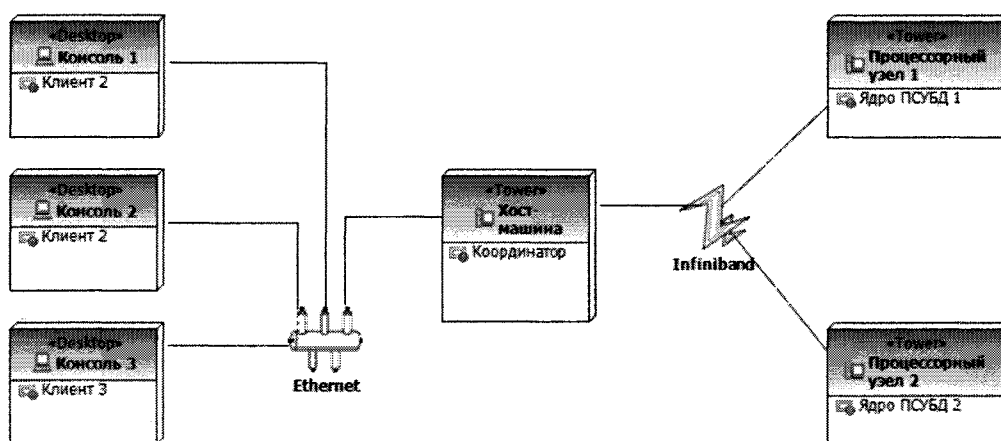


Рис. 2. Диаграмма размещения подсистем ПСУБД для случая с тремя Пользователями и двумя Ядрами ПСУБД

Координатор размещается в распределенной вычислительной системе на выделенном узле (хост-машине). Координатор взаимодействует с Клиентами через локальную коммуникационную сеть (в данном случае Ethernet). Координатор взаимодействует с ядрами через коммуникационную сеть (в данном случае Infiniband). Ядро ПСУБД размещается на выделенном ему процессорном узле. Процессорные узлы системы соединяются между собой коммуникационной сетью (Infiniband).

### 2.1. Подсистема «Клиент»

Клиент предоставляет пользователю интерфейс доступа к ПСУБД; обеспечивает передачу запросов ПСУБД, мониторинг процесса обработки запроса и доступ к результату его выполнения. В каждый момент времени Клиент может обрабатывать только один запрос пользователя. Клиент может использоваться в диалоговом и пакетном режимах. При

использовании Клиента в диалоговом режиме пользователю предоставляется диалоговое окно, основными элементами которого являются строка ввода запроса, область просмотра результата и область просмотра диагностических сообщений. В пакетном режиме работы Клиенту передается имя файла с запросом и имя файла, в который будет записана результирующая таблица.

На рис. 3 показана диаграмма состояний Клиента. Клиент может находиться в одном из семи состояний: «Ожидание запроса», «Выполнение запроса», «Сохранение результата», «Сохранение лог-файла», «Прием сообщения», «Прием результата», и «Прерывание запроса».

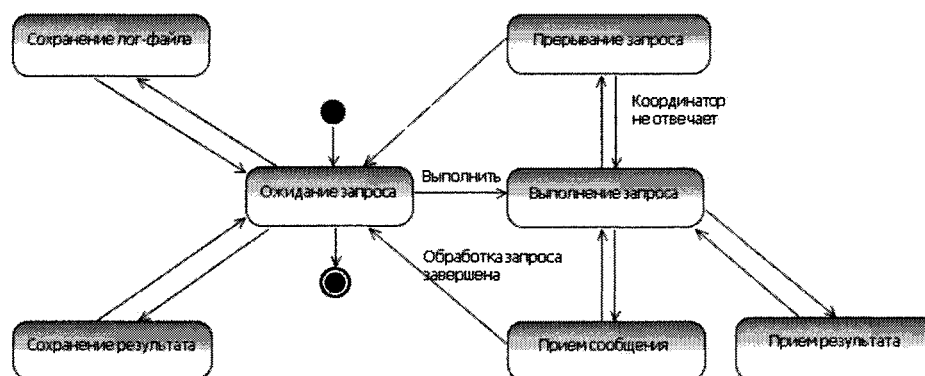


Рис. 3. Диаграмма состояний подсистемы «Клиент»

Рабочий цикл Клиента начинается с состояния «Ожидание запроса», в котором Клиент ожидает команд от Пользователя. Из данного состояния Клиент может перейти в состояние «Выполнение запроса», «Сохранение результата» или «Сохранение лог-файла». Пользователь может также корректно завершить Клиента, вызвав функцию «Завершить работу».

В состоянии «Выполнение запроса» Клиент ожидает результатов обработки запроса от Координатора. При поступлении от Координатора результирующей таблицы или диагностического сообщения, Клиент переходит в состояние «Прием результата» или «Прием сообщения» соответственно. Пользователь может спровоцировать прерывание обработки запроса, вызвав функцию Клиента «Прервать». При этом, Клиент переходит в состояние «Прерывание запроса».

В состоянии «Сохранение результата» Клиент помещает результирующую таблицу в заданный пользователем файл. При нормальном завершении операции Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса».

В состоянии «Сохранение лог-файла» Клиент помещает полученные в ходе обработки запроса диагностические сообщения в указанный пользователем лог-файл. При нормальном завершении операции Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса».

В состоянии «Прием сообщения» Клиент принимает диагностическое сообщение от Координатора. Если полученное сообщение уведомляет об окончании обработки запроса, то Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса». В противном случае он переходит в состояние «Выполнение запроса».

В состоянии «Прием результата» Клиент принимает результирующую таблицу от Координатора. При нормальном завершении операции Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса».

В состоянии «Прерывание запроса» Клиент передает Координатору сообщение о прерывании обработки запроса. Если сообщение удастся передать Координатору, прерывание запроса заканчивается успешно и Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса». Если

Координатор оказывается недоступен, Клиент переходит в состояние «Выполнение запроса».

## 2.2. Подсистема «Координатор»

Координатор организует параллельное выполнение запроса на множестве Ядер ПСУБД. При этом, одно Ядро ПСУБД одновременно может обрабатывать несколько запросов. Координатор может взаимодействовать с несколькими Клиентами. Во время работы Координатор ведет лог-файл, в который заносятся диагностические сообщения о работе Координатора.

## 2.3. Подсистема «Ядро ПСУБД»

Ядро ПСУБД работает на отдельном SMP-узле и выполняет обработку поступающих запросов в асинхронном режиме. На одном SMP-узле может работать только одно Ядро ПСУБД. Ядро ПСУБД поддерживает межтранзакционный параллелизм, т.е. одновременно может обрабатывать несколько запросов.

## 3. Модель вариантов использования

В данном разделе приведены варианты использования подсистем «Клиент» и «Координатор». Вариант использования описывается в соответствии со следующей дисциплиной. Во-первых, приводится краткое описание варианта использования и предварительные условия, необходимые для начала его выполнения. Во-вторых, приводится описание основных шагов, составляющих поток событий варианта использования. В-третьих, обсуждаются альтернативные потоки событий, приводятся дополнительные требования.

### 3.1. Варианты использования подсистемы «Клиент»

Для подсистемы «Клиент» нами выделяются следующие варианты использования, приведенные на рис. 4: «Выполнить», «Прервать», «Передать сообщение», «Пополнить результат», «Сохранить результат», «Сохранить лог-файл» и «Завершить работу». Варианты использования предусматривают диалоговый и пакетный режимы работы Клиента. Далее в этом разделе приводится детальное описание каждого варианта использования.

#### 3.1.1. Вариант использования «Выполнить»

Данный вариант использования передает запрос от Пользователя к Координатору. Вариант использования начинается, когда Пользователь указывает путь к текстовому файлу с запросом и активирует функцию «Выполнить». При этом Клиент должен находиться в состоянии ожидания запроса и текстовый файл с запросом должен существовать на узле Клиента.

Поток событий состоит из следующих шагов. На первом шаге Клиент переходит в состояние «Выполнение запроса» и подготавливает систему к обработке запроса: очищает область просмотра результирующей таблицы, очищает область просмотра сообщений, формирует пустой файл результата и пустой лог-файл. На втором шаге Клиент передает текстовый файл с запросом Координатору. Вариант использования завершается.

Вариант использования предусматривает один альтернативный поток событий. Если попытка Клиента передать запрос Координатору завершается неудачей, то Клиент выводит в области просмотра соответствующее сообщение об ошибке, записывает его в лог-файл и переходит в состояние «Ожидание запроса». Вариант использования завершается.

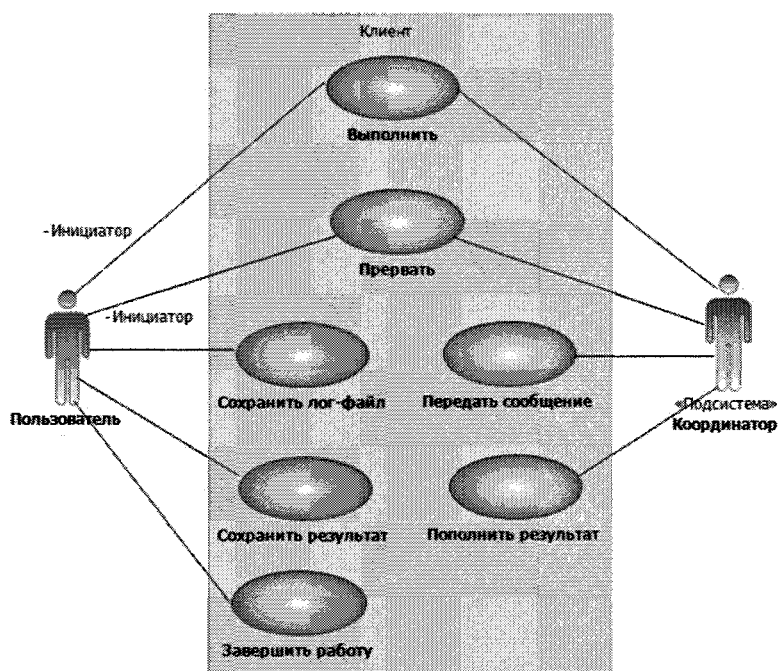


Рис. 4. Диаграмма вариантов использования подсистемы «Клиент»

### 3.1.2. Вариант использования «Прервать»

Данный вариант использования осуществляет прерывание выполнения запроса (досрочное завершение) по требованию Пользователя. Вариант использования начинается, когда Пользователь вызывает функцию «Прервать». При этом Клиент должен находиться в состоянии «Выполнение запроса».

Поток событий состоит из следующих шагов. На первом шаге Клиент переходит в состояние вывода сообщения и посылает Координатору сообщение «Прервать». Если передача сообщения завершается успешно, то на втором шаге Клиент формирует сообщение о досрочном прерывании запроса, выводит его в области просмотра сообщений и записывает в лог-файл. На последнем шаге Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса». Вариант использования завершается.

Если попытка Клиента передать сообщение Координатору завершается неудачей, то он формирует сообщение об ошибке, выводит его в области просмотра и записывает в лог-файл. После этого Клиент переходит в состояние «Выполнение запроса». Вариант использования завершается.

### 3.1.3. Вариант использования «Передать сообщение»

Данный вариант использования уведомляет Клиента о возникновении некоторого существенного события в ходе выполнения запроса. Вариант использования начинается, когда Координатор вызывает функцию «Передать сообщение». При этом Клиент должен находиться в состоянии «Выполнение запроса».

Поток событий состоит из следующих шагов. На первом шаге Клиент переходит в состояние «Прием сообщения» и получает от Координатора диагностическое сообщение. На втором шаге Клиент выводит полученное сообщение в области просмотра сообщений и записывает его в лог-файл. На третьем шаге Клиент переходит в состояние «Выполнение запроса». Вариант использования завершается.

Вариант использования предусматривает альтернативный поток событий. Если Кли-



ент на первом шаге получает от Координатора сообщение с кодом фатальной ошибки или кодом, соответствующим нормальному завершению, то выполняется следующая последовательность шагов. На первом шаге Клиент выводит полученное сообщение в области просмотра сообщений и записывает его в лог-файл. На втором шаге Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса», после чего вариант использования завершается.

#### **3.1.4. Вариант использования «Пополнить результат»**

Данный вариант использования передает очередную часть результирующей таблицы от Координатора Клиенту. Вариант использования начинается, когда Координатор вызывает функцию «Пополнить результат».

Поток событий состоит из следующих шагов. На первом шаге Клиент переходит в состояние «Прием результата» и принимает от Координатора очередную часть результирующей таблицы. На втором шаге Клиент выводит полученную часть результирующей таблицы в области просмотра результата и записывает ее в результирующий файл. На третьем шаге Клиент переходит в состояние выполнения запроса. Вариант использования завершается.

#### **3.1.5. Вариант использования «Сохранить результат»**

Данный вариант использования помещает результат запроса в текстовый файл в формате CSV. Вариант использования начинается, когда Пользователь вызывает функцию «Сохранить результат». При этом Клиент должен находиться в состоянии ожидания нового запроса.

Поток событий состоит из следующих шагов. На первом шаге Клиент переходит в состояние «Сохранение результата», получает от Пользователя имя файла, в который будет помещена результирующая таблица. На втором шаге Клиент сохраняет результирующую таблицу в текстовом файле, указанном пользователем, в формате CSV. На третьем шаге Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса». Вариант использования завершается.

Полученная Клиентом результирующая таблица хранится во временном файле до тех пор, пока Пользователь не запустит выполнение нового запроса.

#### **3.1.6. Вариант использования «Сохранить лог-файл»**

Данный вариант использования сохраняет лог-файл запроса в текстовом файле в формате CSV. Вариант использования начинается, когда Пользователь вызывает функцию «Сохранить лог-файл». При этом Клиент должен находиться в состоянии «Ожидание запроса».

Поток событий состоит из следующих шагов. На первом шаге Клиент переходит в состояние «Сохранение лог-файла», запрашивает у Пользователя путь и имя файла для сохранения лог-файла. На втором шаге Клиент сохраняет лог-файл в текстовом файле, указанном пользователем. На третьем шаге Клиент переходит в состояние «Ожидание запроса». Вариант использования завершается.

Полученные Клиентом от Координатора сообщения хранятся во временном файле до тех пор, пока Пользователь не запустит выполнение нового запроса.

#### **3.1.7. Вариант использования «Завершить работу»**

Данный вариант использования завершает сеанс работы Пользователя с ПСУБД. Вариант использования начинается, когда Пользователь вызывает функцию «Завершить работу». При этом Клиент должен находиться в состоянии «Ожидание запроса».

Поток событий состоит из следующих шагов. На первом шаге Клиент освобождает используемые структуры данных. На втором шаге Клиент завершает свою работу (возвращает

поток управления операционной системе). Вариант использования завершается.

### 3.2. Варианты использования подсистемы «Координатор»

Для подсистемы «Координатор» нами были разработаны следующие варианты использования, приведенные на рис. 5: «Передать запрос», «Передать результат», «Передать сообщение», «Прервать». Координатор взаимодействует с множеством Клиентов и должен представлять собой систему высокой готовности. Поэтому варианты использования спроектированы таким образом, чтобы максимально уменьшить время отклика Координатора. Далее в этом разделе приводится детальное описание каждого варианта использования.

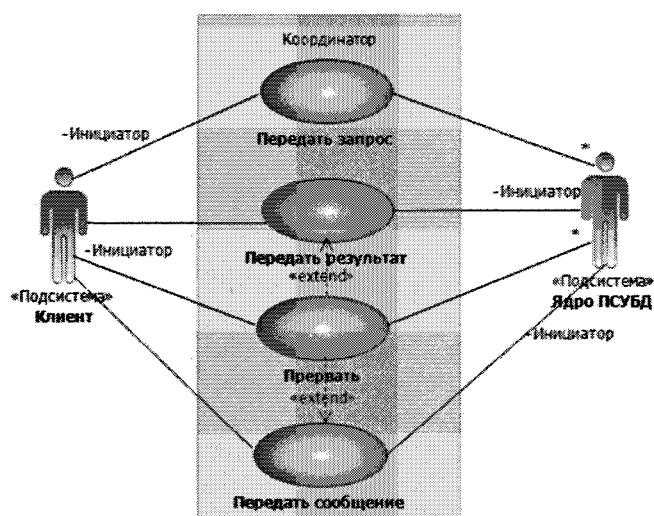


Рис. 5. Диаграмма вариантов использования подсистемы «Координатор»

#### 3.2.1. Вариант использования «Передать запрос»

Передает запрос Ядрам ПСУБД для дальнейшей обработки. Вариант использования начинается, когда Клиент вызывает функцию «Передать запрос».

Поток событий состоит из следующих шагов. На первом шаге Координатор получает запрос от Клиента как параметр функции «Передать запрос». На втором шаге Координатор анализирует файл конфигурации ПСУБД и формирует список Ядер ПСУБД, которые будут выполнять запрос. На третьем шаге Координатор передает запрос Ядрам ПСУБД в асинхронном режиме. Вариант использования завершается.

#### 3.2.2. Вариант использования «Передать результат»

Передает результирующую таблицу, выдаваемую Ядром ПСУБД, Клиенту. Вариант использования начинается, когда Ядро ПСУБД вызывает функцию «Передать результат».

Поток событий состоит из следующей последовательности шагов. На первом шаге Координатор получает результирующую таблицу в виде текстового файла от Ядра ПСУБД в синхронном режиме. На втором шаге Координатор определяет Клиента, который запустил данный запрос и вызывает функцию «Пополнить результат» (передает Клиенту файл с результатом, полученный от Ядра ПСУБД). Вариант использования завершается.

Вариант использования включает в себя следующие два альтернативных потока.

Если на шаге 2 основного потока Координатору не удастся передать результирующую таблицу Клиенту, то выполняются следующие действия. На первом шаге Координатор запи-

сывает в лог-файл сообщение «Клиент недоступен». На втором шаге Координатор вызывает функцию «Прервать». Вариант использования завершается.

Если на шаге 2 основного потока Координатор обнаруживает, что Клиент прервал выполнение запроса, то Координатор удаляет результирующую таблицу и вариант использования завершается.

### 3.2.3. Вариант использования «Передать сообщение»

Уведомляет Координатор о возникновении некоторого существенного события, произошедшего с Ядром ПСУБД. Вариант использования начинается, когда Ядро ПСУБД вызывает функцию «Передать сообщение».

Основной поток событий состоит из следующей последовательности шагов. На первом шаге Координатор получает сообщение от Ядра ПСУБД. На втором шаге Координатор интерпретирует полученное сообщение и формирует диагностическое сообщение для клиента. На последнем шаге Координатор передает данное диагностическое сообщение Клиенту. Вариант использования завершается.

Вариант использования включает в себя три альтернативных потока.

Если Координатору на третьем шаге основного потока событий не удастся передать диагностическое сообщение Клиенту, то начинается выполнение альтернативного потока, состоящего из следующих шагов. На первом шаге Координатор помещает в лог-файл, сообщение «Клиент недоступен». На втором шаге Координатор вызывает функцию «Прервать». Выполнение варианта использования завершается.

Если на шаге 2 основного потока Координатор обнаруживает, что получено сообщение «Обработка запроса завершена» то выполняется следующая последовательность шагов. На первом шаге Координатор удаляет ядро из списка Ядер ПСУБД, выполняющих данный запрос. На втором шаге Координатор передает Клиенту диагностическое сообщение о том, что Ядро ПСУБД завершило обработку запроса. Вариант использования завершается.

Если на шаге 1 альтернативного потока 2 Координатор обнаруживает, что список Ядер ПСУБД, обрабатывающих запрос, пуст, то выполняется следующая последовательность шагов. На первом шаге Координатор передает Клиенту диагностическое сообщение о том, что Ядро ПСУБД завершило обработку запроса. На втором шаге Координатор передает Клиенту диагностическое сообщение «Обработка запроса завершена». Вариант использования завершается.

### 3.2.4. Вариант использования «Прервать»

Останавливает выполнение запроса на ядрах ПСУБД по требованию Клиента. Вариант использования начинается, когда Клиент вызывает функцию «Прервать».

Основной поток событий состоит из следующей последовательности шагов. На первом шаге Координатор получает от Клиента сообщение «Прервать». На втором шаге Координатор посылает всем ядрам ПСУБД, задействованным в обработке запроса, сообщение «Прервать». Вариант использования завершается.

## 4. Форматы входных и выходных данных

### 4.1. Спецификация языка RQL

Язык запросов RQL (Relational Query Language) базируется на реляционной алгебре. Описанная здесь нотация включает в себя операции простой выборки и эквисоединения. Простая выборка (Restrict) допускает только условия следующего вида: <Атрибут>

<Операция сравнения> <Константа>. Операция эквисоединения (eJoin) выполняет соединение по равенству одной пары атрибутов. Предложенная нотация может быть легко распространена на другие реляционные операции.

В качестве разделителя лексем могут использоваться пробелы, символы табуляции, перевода строки и возврата каретки в любом количестве и сочетании.

Грамматика языка RQL, описанная с помощью нотации Бэкуса-Наура представлена ниже:

```
<Запрос> ::= <Оператор>
<Запрос> ::= <Запрос>;<Оператор>
<Оператор> ::= <Метка> <Реляционная операция>
<Реляционная операция> ::= <Выборка> | <Эквисоединение>
<Выборка> ::= R <Условие> <Таблица>
<Условие> ::= <Номер атрибута> <Операция сравнения> <Константа>
<Эквисоединение> ::= Q <Номер атрибута> <Номер атрибута> <Таблица> <Таблица>
<Таблица> ::= <Метка> | <Идентификатор хранимой таблицы>
<Метка> ::= <Целое без знака>
<Номер атрибута> ::= <Целое без знака>
<Операция сравнения> ::= > | < | = <Идентификатор хранимой таблицы> ::= #<Целое без знака>
```

#### 4.2. Спецификация лог-файла

Лог-файл содержит диагностические сообщения, выдаваемые ядрами ПСУБД. В качестве разделителя лексем могут использоваться пробелы, символы табуляции, перевода строки и возврата каретки в любом количестве и сочетании. Описание структуры лог-файла в нотации Бэкуса-Наура представлена ниже:

```
<Лог-файл> ::= <Сообщение>{<Сообщение>}
<Сообщение> ::= <Ядро> <Результат> <Комментарий>
<Ядро> ::= <Целое без знака>
<Результат> ::= <Целое без знака>
<Комментарий> ::= <Строка>
```

### 5. Заключение

В данной работе были описаны спецификации параллельной системы управления базами данных для распределенных Grid-систем. Спецификации разрабатывались при помощи модели вариантов использования на базе языка моделирования UML 2.0. В качестве введения в тематику параллельных СУБД был рассмотрен механизм параллельной обработки запросов, в основе которого лежит фрагментация базы данных по узлам распределенной вычислительной системы. Была рассмотрена проблема возникновения перекосов и возможные методы ее устранения. Описаны основные требования к параллельным СУБД.

Подробно рассмотрена структура ПСУБД, представлены основные подсистемы и схема их взаимодействия. Для описания структуры ПСУБД были разработаны диаграмма объектов и диаграмма размещения. Комментарии к диаграммам подробно описывают структуру ПСУБД и конфигурацию размещения подсистем на процессорных узлах распределенной вычислительной системы. Для уточнения рабочего цикла подсистемы «Клиент» была разработана диаграмма состояний. Для каждого состояния приведены комментарии, описывающие его назначение и условия перехода в другие состояния.

Детально описаны варианты использования для подсистем «Клиент» и «Координатор». Приведены диаграммы вариантов использования данных подсистем. Представлены

форматы входных и выходных данных параллельной ПСУБД.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-07-89148).*

## Литература

1. Gray, J. Query Evaluation Techniques for Large Databases / J. Gray // ACM Computing Surveys. – 1993. – Vol. 25, №2. – P. 73 – 169.
2. Mehta, M. Data Placement in Shared-Nothing Parallel Database Systems / M. Mehta, D.J. DeWitt // The VLDB J. – 1997. – Vol. 6, №1. – P. 53 – 72.
3. Williams, M.H. Data Placement in Parallel Database Systems / M.H. Williams, S. Zhou // Parallel Database Techniques. – 1998. – P. 203 – 218.
4. Rumbaugh, J. Getting started – Using Use Cases to Capture Requirements / J. Rumbaugh // Journal of Object Oriented Programming. – 1994. – Vol. 7, №5. – P. 8 – 12.
5. Selic, B. UML 2: a model-driven development tool / B. Selic // IBM Syst. J. – 2006. – Vol. 45, №3. – P. 607 – 620.
6. Соколинский, Л.Б. Организация параллельного выполнения запросов в многопроцессорной машине баз данных с иерархической архитектурой / Л.Б. Соколинский // Программирование. – 2001. – №6. – С. 13 – 29.
7. The Grid-DBMS: Towards Dynamic Data Management in Grid Environments / G. Aloisio, M. Cafaro, S. Fiore, M. Mirto // Proceedings of the International Conference on Information Technology: Coding and Computing (ITCC'05). – 2005. – Vol. 2. – P. 199 – 204.
8. An adaptive parallel query processing middleware for the grid / DaSilva V.F., Dutra M.L., Porto F., Schulze B., Barbosa A. C., de Oliveira J.C. // Concurr. Comput. : Pract. Exper. – 2006. – Vol. 18, №6. – P. 621 – 634.
9. Костенецкий, П.С. Технологии параллельных систем баз данных для иерархических многопроцессорных сред / П.С. Костенецкий, А.В. Лепихов, Л.Б. Соколинский // Автоматика и телемеханика. – 2007. – Т. 68, №5. – С. 847 – 859.
10. Лепихов, А.В. Стратегия размещения данных в многопроцессорных системах с симметричной иерархической архитектурой / Лепихов А.В., Соколинский Л.Б. // Научный сервис в сети Интернет: технологии параллельного программирования: тр. Всерос. науч. конф. (18 – 23 сент. 2006 г., г. Новороссийск). – М., 2006. – С. 39 – 42.
11. RFC4180: Common Format and MIME Type for Comma-Separated Values (CSV) Files: (<http://tools.ietf.org/html/rfc4180>), October 2005.

Кафедра системного программирования,  
Южно-Уральский государственный университет  
lepihov@susu.ru

*Поступила в редакцию 10 марта 2008 г.*

## ПРИМЕНЕНИЕ ДОПОЛНЕНИЙ ПАРОСОЧЕТАНИЯМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ MAX TSP

*А.В. Панюков, С.А. Тычинин*

Изложен подход к приближенному решению задачи коммивояжера на максимум (MAX TSP), основанный на дополнении частичного тура паросочетаниями подграфа открытых вершин. Проведено аналитическое исследование, показавшее, что алгоритм, основанный на непосредственном применении данного подхода, во-первых, имеет вычислительную сложность не более  $O(n^3)$ ,  $n$  – число городов, во-вторых, не улучшает гарантированные оценки точности известных алгоритмов. Предложена модификация алгоритма Сердюкова, имеющая оценку вычислительной сложности  $O(n^3)$  и наилучшую гарантированную оценку точности. Представлены результаты вычислительного эксперимента, позволяющие выдвинуть гипотезу об асимптотической точности алгоритма для достаточно широкого класса задач.

**Ключевые слова:** *гамильтонов цикл, задача коммивояжера, приближенный алгоритм, паросочетание, оценки точности, вычислительная сложность, вычислительный эксперимент*

### Введение

Пусть  $G = (V, E)$  – полный неориентированный граф с множеством вершин  $V : |V| = n$  и множеством ребер  $E$ . Пусть для каждого ребра  $e \in E$  задан его вес  $c(e)$ . Для множества ребер  $E' \subseteq E$  будем обозначать  $c(E') = \sum_{e \in E'} c(e)$ . Гамильтонов цикл – это цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. Задача коммивояжера на максимум (MAX TSP) заключается в нахождении в графе  $G$  гамильтонового цикла максимального веса.

Подмножество ребер некоторого гамильтонова цикла называют частичным туром. Вершины частичного тура, инцидентные двум ребрам, называют закрытыми, остальные вершины называют открытыми. Подмножество  $E' \subseteq E$  ребер  $G$  называется паросочетанием (совершенным паросочетанием), если каждая вершина  $v \in V$  инцидентна не более (соответственно ровно) одному ребру  $E'$ . Подмножество  $E' \subseteq E$  ребер графа  $G$  называется 2-фактором, если каждая вершина  $v \in V$  инцидентна ровно двум ребрам в  $E'$ . Для отыскания обоих суграфов максимального веса известны алгоритмы с временной сложностью  $O(n^3)$  [6, 7].

Будем говорить, что алгоритм имеет оценку точности  $\rho$ , если отношение длины найденного гамильтонового тура к длине оптимального маршрута не меньше  $\rho$ . Рассматриваемая задача MAX SNP-трудна [4], то есть из существования полиномиальной аппроксимационной схемы (PTAS) для ее решения следует, что  $P = NP$ . Оценки точности лучших на сегодняшний момент алгоритмов для приближенного решения симметрической и метрической MAX TSP приведены в таблице.

Точность алгоритмов для MAX TSP

Название алгоритма	Оценка точности
<b>Симметрическая TSP</b>	
Алгоритм Сердюкова [1]	3/4
Алгоритм HR1 [9]	25/33 *
Алгоритм 61/81 [5]	61/81 **
<b>Метрическая TSP</b>	
Алгоритм Косточки – Сердюкова [8]	5/6
Алгоритм HR2 [8]	7/8 **
Алгоритм 17/20 [5]	17/20 *

Алгоритмы, оценки точности которых помечены звездочками, являются рандомизированными, а пометка двумя звездочками означает асимптотичность оценки. И в том, и в другом случае оценки точности не являются гарантированными.

В данной работе для решения задачи MAX TSP представлены анонсированные ранее алгоритм [3] и модификация алгоритма Сердюкова [2]. Данные алгоритмы предварительно строят специальные частичные туры, а затем их дополняют до гамильтонового цикла паросочетаниями подграфов открытых вершин. Гарантированные оценки точности для алгоритма [3] – 2/3 для симметрической TSP, и 7/9 для метрической. Оценка точности модификации алгоритма Сердюкова – 3/4 для симметрической TSP, и 5/6 для метрической. Вычислительная сложность всех алгоритмов не превосходит величины  $O(n^3)$ .

### Алгоритм дополнения паросочетаниями

В основе разработанного алгоритма лежит идея дополнения частичного тура до гамильтонового цикла ребрами паросочетаний подграфа на открытых вершинах.

Поясним эту идею. Первым шагом алгоритма является построение 2-фактора максимального веса. После этого производится разрыв полученных циклов удалением ребра минимального веса. Далее выполняется процедура дополнения полученного частичного тура паросочетанием максимального веса на подграфе графа  $G$  индуцированным множеством открытых вершин этого частичного тура. В результате будет получен 2-фактор с числом компонент связности, по крайней мере, в 2 раза меньшим, чем у первоначального 2-фактора. Алгоритм выполняет указанную процедуру до тех пор, пока очередной 2-фактор не будет иметь одну компоненту связности. В этом случае полученный цикл будет гамильтоновым.

Дадим иллюстрацию применения данного алгоритма. Пусть даны граф  $G$  и его частичный тур перед выполнением процедуры такие, как показано на рис. 1 а. Толстыми линиями на рисунке изображен частичный тур, ребра графа не нарисованы, так как предполагается, что граф полный. Вершины, инцидентные менее чем двум ребрам частичного тура (открыты  $t$  вершины), изображены на рисунках без штриховой заливки. Теперь стоит задача дополнить текущий частичный тур до гамильтонового цикла, причем сделать это наиболее оптимальным образом.

Рассмотрим подграф  $H$  исходного графа, получаемый при удалении всех закрытых вершин текущего частичного тура. Для каждой цепи частичного тура исходного графа также удалим ребро графа  $H$ , соответствующее ребру  $G$ , замыкающему эту цепь. В случае, если цепь состоит из одного ребра, соответствующее ребро удаляется из графа  $H$ . На рис. 1 б изображен граф  $H$ , полученный в результате этой процедуры. Пунктирными линиями изображены отсутствующие в графе  $H$  ребра, которые в графе  $G$  замыкали цепи частичного тура. На следующем шаге найдем паросочетание максимального веса в графе  $H$  (рис. 1

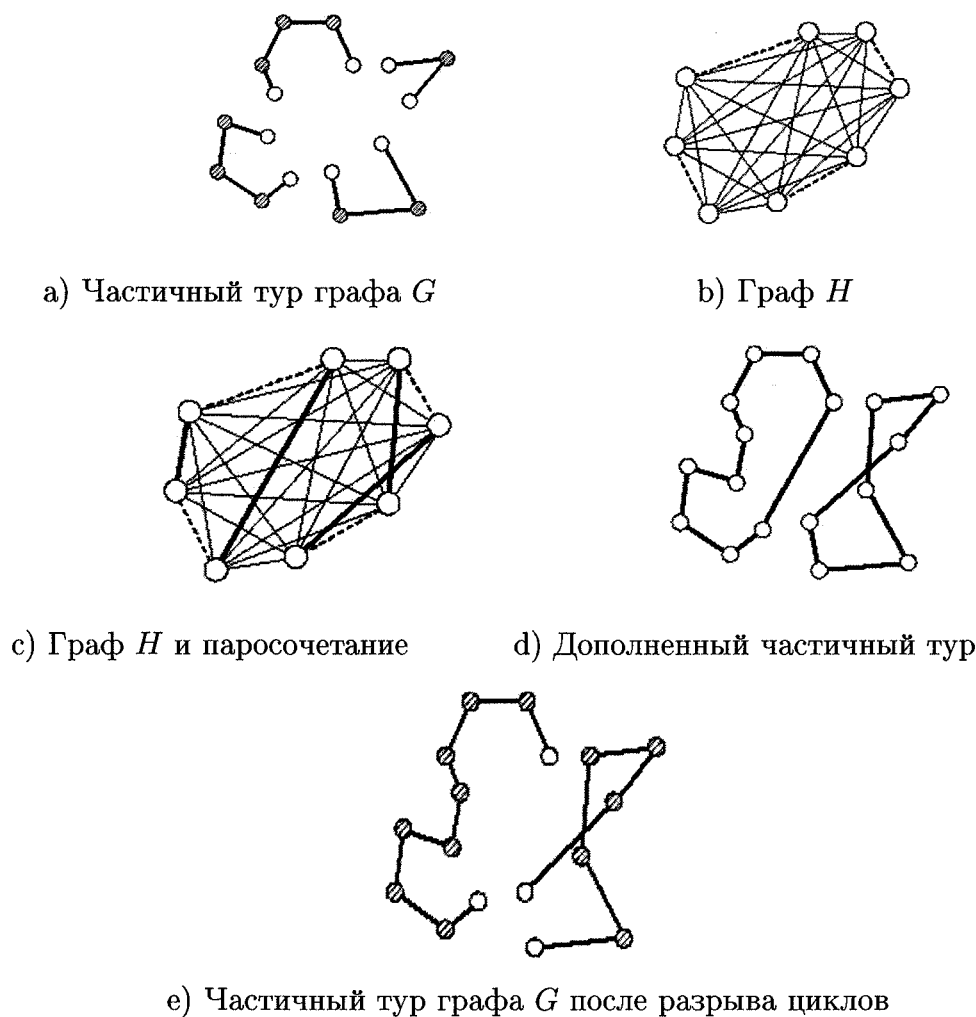


Рис. 1

с). Включим ребра, входящие в паросочетание в частичный тур графа  $G$  (рис. 1 d), и, если в частичном туре возникнут циклы длины меньше  $|V(G)|$ , то удалим из каждого ребро наименьшего веса (рис. 1 e). В результате этой процедуры количество открытых вершин в графе  $G$  будет уменьшаться, по крайней мере, на величину, равную количеству компонент связности в частичном туре (следовательно, как минимум вдвое). Если в результате еще остались открытые вершины (частичный тур не является гамильтоновым циклом), то следует выполнить эту процедуру еще раз. Приведем формальное описание алгоритма.

**Алгоритм А1** (Алгоритм дополнения паросочетаниями).

**Вход:** полный неориентированный граф  $G = (V, E)$  с весовой функцией  $c$ .

**Выход:** гамильтонов цикл.

**Шаг 1.** Вычислим 2-фактор максимального веса  $C = C_1, \dots, C_s$ .

**Шаг 2.** Если  $s = 1$  вернуть  $C_1$ .

**Шаг 3.** Для каждого  $C_i$ :  $i = 1, \dots, s$  найти  $e_i = \{u_i, v_i\} = \arg \min_{e \in C_i} c(e)$ .

Положить  $C_i = C_i \setminus \{e_i\}$ .

**Шаг 4.** Пусть множество  $S = \bigcup_{i=1, \dots, s} \{u_i, v_i\}$ .

Пусть  $H$  подграф графа  $G$ , образованный вершинами множества  $S$ .

Положить  $E(H) = E(H) \setminus \left( \bigcup_{i=1, \dots, s} e_i \right)$ .



**Шаг 5.** Найдем в графе  $H$  паросочетание максимального веса  $M$ .

**Шаг 6.** Пусть  $C = C \cup M$ . Обозначить непересекающиеся циклы, образованные ребрами множества  $C$ , через  $C_1, \dots, C_s$ . Перейти на **Шаг 2**.

**Конец алгоритма.**

### Вычислительная сложность алгоритма

В наихудшем случае 2-фактор будет состоять из наибольшего возможного числа циклов длины 3, и после разрыва получится  $\lfloor 2 \cdot n/3 \rfloor$  вершины, которым инцидентно только одно ребро частичного тура (так называемые открытые вершины). В этом случае количество компонент связности частичного тура равно  $\lfloor n/3 \rfloor$ . В наихудшем случае в результате одной процедуры построения дополнительного графа количество открытых вершин будет уменьшено лишь вдвое. Так как алгоритм заканчивает работу, когда не останется открытых вершин, то количество выполнения шагов 3–5 алгоритма будет не более  $\lceil \log_2 \lfloor 2 \cdot n/3 \rfloor \rceil$ . Поскольку при каждом последующем выполнении шагов 3–5 размерность задачи понижается как минимум в два раза, то время выполнения этих шагов не будет превосходить величины

$$\sum_{k=1}^{\lceil \log_2 \lfloor 2 \cdot n/3 \rfloor \rceil} O\left(\frac{n}{2^k}\right)^3 = O(n^3).$$

Таким образом, алгоритм **A1** является полиномиальным и при эффективной реализации подзадач нахождения максимальных паросочетаний и 2-фактора имеет вычислительную сложность  $O(n^3)$ .

### Оценка точности алгоритма

**Теорема 1.** Пусть  $opt$  – вес оптимального гамильтонового цикла в неориентированном взвешенном графе  $G$  при решении задачи на максимум, а  $T$  – цикл, найденный с помощью алгоритма **A1** дополнения подграфами. Тогда выполняются следующее неравенство:

$$c(T) \geq \frac{2}{3} \cdot opt.$$

*Данная оценка неулучшаема.*

*Доказательство.* Пусть  $C$  – 2-фактор максимального веса, найденный на шаге 1 работы алгоритма. Тогда выполняется неравенство

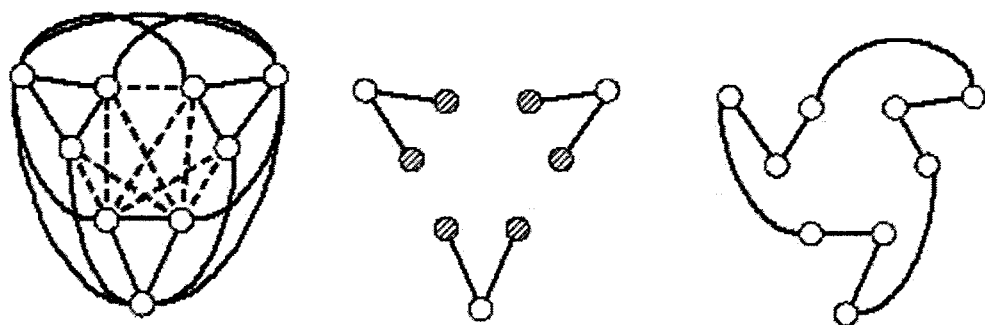
$$c(C) \geq opt,$$

поскольку гамильтонов цикл также является 2-фактором. При разрыве циклов 2-фактора каждый цикл теряет не более трети своего веса, поскольку цикл состоит не менее, чем из трех вершин, и исключается ребро цикла минимального веса. Следовательно,

$$c(T) \geq \frac{2}{3} \cdot opt.$$

Неравенство доказано.

Для доказательства неулучшаемости данной оценки рассмотрим граф, изображенный на рис. 2 а. Штриховыми линиями изображены ребра, имеющие вес 0, остальные ребра имеют вес 1. Найденный 2-фактор будет иметь вес 9, а вес, полученного из него частичного тура, равен 6 (рис. 2 б). Дальнейшее дополнение частичного тура будет производиться ребрами



а) Граф  $G$       б) Частичный тур в  $G$       в) Оптимальное решение

Рис. 2

веса 0, следовательно, полученный гамильтонов цикл будет иметь вес 6. В то же время в графе  $G$  существует очевидный оптимальный гамильтонов цикл веса 9 (рис. 2 в).

Следовательно, использование алгоритма дополнения паросочетаниями для данного графа может привести к нахождению решения аппроксимирующего оптимальное с коэффициентом  $2/3$  ( $6 = 2/3 \cdot 9$ ), а, значит, гарантируемая оценка точности  $2/3$  неулучшаема.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $opt$  – вес оптимального гамильтонового цикла в метрическом неориентированном взвешенном графе  $G$  при решении задачи на максимум, пусть  $T$  – цикл, найденный с помощью алгоритма **A1**. Тогда выполняются следующее неравенство:

$$c(T) > \frac{7}{9} \cdot opt.$$

*Доказательство.* Пусть  $(u_i, v_i)$  – ребро, удаленное из цикла  $C_i$  на втором шаге алгоритма. Рассмотрим цикл длины 3, образованный вершинами  $u_i, v_i$  и  $w$ , где  $w \notin C_i$ . Из неравенства треугольника следует, что

$$c(u_i, w) + c(w, v_i) \geq c(u_i, v_i). \quad (1)$$

Число вершин в графе  $H$  равно  $2s$  ( $s$  – это число циклов в 2-факторе  $C$ ). Просуммировав по всем  $w$ , получим

$$\sum_{w \in V(H), w \neq u_i, w \neq v_i} (c(u_i, w) + c(w, v_i)) \geq (2s - 2) \cdot c(u_i, v_i). \quad (2)$$

Теперь, просуммировав (2) по всем  $i$ , получим:

$$2 \cdot c(H) \geq (2s - 2) \cdot c. \quad (3)$$

где  $c(H)$  – сумма весов всех ребер графа  $H$ , а  $c = \sum_{i=1}^s c(u_i, v_i)$ .

Так как граф  $H$  получен из полного графа удалением  $s$  ребер, число ребер в нем равно:

$$|E(H)| = \frac{2s \cdot (2s - 1)}{2} - s = 2s(s - 1). \quad (4)$$

В паросочетание  $M$  графа  $H$  входит  $s$  ребер, и, следовательно, вес паросочетания будет ограничен снизу следующей величиной:

$$c(M) \geq \frac{c(H)}{(2s - 2)} \geq \frac{(2s - 2) \cdot c}{2(2s - 2)} = \frac{c}{2}. \quad (5)$$

Неравенство (5) получено исходя из того, что граф  $H$  является регулярным со степенями вершин  $2s - 2$ , и, следовательно, множество его ребер может быть разбито на  $2s - 2$  попарно непересекающихся паросочетания. Значит, в результате выполнения одной процедуры дополнения вес частичного тура  $T_1$  до разрыва циклов станет равным

$$c(T_1) \geq c(C) - c + \frac{c}{2}. \quad (6)$$

Если образовались циклы, то их разрыв приведет к уменьшению частичного тура на величину не большую, чем  $c/4$ , так как даже в худшем случае вес удаленных ребер не будет превышать половины веса построенного паросочетания.

После этого вторая процедура дополнения скомпенсирует, по крайней мере, половину веса удаленных ребер. В итоге, если придется выполнить  $m$  процедур дополнения, то вес частичного тура будет ограничен снизу следующей величиной:

$$c(T_m) \geq c(C) - c + \frac{c}{2} - \frac{c}{4} + \frac{c}{8} - \dots - \frac{c}{2^{m-1}} + \frac{c}{2^m} = c(C) - \frac{c}{2} - \frac{c}{8} - \dots - \frac{c}{2^m}. \quad (7)$$

В наихудшем случае 2-фактор  $C$  состоит из цепей длины 3 и, следовательно,

$$c \leq opt/3.$$

В результате, перейдя в неравенстве (7) к пределу, получим:

$$c(T) \geq opt - \frac{c}{2} - \frac{c}{8} - \dots - \frac{c}{2^m} = opt - \frac{c/2}{1 - 1/4} = opt - \frac{2}{3}c \geq opt - \frac{2}{9}opt = \frac{7}{9}opt. \quad (8)$$

□

Данный алгоритм может быть эффективно использован вместе со многими другими алгоритмами для дополнения частичного тура до гамильтонового. Продемонстрируем данную технику на примере алгоритма Сердюкова. В оригинальном алгоритме Сердюкова способ дополнения частичных туров до гамильтоновых не регламентируется и, как правило, подразумевает использование жадного алгоритма. С целью сохранения целостности изложения приведем предварительно изложение алгоритма Сердюкова с использованием принятых в статье обозначений.

## Алгоритм Сердюкова

Для симметрической задачи коммивояжера одним из лучших алгоритмов является алгоритм Сердюкова с оценкой точности  $3/4$  [6]. В этом алгоритме используется нахождение максимального паросочетания, и необходимо рассмотреть 2 случая: в графе четное число вершин, либо нечетное.

**Алгоритм А2-0** ( $n$  – четно, в этом случае может быть найдено максимальное паросочетание, которое будет покрывать все вершины графа).

**Вход:** полный неориентированный граф  $G = (V, E)$  с весовой функцией  $c$ .  $|V|$  – четно.

**Выход:** Гамильтонов цикл.

**Шаг 1.** Вычислить максимальный 2-фактор  $C = C_1, \dots, C_s$ . Если  $s = 1$  вернуть  $C_1$ .

Вычислить максимальное паросочетание  $M$ .

**Шаг 2.** Для каждого цикла  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  переместить из  $C_i$  в  $M$  ребро, которое сохранит  $M$  частичным туром.

**Шаг 3.** Дополнить  $C$  до гамильтонова цикла  $T_1$ .

Дополнить  $M$  до гамильтонова цикла  $T_2$ .

Вернуть больший по весу тур из  $T_1$  и  $T_2$ .

**Конец алгоритма.**

**Алгоритм А2-1** ( $n$  – нечетно, в этом случае для графа не существует совершенно-го паросочетания, поэтому после нахождения максимального 2-фактора и максимального паросочетания необходимо определенным образом изменить эти подграфы и использовать алгоритм, предназначенный для четного размера задачи).

**Вход:** полный неориентированный граф  $G = (V, E)$  с весовой функцией  $c$ .  $|V|$  – нечетно.

**Выход:** Гамильтонов цикл.

**Шаг 1.** Вычислить максимальный 2-фактор  $C = C_1, \dots, C_s$ . Если  $s = 1$  вернуть  $C_1$ .

Вычислить максимальное паросочетание  $M$ .

**Шаг 2.** Пусть  $v^0$  – вершина, не инцидентная никакому ребру из  $M$ .

Пусть  $v^0 \in C_1$ . Найти ребро  $e_0 = \{v^0, v'\} = \arg \max_{e \in E \setminus E(C)} c(e)$ .

Пусть  $e_1, e_2 \in C_1$  – ребра, инцидентные вершине  $v^0$ .

Если  $v' \in C_1$ , то положить  $C_0 = C_1$  и  $j = 2$ .

Если  $v' \in C_2$ , то положить  $C_0 = C_1 \cup C_2$  и  $j = 3$ .

В  $C_0 \setminus M$  выбрать ребра  $e' \in \{e_1, e_2\}$  и  $e''$ , инцидентные вершине  $v'$ . В случае  $C_0 = C_1$  следует выбрать такое ребро  $e'$ , чтобы не образовался цикл через вершину  $v^0$ .

Обозначить  $C = e_0 \cup C \setminus \{e', e''\}$ ,  $M = M \cup \{e', e''\}$ .

**Шаг 3.** Для  $i = j, \dots, s$ : Переместить из  $C_i$  в  $M$  ребро, которое сохранит  $M$  частичным туром.

**Шаг 4.** Дополнить  $C$  и  $M$  до гамильтоновых циклов  $T_1$  и  $T_2$ , соответственно.

Вернуть больший по весу тур между  $T_1$  и  $T_2$ .

**Конец алгоритма.**

Как видно из изложенного в алгоритме Сердюкова, способ дополнения частичных туров до гамильтоновых не регламентируется. Здесь, как правило, подразумевается использование жадного алгоритма. Рассмотрим модификацию алгоритма Сердюкова [2], основанную на дополнении частичных туров до гамильтоновых с использованием паросочетаний подграфов открытых вершин.

## Модификация алгоритма Сердюкова

Разработана модификация алгоритма Сердюкова [2], позволяющая получить на каждом графе цикл не меньшего веса, чем с помощью оригинального алгоритма [1].

Изменения по сравнению с алгоритмом Сердюкова следующие:

1. Вычисляется не два, а пять гамильтоновых циклов;
2. Один гамильтонов цикл вычисляется с помощью алгоритма А1;
3. Два цикла получаются дополнением текущих частичных туров  $C$  и  $M$  до гамильтонового цикла с помощью жадного алгоритма;
4. Оставшиеся два цикла дополнением текущих частичных туров  $C$  и  $M$  до гамильтонового цикла паросочетаниями подграфов открытых вершин.

**Алгоритм А3-0** ( $n$  – четно, в этом случае может быть найдено максимальное паросочетание, которое будет покрывать все вершины графа).

**Вход:** полный неориентированный граф  $G = (V, E)$  с весовой функцией  $c$ .  $|V|$  – четно.

**Выход:** Гамильтонов цикл.

**Шаг 1.** Вычислить максимальный 2-фактор  $C = C_1, \dots, C_s$ . Если  $s = 1$  вернуть  $C_1$ .

Вычислить максимальное паросочетание  $M$ .

**Шаг 2-1.** Положить  $D = C$ . Из каждого цикла 2-фактора  $D$  удалить ребро минимального веса.

**Шаг 2-2.** Для каждого цикла  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  переместить из  $C_i$  в  $M$  ребро, которое сохранит  $M$  частичным туром.

**Шаг 3-1.** Дополнить частичные туры  $C$ ,  $M$  и  $D$  паросочетаниями графов открытых вершин до гамильтоновых циклов  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  соответственно.

**Шаг 3-2.** Дополнить алгоритмом координатного подъема частичные туры  $C$  и  $M$  до гамильтоновых циклов  $T_4$  и  $T_5$  соответственно.

**Шаг 4. Вернуть** больший по весу тур из  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  и  $T_5$ .

**Конец алгоритма.**

**Алгоритм АЗ-1** ( $n$  – нечетно, в этом случае для графа не существует совершенного паросочетания, по-этому после нахождения максимального 2-фактора и максимального паросочетания необходимо определенным образом изменить эти подграфы и использовать алгоритм, предназначенный для четного размера задачи).

**Вход:** полный неориентированный граф  $G = (V, E)$  с весовой функцией  $c$ .  $|V|$  – нечетно.

**Выход:** Гамильтонов цикл.

**Шаг 1.** Вычислить максимальный 2-фактор  $C = C_1, \dots, C_s$ . Если  $s = 1$  вернуть  $C_1$ .

Вычислить максимальное паросочетание  $M$ .

**Шаг 2-1.** Положить  $D = C$ . Из каждого цикла 2-фактора  $D$  удалить ребро минимального веса.

**Шаг 2-2.** Пусть  $v^0$  – вершина, не инцидентную никакому ребру из  $M$ .

Пусть  $v^0 \in C_1$ . Найти ребро  $e_0 = \{v^0, v'\} = \arg \max_{e \in E \setminus E(C)} c(e)$ .

Пусть  $e_1, e_2 \in C_1$  – ребра, инцидентные вершине  $v^0$ .

Если  $v' \in C_1$ , то положить  $C_0 = C_1$  и  $j = 2$ .

Если  $v' \in C_2$ , то положить  $C_0 = C_1 \cup C_2$  и  $j = 3$ .

В  $C_0 \setminus M$  выбрать ребра  $e' \in \{e_1, e_2\}$  и  $e''$ , инцидентные вершине  $v'$ .

В случае  $C_0 = C_1$  следует выбрать такое ребро  $e'$ , чтобы не образовался цикл через вершину  $v^0$ .

Обозначить  $C = e_0 \cup C \setminus \{e', e''\}$ ,  $M = M \cup \{e', e''\}$ .

**Шаг 2-3.** Для  $i = j, \dots, s$ : Переместить из  $C_i$  в  $M$  ребро, которое сохранит  $M$  частичным туром.

**Шаг 3-1.** Дополнить частичные туры  $C$ ,  $M$  и  $D$  паросочетаниями графов открытых вершин до гамильтоновых циклов  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  соответственно.

**Шаг 3-2.** Дополнить алгоритмом координатного подъема частичные туры  $C$  и  $M$  до гамильтоновых циклов  $T_4$  и  $T_5$  соответственно.

**Шаг 4. Вернуть** больший по весу тур из  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  и  $T_5$ .

**Конец алгоритма.**

Результатом работы алгоритма **АЗ** является гамильтонов тур  $T$  с длиной

$$c(T) \geq \frac{3}{4} opt.$$

Этот факт объясняется тем, что алгоритм основывается на алгоритме Сердюкова с такой оценкой точности и для любого графа находит решение не хуже исходного алгоритма.

## Вычислительный эксперимент

Для оценки эффективности алгоритмов был проведен вычислительный эксперимент. Вычисления производились на полных графах со случайными весами, равномерно распределенными на промежутке  $[0, 100]$  и с числом вершин 10, 20, 40, 80 и 160. Для каждого из указанных числа вершин генерировалось 40 случайных графов. В итоге алгоритм дополне-

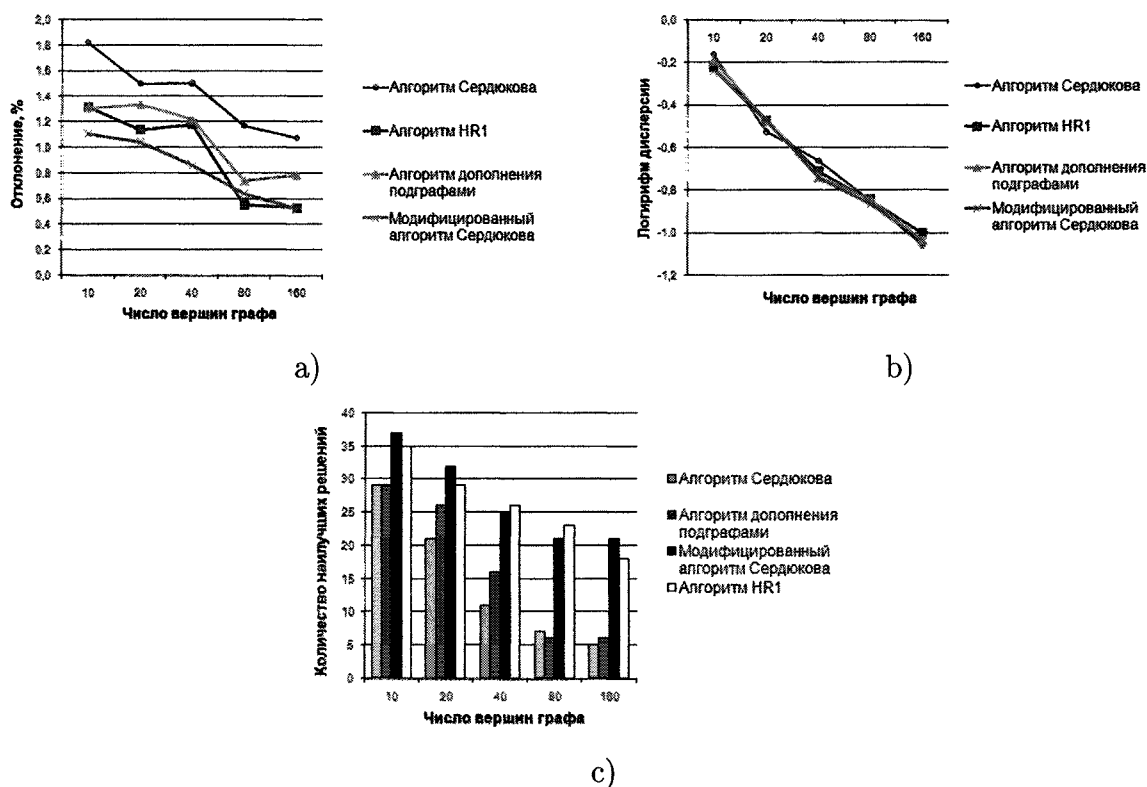


Рис. 3

ния паросочетаниями показали лучшие после алгоритма HR1 результаты, опередив на практике алгоритмы с более высокими теоретическими оценками. Лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Сердюкова.

На рис. 3 а приведен график средних отклонений от точного решения для каждого алгоритма. В качестве верхней оценки точного решения брался минимум из веса максимального 2-фактора и удвоенного веса максимального паросочетания. Как видно из рисунка, погрешности всех алгоритмов имеют тенденцию к уменьшению с ростом числа вершин, при этом лучшие результаты, в основном, дает модифицированный алгоритм Сердюкова. Только для 80-вершинных графов ему составляет конкуренцию алгоритм HR1.

На рис. 3 б приведен график логарифма дисперсии отклонений от точного решения. Из графика видно, что дисперсия погрешности модифицированного алгоритма Сердюкова ниже соответствующей дисперсии алгоритма HR1.

Количество решений максимального веса, найденных каждым из исследуемых алгоритмов представлено на рис. 3 с. Легко заметить, что с ростом размерности частоты нахождения максимального решения модифицированным алгоритмом Сердюкова и алгоритмом HR1 примерно равны.

Оценивая результаты проведенного вычислительного эксперимента в целом, можно сделать вывод, что в подавляющем большинстве случаев модифицированный алгоритм Сердюкова дает более надежные результаты, чем остальные алгоритмы. Следовательно, использование данного алгоритма для приближенного решения задачи коммивояжера наиболее оправдано.

## Заключение

Предложенный в статье алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера на максимум, основанный на дополнении частичного тура паросочетаниями подграфа откры-

тых вершин, имеет вычислительную сложность  $O(n^3)$  и оценки точности  $2/3$  для симметрической MAX TSP и  $7/9$  для метрической. Несмотря на то, что известные гарантированные оценки не улучшены, вычислительный эксперимент показал, что получаемые данным алгоритмом решения являются одними из самых точных среди приближенных алгоритмов. В связи с этим достаточно эффективной оказалась связка разработанного алгоритма с алгоритмом, имеющим наиболее высокую из известных гарантированную оценку точности – алгоритмом Сердюкова. Предложенная в работе модификация алгоритма Сердюкова по результатам вычислительного эксперимента показала наилучшие результаты среди известных полиномиальных алгоритмов для MAX TSP. Представленные результаты вычислительного эксперимента, позволяют выдвинуть гипотезу об асимптотической точности алгоритма **A3** для достаточно широкого класса задач.

## Литература

1. Гимади, Э.Х. О некоторых результатах для задачи коммивояжера на максимум / Э.Х. Гимади, А.И. Сердюков // Дискретный анализ и исследование операций. – 2001. – № 1. – С. 22 – 39.
2. Панюков, А.В. Исследование реализаций алгоритма Сердюкова для задачи MAX TSP / А.В. Панюков, С.А. Тычинин // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: материалы конф. (Владивосток, 7 – 14 сентября 2007). – Новосибирск, 2007. – С. 132.
3. Тычинин, С.А. Алгоритм дополнения подграфами для решения задачи MAX TSP / С.А. Тычинин // Информационный бюллетень ассоциации математического программирования № 11: Конференция «Математическое программирование и приложения (тезисы докладов)». – Екатеринбург, 2007. – С. 217 – 218.
4. The maximum traveling salesman problem under polyhedral norms / A.I. Barvinok, D.S. Johnson, G. Woeginger, R. Woodroffe // Integer Programming and Combinatorial Optimization. – Berlin, 1999. – P. 195 – 201.
5. Chen, Zh. Improved Deterministic Approximation Algorithms for Max TSP / Zh. Chen, Y. Okamoto, L. Wang // Inform. Process. Lett. – 2005. – № 95. – P. 333 – 342.
6. Gabow, H. An Efficient Implementation of Edmonds' Algorithm for Maximum Matching on Graphs / H. Gabow // J. of the ACM. – 1976. – № 4. – P. 221 – 234.
7. Hartvigsen, D. Extensions of matching theory: PhD Thesis / D. Hartvigsen – Pittsburg, PA: Carnegie Mellon Univ, 1984. – 148 p.
8. Hassin, R. A  $7/8$ -approximation algorithm for metric Max TSP / R. Hassin, S. Rubinstein // Inform. Process. Lett. – 2002. – № 81. – P. 247 – 251.
9. Hassin, R. Better approximations for Max TSP / R. Hassin, S. Rubinstein // Inform. Process. Lett. – 2000. – № 75. – P. 181 – 186.

Кафедра экономико-математических методов и статистики,  
Южно-Уральский государственный университет  
pav@susu.ac.ru

*Поступила в редакцию 27 февраля 2008 г.*

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

*П.О. Пивоварова*

Исследована устойчивость и разрешимость задачи Коши для уравнений  $\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \beta u_{jxx} - \alpha u_{jxxx} + \gamma u_j$ , заданных на конечном связном и ориентированном графе с условиями непрерывности и баланса потока в его вершинах.

**Ключевые слова:** уравнение соболевского типа, граф, фазовое пространство, дихотомии решений

### Введение

Пусть  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ , где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_i\}$  – множество ребер,  $\mathbf{G}$  – конечный связный ориентированный граф, причем каждое его ребро  $E_i$  имеет длину  $l_i \in \mathbb{R}_+$  и площадь поперечного сечения  $d_j \in \mathbb{R}_+$ . На графе  $\mathbf{G}$  рассмотрим линейные уравнения в частных производных

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \beta u_{jxx} - \alpha u_{jxxx} + \gamma u_j. \quad (0.1)$$

Эти уравнения описывают эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости (см. [1] и библиографию там). Они относятся к обширному классу уравнений соболевского типа, которые в последнее время активно изучаются в различных аспектах. Изучение дифференциальных уравнений на графах началось в конце прошлого века (см. [2] и библиографию там). Первая работа по уравнениям соболевского типа на графах [3] вышла в 2002 г., первая диссертация по данной проблематике [4] защищена в 2005 г. Однако прежде во всех работах по уравнениям соболевского типа на графах изучались только динамические уравнения (см. классификацию по Г.А. Свиридоку [5]). Данная статья содержит исследование эволюционных уравнений соболевского типа на графе.

Нас интересуют решения уравнений (0.1), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (0.2)$$

где  $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i)$ ,  $E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$  ( $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  – множество ребер с началом (концом) в вершине  $V_i$ ); а также

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0. \quad (0.3)$$

Условия (0.2) требуют непрерывности решений в вершинах графа, причем в этих условиях термин «отсутствовать» не значит «быть равным нулю». Скажем, если в вершину  $V_i$  все ребра «входят», то первые два равенства в (0.2) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Если, к примеру, граф состоит из одного ребра и двух вершин, то условия (0.2) отсутствуют, а условия (0.3) превращаются в условия Неймана. Если же вершина у графа одна и ребро тоже одно, то условия (0.2), (0.3) превращаются в условия согласования.



Наш подход заключается в редукции задачи Коши

$$u_j(x; 0) = u_{0j}(x), x \in (0, l_j) \quad (0.4)$$

для уравнений (0.1) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \quad (0.5)$$

для абстрактного линейного эволюционного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu \quad (0.6)$$

и применении затем методов теории относительно  $p$ -секториальных операторов (см. [6], гл. 5). Кроме того, нас интересует устойчивость решений уравнений (0.1), которую мы будем изучать в терминах дихотомий решений ([6], гл. 6). Поэтому статья кроме вводной части и списка литературы содержит две части. В первой проводится редукция задачи (0.1) – (0.4) к задаче (0.6), (0.5), а во второй содержится основной результат статьи.

## 1. Постановка задачи

Чтобы редуцировать задачу (0.1) – (0.4) к задаче (0.5), (0.6), введем в рассмотрение следующие пространства:  $\mathfrak{F} = \{g = (g_1, g_2, \dots, v_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$  и  $\mathfrak{W} = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_j, \dots) : v_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (0.2)}\}$ . Пространство  $\mathfrak{F}$  – гильбертово со скалярным умножением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

а пространство  $\mathfrak{W}$  – банахово с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{W}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{jx}^2 + v_j^2) dx.$$

Заметим, что в силу теорем вложения Соболева функции из  $W_2^1(0, l_j)$  абсолютно непрерывны, поэтому пространство  $\mathfrak{W}$  определено корректно.

Обозначим через  $\mathfrak{W}^*$  сопряженное к  $\mathfrak{W}$  относительно двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  пространство и формулой

$$\langle Av, w \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx} w_{jx} dx, u, v \in \mathfrak{W},$$

зададим оператор  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}^*)$ . В [7] показано, что его спектр  $\sigma(A)$  неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к  $+\infty$ . Занумеруем собственные значения  $\{\lambda_k\}$  оператора  $A$  по неубыванию с учетом их кратности. Тогда ортонормированное (в смысле  $\mathfrak{F}$ ) семейство соответствующих собственных функций  $\{\varphi_k\}$  оператора  $A$  образует базис пространства  $\mathfrak{W}$  в силу плотного и непрерывного вложения  $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{F}$ .

Введем в рассмотрение еще одно банахово пространство  $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^2(0, l_j), \text{ и выполняются (0.2), (0.4)}\}$  с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

В силу уже упомянутых теорем вложения Соболева первые производные функций из  $W_2^2(0, l_j)$  абсолютно непрерывны, поэтому корректность определения пространства  $\mathfrak{U}$  обеспечена. Нетрудно заметить, что  $\{\varphi_k\} \subset \mathfrak{U}$ , а в силу плотности вложения  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$  семейство  $\{\varphi_k\}$  образует базис в  $\mathfrak{U}$ . Формулой  $B : u \rightarrow (-u_{1xx}, -u_{2xx}, \dots, -u_{jxx}, \dots)$  зададим оператор  $B : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ . Очевидно  $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  и  $Bu = Au$  при всех  $u \in \mathfrak{U}$ , поэтому  $\sigma(B) = \sigma(A)$ . Возьмем  $\lambda \in \mathbb{R}$  и построим оператор  $L = \lambda + B$ . По построению оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а его спектр  $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$ .

Наконец, введем в рассмотрение последнее в данной статье банахово пространство  $dom M = \{u \in \mathfrak{U} : u_j \in W_2^4(0, l_j) \text{ и}$

$$u_{jxx}(0, t) = u_{kxx}(0, t) = u_{mxx}(l_m, t) = u_{nxx}(l_n, t), \quad (2.1)$$

где  $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$ ;

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jxxxx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kxxxx}(l_k, t) = 0 \} \quad (2.2)$$

с нормой

$$\|u\|_u^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxxxx}^2 + u_{jxxx}^2 + u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Сделаем по условиям (2.1), (2.2) те же замечания, что и по условиям (0.2), (0.3) и, аналогично сказанному выше про пространство  $\mathfrak{U}$ , установим корректность определения пространства  $dom M$ . Заметим еще, что поскольку  $\{\varphi_k\} \subset dom M$ , а вложение  $dom M \subset \mathfrak{U}$  плотно и непрерывно, то семейство  $\{\varphi_k\}$  является базисом в  $dom M$ . Далее, формулой  $C : u \rightarrow (u_{1xxxx}, u_{2xxxx}, \dots, u_{jxxxx}, \dots)$  зададим оператор  $C : dom M \rightarrow \mathfrak{F}$ , причем  $C \in \mathcal{L}(dom M; \mathfrak{F})$  и  $\sigma(C) = \{\lambda_k^2\}$ . Возьмем  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  и построим оператор  $M = -\beta B - \alpha C + \gamma$ . По построению оператор  $M \in \mathcal{L}(dom M; \mathfrak{F})$ , а значит  $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ .

Итак,  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  – банаховы пространства, а операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ . Редукция задачи (0.1) – (0.4) к задаче (0.6), (0.5) закончена.

## 2. Корректность задачи

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  – банаховы пространства, а  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  и  $M \in Cl(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  – операторы, построенные в п.1. Нашей целью является доказательство существования единственного решения задачи (0.6), (0.5), а также исследование устойчивости решений уравнения (0.6). Начнем с установления сильной  $(L, 0)$ -секториальности оператора  $M$ .

**Лемма 1.** При любых  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  и  $\beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$  таких, что либо  $-\lambda \notin \sigma(A)$ , либо  $-\lambda \in \sigma(A)$  и  $-\lambda$  не является корнем уравнения  $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \gamma = 0$ , оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -секториален.

Действительно, из формулы

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu(\lambda + \lambda_k) + \alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k - \gamma}$$

вытекает, что  $L$ - спектр оператора  $M$  имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{-\alpha\lambda_k^2 - \beta\lambda_k + \gamma}{\lambda + \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda + \lambda_l = 0\} \right\}$$

вещественен, дискретен и сгущается только к  $\infty$ . Далее из формул

$$R_{\mu}^L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \mu_k},$$

$$(\mu L - M)^{-1} L (\nu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\mu - \mu_k)(\nu - \mu_k)(\lambda + \lambda_k)}$$

аналогично ([6], гл.5), нетрудно установить сильную  $(L, 0)$ -секториальность оператора  $M$ .

Перейдем к рассмотрению вопроса о разрешимости задачи (0.6), (0.5). Вектор-функцию  $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+; u)$ , удовлетворяющую уравнению (0.6), назовем *решением* этого уравнения. Решение  $u = u(t), t \in \mathbb{R}_+$ , уравнения (0.6) называется *ослабленным решением* (в смысле С.Г. Крейна) задачи Коши (0.5) для уравнения (0.6), если  $\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = u_0$ .

**Определение 1.** Множество  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$  называется *фазовым пространством уравнения (0.6)*, если

- (i) любое решение  $u = u(t)$  лежит в  $\mathfrak{B}$  как траектория, т.е.  $u(t) \in \mathfrak{B}$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ ;
- (ii) при любом  $u_0 \in \mathfrak{B}$  существует единственное ослабленное решение задачи (0.6), (0.5).

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  и

(i)  $-\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$ . Тогда фазовым пространством уравнения (0.6) служит все пространство  $\mathfrak{U}$ .

(ii)  $-\lambda \in \sigma(A)$ .  $-\lambda$  не является корнем уравнения  $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \gamma = 0$ . Тогда фазовым пространством уравнения (0.6) является пространство  $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, -\lambda = \lambda_k\}$ .

Итак, вопрос о существовании единственного решения задачи (0.6), (0.5) решен. Заметим, что одновременно решен вопрос и о несуществовании решения задачи (0.6), (0.5), ибо если  $u_0 \notin \mathfrak{U}^1$  в случае (ii) теоремы 2.1, то решения задачи (0.6), (0.5) не существует. Перейдем к вопросу об устойчивости решений уравнения (0.6).

Пусть  $\mathfrak{B}$  - фазовое пространство уравнения (0.6). Множество  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{B}$  называется *инвариантным пространством* уравнения (1.1), если для любого  $u_0 \in \mathfrak{J}$  решение  $u = u(t, u_0)$  задачи (0.6), (0.5) лежит в  $\mathfrak{J}$  как траектория (т.е.  $u = u(t, u_0) \in \mathfrak{J}$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ ).

**Определение 2.** Говорят, что существует экспоненциальная дихотомия решений уравнения (1.1), если существуют такие инвариантные пространства  $\mathfrak{J}^s, \mathfrak{J}^u \subset \mathfrak{B}$ , что  $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^s \oplus \mathfrak{J}^u$ ; и если существуют такие  $\kappa, C_s, C_u \in \mathbb{R}_+$ , что для любых  $v_0 \in \mathfrak{J}^s$  и  $w_0 \in \mathfrak{J}^u$  имеют место неравенства  $\|u(t, v_0)\| \leq e^{-\alpha t} C_s \|v_0\|, t \in \mathbb{R}_+$  и  $\|u(t, w_0)\| \leq e^{\alpha t} C_u \|w_0\|, t \in \mathbb{R}_-$ . Если  $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^s$  ( $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^u$ ), то говорят, что решения уравнения (0.6) экспоненциально устойчивы (экспоненциально неустойчивы).

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , причем  $4\alpha\gamma < -\beta^2$ . Тогда

- (i) если  $\lambda \geq -\lambda_1$ , то решения уравнения (0.6) экспоненциально устойчивы.
- (ii) если  $\lambda < -\lambda_1$ , то существует экспоненциальная дихотомия уравнения (0.6).

*Доказательство.* По теореме 2.1 фазовое пространство  $\mathfrak{B}$  уравнения (0.6) выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{B} = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если выполнено условие (i) теоремы 2.1,} \\ \mathfrak{U}^1, & \text{если выполнено условие (ii) теоремы 2.2.} \end{cases}$$

Если  $4\alpha\gamma < -\beta^2$ , то уравнение  $\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k - \gamma > 0$  при всех  $\lambda_k$ , и потому если  $\lambda \geq -\lambda_1$ , то все  $\mu_k < 0$ , и значит,  $\mathfrak{J}^s = \mathfrak{B}$ .

Если же  $\lambda < -\lambda_1$ , то существует подпространство  $\mathcal{J}^u = \text{span} \{\varphi_k : \lambda < -\lambda_k\}$ , а подпространство  $\mathcal{J}^u = \{u \in \mathfrak{F} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \lambda < -\lambda_k\}$ .  $\square$

Заметим, что в силу условия  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  ситуация, когда решения уравнения (0.6) экспоненциально неустойчивы, возникнуть не может.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

## Литература

1. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа / Г.А. Свиридюк, М.В. Суханова // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, №3. – С. 508 – 515.
2. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. – М.: Физматлит, 2004.
3. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
4. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис.... канд. физ.-мат. наук / В.В. Шеметова. – Магнитогорск: МаГУ, 2005.
5. Свиридюк, Г.А. Многообразия решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1989. – Т. 304, № 2. – С. 301 – 304.
6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk., V.E. Fedorov – VSP: Utrecht-Koln-Tokyo, 2003.
7. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк., В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126 – 131.

Кафедра математического анализа,  
Магнитогорский государственный университет  
analysis@masu.ru

*Поступила в редакцию 7 марта 2008 г.*

## МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ ГРИД-ОБОЛОЧЕК СИСТЕМНОГО СЛОЯ В ТЕХНОЛОГИИ CAE BEANS

*Г.И. Радченко*

Представлена технология построения иерархии проблемно-ориентированных грид-оболочек CAEBeans над инженерными пакетами. Дано описание структурной организации оболочек CAEBeans в виде четырех слоев: концептуального, логического, физического, системного. Рассмотрены методы организации оболочек CAEBeans системного слоя.

**Ключевые слова:** CAE, CAEBean, грид-оболочка, сервисно-ориентированная архитектура, системный слой, брокер ресурсов

### Введение

Одним из наиболее перспективных методов сокращения сроков разработки сложной технологической продукции является применение программных систем класса CAE (Computer Aided Engineering), позволяющих эффективно осуществлять компьютерное моделирование разрабатываемых образцов. Такой подход позволяет значительно повысить точность анализа проектных вариантов продукции и проводить виртуальные эксперименты, которые в реальности выполнить затруднительно или вовсе невозможно.

Каждый CAE-пакет представляет собой программный комплекс со сложным технологическим циклом, который может включать в себя следующие этапы: подготовка геометрии модели исследуемой области; построение вычислительной сетки; определение физики протекающих процессов; решение поставленной задачи моделирования; визуализация и анализ полученных результатов. В настоящее время на первое место выходит точность компьютерного моделирования и достоверность получаемых результатов. Это обуславливает постоянный рост размерностей сеток, используемых для проведения вычислительных экспериментов. На сегодняшний день размерность сеток, используемых в задачах компьютерного моделирования, может превышать десятки миллионов элементов [1]. В связи с этим постоянно возрастает вычислительная сложность, и требуются значительные вычислительные ресурсы для проведения экспериментов компьютерного моделирования.

Практически все современные CAE-пакеты имеют параллельные реализации для многопроцессорных систем, в том числе и для систем с кластерной архитектурой. Современный опыт использования суперкомпьютерных систем показывает, что максимальная эффективность использования вычислительных ресурсов может быть достигнута при объединении таких систем в вычислительные грид-сегменты [2, 3]. Таким образом, важной темой исследования является интеграция CAE в грид-среды.

При реальном внедрении CAE-систем в распределенную вычислительную среду возникает целый ряд проблем. В общем случае базовые компоненты CAE-пакетов, реализующие отдельные этапы технологического цикла постановки и решения задач, не поддерживают возможности удаленной постановки задачи и предоставления результата удаленному пользователю. Также необходимо решить задачи прозрачного использования удаленных грид-ресурсов, в том числе автоматизацию поиска, выбора и использования вычислительных ресурсов, требуемых для решения конкретных задач.

В качестве перспективного подхода к решению задач внедрения современных САЕ-систем в распределенные вычислительные среды, предлагается применение технологии CAEBeans [4, 5]. В основе технологии CAEBeans лежит обеспечение сервисно-ориентированного предоставления программных ресурсов базовых компонентов САЕ-систем и формирование деревьев проблемно-ориентированных оболочек, инкапсулирующих процедуру постановки и решения определенного класса задач. Таким образом, процедура постановки и решения задачи с применением технологии CAEBeans сводится к указанию пользователем значений параметров в терминах той проблемной области, в рамках которой проводится решение задачи. Технология CAEBeans автоматизирует декомпозицию задач на типовые подзадачи; поиск вычислительных ресурсов, обеспечивающих оптимальное решение поставленной задачи в грид-среде; постановку задач соответствующим базовым компонентам САЕ-систем; мониторинг хода решения задач; подготовку и предоставление результатов решения задачи пользователю.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится описание основных концепций технологии CAEBeans, раскрывается понятие дерева проблемно-ориентированных оболочек, дается определение системы CAEBeans. В разделе 2 рассматриваются основные особенности слоистой архитектуры системы CAEBeans, раскрываются основные функциональные особенности концептуального, логического и физического слоев CAEBeans. Раздел 3 посвящен детальному анализу архитектуры и основных функциональных особенностей системного слоя CAEBeans. В разделе 4 приведены результаты разработки оболочек CAEBeans. В заключении суммируются основные результаты и описаны направления дальнейшей работы.

## 1. Основные концепции технологии CAEBeans

### 1.1. Дерево проблемных оболочек CAEBeans

Технология CAEBeans ориентирована на инкапсуляцию и предоставление ресурсов САЕ-пакетов в рамках гетерогенных высокопроизводительных сред, что позволяет организовать эффективное использование САЕ-пакетов широким кругом пользователей, посредством автоматизации процесса решения типовых задач. В основе данного подхода лежит процесс формирования классификации типовых задач, для решения которых используется САЕ пакет, и построения дерева проблемно-ориентированных оболочек CAEBeans над САЕ пакетом на основе этой классификации.

При постановке задачи посредством проблемной оболочки CAEBean пользователю предоставляется возможность оперировать терминами той проблемной области, в рамках которой проводится решение задачи. Каждая конкретная задача может быть описана некоторым индивидуальным набором значений входных параметров, необходимых для реализации алгоритма решения данного класса задач. Область допустимых значений каждого входного параметра может быть строго фиксирована определенным множеством значений, задаваться неявно в зависимости от значений других входных параметров или быть определена как-либо еще [5]. В качестве примера таких параметров можно привести: температуру жидкости, протекающей в системе труб при моделировании трубопровода [4]; шаг и профиль резьбы при моделировании резьбового соединения труб [6]; скорость поступательного движения и скорость вращения трубы при моделировании процесса закалки [7].

Корневой элемент дерева проблемных оболочек представляется проблемной оболочкой, соответствующей наиболее обобщенному описанию определенного класса решаемых задач. Процедуру формирования дерева проблемно-ориентированных оболочек можно описать как движение от корневого элемента к листьям. Технология CAEBeans позволяет дочерним проблемно-ориентированным оболочкам конкретизировать классы задач, решаемые их ро-

дательской оболочкой, путем выделения и инкапсуляции групп параметров, значения которых фиксируются на данном уровне абстракции.

Первоначально для решения конкретной инженерной задачи, предлагается использовать проблемную оболочку с листовой вершины соответствующего дерева проблемных оболочек. Данная оболочка имеет максимально простой пользовательский интерфейс и позволяет пользователю указать значения ограниченного набора возможных параметров задачи. Однако область применения данной оболочки значительно ограничена и допускает решение узкого класса задач. В случае, если пользователю необходимо охватить более широкий класс задач, он осуществляет переход к родительской оболочке, тем самым переходя на более высокий уровень абстракции. Данная оболочка позволяет пользователю указать большее количество параметров и расширяет класс задач, который может быть решен посредством проблемной оболочки предыдущего уровня абстракции. Таким образом, пользователь может прийти до корневого CAEBean, который предлагает максимальные возможности по решению данного класса задач.

## 1.2. Состав системы CAEBeans

*Системой CAEBeans* будем называть совокупность программных средств, данных и аппаратных ресурсов, ориентированных на поддержку технологии CAEBeans. Программные средства, входящие в систему CAEBeans, должны обеспечить техническую поддержку процессов создания, модификации и использования оболочек CAEBeans. Возможно выделить следующие основные программные продукты, входящие в состав системы CAEBeans.

- **CAEBeans Constructor** – интегрированная среда разработки и управления оболочками CAEBeans. CAEBeans Constructor представляет собой систему разработки оболочек CAEBeans всех слоев, формирования деревьев проблемных оболочек CAEBeans,.
- **Брокер ресурсов** – автоматизированная система регистрации, анализа и предоставления ресурсов распределенной вычислительной среды. Подробное описание функциональных возможностей и структуре брокера ресурсов приведено в п. 3.3.
- **База данных CAEBeans** – система хранения и обработки оболочек CAEBeans. Поддерживает хранение деревьев проблемных оболочек, готовых системных, компонентных и потоковых оболочек.

Набор данных, входящих в состав системы CAEBeans, включает в себя: отдельные экземпляры готовых оболочек CAEBeans, предназначенные для решения типовых инженерных задач; шаблоны создания оболочек CAEBeans различных слоев; наборы знаний о CAE-пакетах и поддерживаемых ими интерфейсах автоматизации постановки заданий. В набор аппаратных ресурсов входят все рабочие станции, сервера и суперкомпьютеры, обеспечивающие аппаратную поддержку системы CAEBeans.

## 1.3. Основные требования, предъявляемые к программной поддержке технологии CAEBeans

Для обеспечения поддержки CAE-пакетов в грид-средах предлагается разработать систему, удовлетворяющую следующим требованиям.

1. **Адаптируемость к конкретному инженерному пакету.** Разрабатываемая система не должна базироваться на функциональных возможностях конкретного инженерного пакета или набора компонентов. Система должна обеспечивать возможность интеграции различных компонентов различных CAE-пакетов в процессе решения конкретных задач и обеспечивать адаптируемость к конкретному инженерному пакету.

2. **Адаптируемость к конкретной проблемной области.** Разрабатываемая система не должна быть узкоспециализированной в конкретной области компьютерного моделирования. Должны существовать возможности адаптации данной системы как для задач из определенной проблемной области, так и для таких задач, решение которых требует применения знаний из нескольких проблемных областей (мультифизических задач).

3. **Независимость от программно-аппаратных платформ.** На сегодняшний день существует широкий спектр операционных систем, на которых могут функционировать служебные и/или пользовательские компоненты инженерных систем. Разрабатываемая технология должна иметь возможность функционировать на большинстве таких операционных систем и архитектур.

4. **Поддержка сервисно-ориентированного подхода в грид.** Необходимо обеспечить возможность предоставления удаленного доступа к ресурсам различных инженерных пакетов, а также обеспечить возможность организации автоматического взаимодействия этих ресурсов в процессе решения задач. Это влечет за собой требование поддержки современных стандартов распределенных вычислительных систем и сервисно-ориентированного подхода предоставления ресурсов.

## 2. Архитектура системы CAEBeans

### 2.1. Слои системы CAEBeans

Архитектура системы CAEBeans формируется из четырех слоев: концептуального, логического, физического и системного. Обобщенная схема слоев системы CAEBeans приведена на рис. 1.

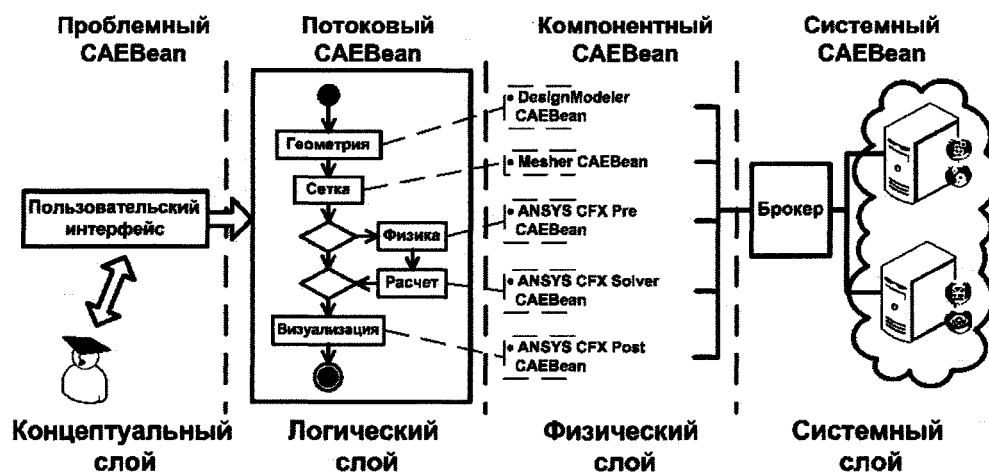


Рис. 1. Обобщенная схема слоев системы CAEBeans

### 2.2. Концептуальный слой CAEBeans

Концептуальный слой системы формируется на основе оболочек CAEBeans которые мы будем называть проблемными. Пользовательский интерфейс, предоставляемый *проблемным CAEBean*, является основным средством взаимодействия пользователя с системой CAEBeans. Посредством пользовательского интерфейса *проблемного CAEBean*, ориентированного на решение определенного класса инженерных задач, пользователь может произвести постановку инженерной задачи; проследить за ходом решения поставленной задачи; получить требуемые результаты решения. Внешний вид пользовательского интерфейса *про-*



блемного *CAEBean* может значительно варьироваться в зависимости от класса задач, решаемых данной оболочкой.

Процесс постановки задачи посредством *проблемного CAEBean* сводится к указанию тем или иным образом значений входных параметров, характеризующих задачи соответствующего класса. Таким образом обеспечивается проблемно-ориентированная постановка задачи, независимая от функциональных особенностей программных продуктов, на основе которых будет производиться ее решение. *Проблемный CAEBean* скрывает от пользователя «лишнюю» функциональность САЕ-пакета, распределенный характер вычислительной среды, структуру аппаратных, программных и лицензионных ресурсов.

Также технология *CAEBeans* предусматривает возможность формирования дерева *проблемных CAEBeans*, которая подробно рассмотрена в п. 1.1. Это позволяет организовать подстройку *проблемных CAEBeans* под возможную конкретизацию базовой общей задачи в соответствие с требованиями конечных пользователей.

При постановке пользователем задачи на решение, соответствующий *проблемный CAEBean* формирует полный дескриптор задачи, представляющий собой множество пар «параметр – значение». Данные параметры могут иметь определенную семантику как с точки зрения проблемной области задачи, так и с точки зрения особенностей процесса моделирования и анализа. При формировании полного дескриптора задачи не делается различий между тем, указывал ли пользователь значение данного параметра явно, или же оно было тем или иным способом вычислено соответствующим *проблемным CAEBean*. При этом набор параметров, входящих в полный дескриптор задачи, одинаков для всех *проблемных CAEBean*, входящих в одно дерево проблемных оболочек. Сформированный полный дескриптор задачи передается в *поточный CAEBean*, представляющий логический слой системы *CAEBeans*.

### 2.3. Логический слой *CAEBeans*

Логический слой системы *CAEBeans* представлен так называемым *поточным CAEBean*, реализующим логический план решения определенного класса задач компьютерного моделирования. Логический план решения задачи представляет собой ориентированный граф, в вершинах которого могут находиться блоки двух типов: подзадачи, выполняемые отдельными базовыми компонентами (сущность базового компонента подробно рассматривается в п.3.1), и специальные служебные операции управления потоком решения задачи (такие, как ветвление, распараллеливание и т.п.), что обеспечивает возможности гибкого исполнения логического плана (рис. 2).

При получении полного дескриптора задачи, *поточный CAEBean* распределяет массив переданных параметров по блокам операций логического плана решения задачи (пример распределения набора параметров приведен на рис. 2). Если параметр управляет потоком решения задачи, его значение передается в один из блоков управления, где производится его анализ и принимается решение о дальнейшем ходе потока решения задачи. Иначе, значение параметра передается в соответствующий блок подзадачи, где производится его дальнейшая интерпретация.

Решение каждой подзадачи инкапсулируется отдельным *компонентным CAEBean*, представляющим физический слой системы *CAEBeans*. В процессе решения задачи *поточный CAEBean*, «руководствуясь» планом решения задачи, передает параметры подзадачи соответствующим *компонентным CAEBean* и получает от них результаты решения соответствующих подзадач.

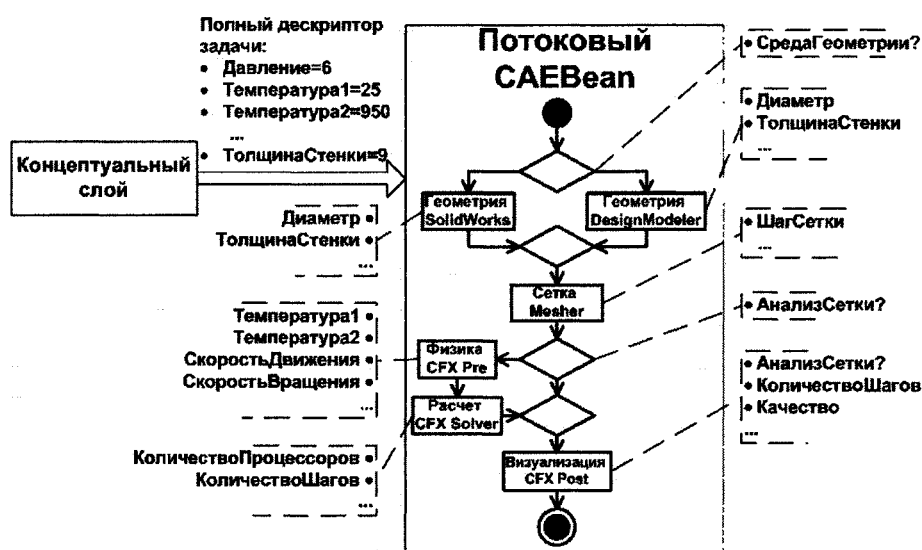


Рис. 2. Пример логического плана решения задачи

#### 2.4. Физический слой CAEBeans

Компонентные оболочки CAEBean, составляющие физический слой системы CAEBeans, инкапсулируют процесс постановки и решения конкретной подзадачи компьютерного моделирования посредством определенного базового компонента. Каждый отдельный базовый компонент обладает уникальным интерфейсом автоматизации постановки и решения заданий. В качестве примера таких интерфейсов можно привести: лог-файлы и макросы, поддерживаемые САЕ-пакетом ANSYS Mechanical; файлы сценариев на языке Python, поддерживаемые САЕ-пакетом Abaqus; текстовый файл CCL (Command Language File – Файл языка команд) поддерживаемый решателем ANSYS CFX-Solver. В связи с тем, что каждый конкретный базовый компонент обладает уникальным интерфейсом автоматизации постановки задач, невозможно создать универсальную систему, которая позволяла бы сформировать постановку задания для любого компонента по данному проблемно-ориентированному описанию задачи.

*Компонентный CAEBean* обладает информацией о методах взаимодействия с конкретным базовым компонентом. В зависимости от интерфейса автоматизированной постановки задач, поддерживаемого базовым компонентом, разрабатывается специальный генератор постановки данной подзадачи. В процессе решения задачи, *компонентному CAEBean* из *потокowego CAEBean* передается набор значений параметров, на основе которого генерируется файл постановки задания.

Другой важной функцией *компонентных CAEBean* является инкапсуляция взаимодействия с брокером ресурсов и вычислительной грид-средой (процесс взаимодействия *компонентного CAEBean* с грид-средой подробно рассмотрен в пп. 3.3.1, 3.3.2). *Компонентный CAEBean* соединяется с *системным CAEBean*, представляющим конкретный базовый компонент в грид-среде, и передает ему файл постановки задания.

Внедрение физического слоя в систему CAEBeans позволяет обеспечить универсальность применения совместимых базовых компонентов для решения одинаковых подзадач. Универсальность подхода обеспечивается тем, что проблемно-ориентированная постановка подзадачи не зависит от интерфейса конечного базового компонента. Таким образом, возможность применения того или иного базового компонента для решения определенной подзадачи зависит только от возможности реализации *компонентного CAEBean*, транслирующего постановку подзадачи в соответствующую компонентно-ориентированную форму.

### 3. Системный слой CAEBeans

#### 3.1. Базовый компонент

С точки зрения системной реализации, большинство современных CAE-систем может быть представлено как набор относительно функционально-независимых компонентов, каждый из которых отвечает за собственную ступень технологического цикла решения задачи компьютерного моделирования. Можно привести следующие типичные блоки, реализуемые в различных современных инженерных системах: построение геометрии; формирование сетки; определение физики; численное моделирование поставленной задачи; визуализация и анализ результатов решения. В качестве примеров таких компонентов, можно привести генератор сеток ANSYS CFX Mecher, решатель LSDyna или пост-процессор ANSYS CFX Post.

С точки зрения CAEBeans, такие компоненты (*базовые компоненты*) – это изолированные приложения, которые представляются как «черный ящик», реализующий некий специфический интерфейс [8]. Для каждого *базового компонента* существует уникальный способ указать набор входных параметров, запустить процесс решения подзадачи, получить промежуточные результаты решения или информацию о ходе решения, получить конечный результат.

#### 3.2. Системный CAEBean

*Системным CAEBean* называется оболочка, инкапсулирующая функциональные возможности конкретного базового компонента и обеспечивающая сервисно-ориентированный подход к постановке задач и получению результатов (рис. 3). В общем случае, *базовые компоненты* не поддерживают возможности удаленной постановки задачи и предоставления результата удаленному пользователю. *Системный CAEBean*, реализованный для конкретного базового компонента, является его «представителем» в вычислительной грид-среде. Реализация соответствующего *системного CAEBean* полностью зависит от поддерживаемых данным базовым компонентом методов автоматизации постановки задач и получения результата.



Рис. 3. Схема представления системного CAEBean

Исследования, проведенные в работах [8,9], показали, что практически во всех случаях современными инженерными системами поддерживается широкий спектр различных методов управления процессом постановки и решения задач.

#### 3.3. Структура и функциональные особенности системного слоя CAEBeans

##### 3.3.1. Структура системного слоя CAEBeans

Для решения подзадачи, поставленной на физическом слое *компонентным CAEBean*, необходимо обеспечить ее проекцию на набор ресурсов, предоставляемых системным слоем.

Для организации этого процесса используется *брокер ресурсов* – автоматизированная система регистрации, анализа и предоставления ресурсов распределенной вычислительной среды (рис. 4). Брокер представляет собой промежуточное программное обеспечение, обеспечивающее оптимальный выбор и виртуализацию доступа к наборам ресурсов в гетерогенной вычислительной среде [2].

Возможно выделить следующие основные задачи *брокера ресурсов*: обработка каталога ресурсов грид-среды; анализ запросов на предоставление ресурсов, поступающих от *компонентных CAEBean*; сбор и предоставление информации об актуальном состоянии грид-среды.

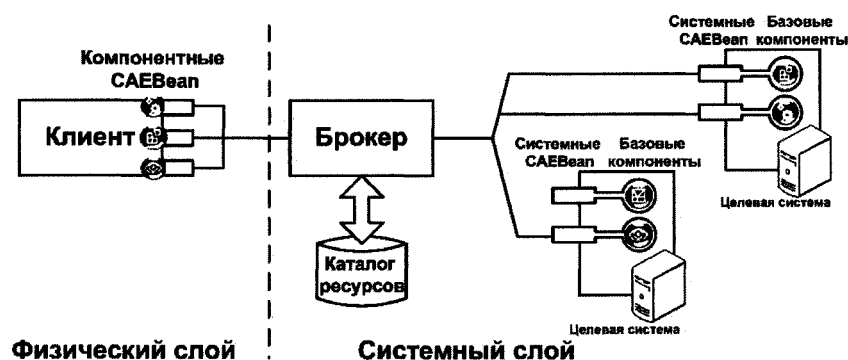


Рис. 4. Архитектура системного слоя

В процессе формирования гетерогенной вычислительной среды, на каждом отдельном вычислителе создается набор целевых систем. Каждая целевая система характеризуется определенным набором свойств, описывающих физические и логические ресурсы, предоставляемые целевой системой. Физические ресурсы определяются такими параметрами, как операционная система, объем доступной оперативной памяти, объем доступного дискового пространства, тип и количество процессоров и т.п. Логические ресурсы определяются набором и характеристиками предоставляемых *системных CAEBean*. Это могут быть такие характеристики как тип CAEBean, версия, параметры запуска, набор доступных модулей и т.п. Данная информация передается в каталог ресурсов во время инициализации целевой системы и автоматически обновляется при изменении состояния вычислителя.

*Компонентные CAEBean* обладают определенной информацией о том, какие значения характеристик вычислительной среды позволяют оптимизировать процесс решения соответствующей подзадачи. Данная информация может формироваться из различных источников.

1. В ходе постановки задачи посредством *проблемного CAEBean* пользователь может указать определенные критерии, которым должен удовлетворять процесс решения задачи (например, максимально допустимое время решения задачи). Данные требования транслируются *компонентному CAEBean*, который обладает достаточными знаниями о ходе решения соответствующей подзадачи и может перевести данные требования в запрос конкретных физических характеристик вычислительной среды.

2. Разработчиком *компонентного CAEBean* может быть заложен определенный набор требований (пожеланий) к вычислительной среде, обеспечение которых позволит оптимизировать процесс решения данного типа подзадач (минимальный объем оперативной памяти, ограничение максимального количества процессоров и т.п.)

Таким образом, *компонентный CAEBean* формирует запрос к брокеру ресурсов, в котором описывает характеристики вычислительной среды, необходимой для решения данной подзадачи.

### 3.3.2. Алгоритм предоставления ресурсов грид-среды

В процедуре проекции подзадачи с физического на системный слой брокер ресурсов выступает в качестве промежуточного звена, обеспечивающего поиск и предоставление ресурсов, оптимальных для решения данной подзадачи (рис. 5).

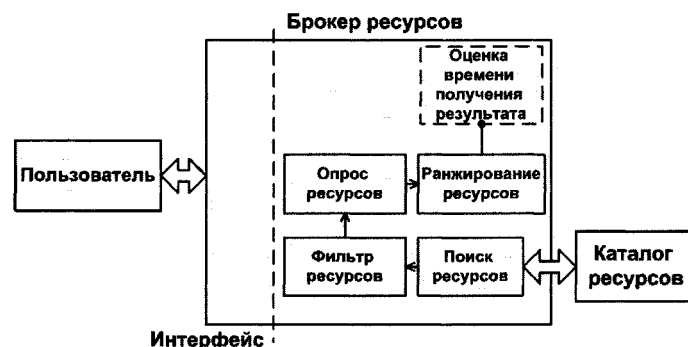


Рис. 5. Внутренняя структура брокера ресурсов

Рассмотрим более подробно алгоритм выделения и использования ресурсов грид-среды с участием брокера ресурсов.

1. *Компонентный CAEBeap* производит запрос к *брокеру* на предоставление ресурса.
2. *Брокер* производит запрос каталогу ресурсов, формируя список узлов, характеристики которых удовлетворяют заявленным обязательным требованиям и правам пользователя, поставившего задачу.
3. *Брокер* производит опрос узлов из выбранного списка, для уточнения их доступности и определения значений их динамических характеристик (состояние очереди задач, доступный объем оперативной памяти и т.п.).
4. *Брокер* оценивает общее время получения результата (TTD – Total Time to Delivery) [10] для каждого из анализируемых узлов и выбирает узел, с наименьшим значением данного параметра.
5. *Брокер* передает адрес предоставляемого ресурса *компонентному CAEBeap*.
6. *Компонентный CAEBeap* производит захват предоставленного ресурса, а *брокер* маркирует данный ресурс как занятый.
7. Дальнейший процесс постановки, решения и получения результатов происходит напрямую, между *компонентным CAEBeap* и предоставленным ресурсом без участия *брокера*.
8. После получения результатов вычисления *компонентный CAEBeap* производит освобождение ресурса и извещение *брокера* об его освобождении.

### 3.3.3. Оценка общего времени получения результата

Одной из наиболее важных задач брокера ресурсов является оценка общего времени получения результата (TTD – Total Time to Delivery) при постановке задачи пользователем конкретному вычислительному ресурсу. В дальнейшем, на основе этой оценки, определяется ресурс, обеспечивающий оптимальное время исполнения поставленной задачи. При оценке TTD необходимо учитывать, что от постановки до получения конечных результатов задача, как правило, проходит следующие стадии решения [10].

1. **Постановка.** Производится передача исходных файлов и сценариев решения задачи выбранному ресурсу.
2. **Ожидание.** Это время, необходимое для запуска задачи. Состоит из времени ожидания задачи в очереди задач выбранного ресурса, времени **постановки** задачи и т.п.

3. **Исполнение.** Проведение вычислений на выбранном ресурсе.

4. **Завершение.** Передача файлов результатов в требуемое хранилище.

Необходимо отметить, что время ожидания обычно определяется как максимум из времени на постановку задачи и времени на все остальные операции, необходимые для того, чтобы запустить задачу на исполнение. Это связано с тем, что процесс передачи исходных файлов может происходить независимо от всех остальных процессов подготовки задачи. Таким образом, TTD может быть оценено как сумма оценок времени на проведение операций ожидания, исполнения и завершения.

При формировании данных оценок, брокер использует информацию о подзадаче, передаваемую соответствующим *компонентным CAEBean*. В процессе запроса вычислительных ресурсов *компонентный CAEBean* может предоставить брокеру такую информацию, как размер исходных данных; вычислительная сложность рассматриваемой подзадачи; масштабируемость подзадачи и т.п. На основе этих данных и информации о текущих характеристиках грид-среды брокер ресурсов может произвести оценку общего времени получения результата.

#### 4. Реализация оболочек CAEBeans

В рамках исследования возможностей внешнего управления процессом постановки и решения задач в современных CAE-пакетах были реализованы прототипы проблемно-ориентированных оболочек над пакетами ANSYS Mechanical, ANSYS CFX, ABAQUS, DEFORM [9].

Важной частью работы является применение разрабатываемой технологии для решения конкретных производственных задач. В рамках контракта с Челябинским Трубопрокатным заводом созданы проблемно-ориентированные оболочки для решения задач, возникающих в процессе производства и эксплуатации изделий предприятия. По заказу предприятия решены задачи: «Разработка проблемно-ориентированных оболочек для моделирования воздействия деформирующих нагрузок на резьбовые соединения обсадных и насосно-компрессорных труб» [6] и «Разработка проблемно-ориентированных оболочек для моделирования овализации труб при закалке» [7]. Разработанные оболочки инкапсулируют процесс решения соответствующих задач в рамках функциональных возможностей пакетов ANSYS Mechanical и DEFORM. Данные оболочки позволяют производить моделирование поставленных задач средствами высокопроизводительного комплекса вычислительного центра «Infinity» Южно-Уральского государственного университета.

#### Заключение

В статье представлены основные результаты разработки технологии CAEBeans, ориентированной на сервисно-ориентированное предоставление ресурсов CAE-пакетов в рамках гетерогенных высокопроизводительных сред. Архитектура представленной системы может быть разделена на четыре слоя: концептуальный; логический; физический и системный. *Проблемные оболочки CAEBean*, формирующие концептуальный слой системы CAEBeans предоставляют пользовательский интерфейс решения конкретного класса инженерных задач. Логический слой системы формируется *потокowym CAEBean*, реализующим логический план решения конкретного класса инженерных задач. *Компонентные оболочки CAEBean*, составляющие физический слой системы CAEBeans, отвечают за формирование заданий базовым компонентам и взаимодействие с вычислительной грид-средой. Системный слой CAEBeans представлен вычислительной грид-средой, ресурсы которой используются для решения инженерных задач. Процесс взаимодействия пользовательской системы с грид-

ресурсами происходит посредством брокера ресурсов.

Можно выделить следующие основные этапы дальнейшего развития работы: программная реализация иерархии оболочек CAEBeans, спецификация стандартов разработки системы; разработка программных средств, обеспечивающих поддержку технологии CAEBeans: CAEBeans Constructor, брокер ресурсов грид-среды. В рамках апробации технологии CAEBeans, необходимо продолжать разработку оболочек CAEBeans для решения реальных задач инженерного анализа. В качестве аппаратной поддержки технологии CAEBeans предполагается задействовать вычислительные ресурсы суперкомпьютерных систем Южно-Уральского государственного университета: «Infinity» и «СКИФ Урал».

*Работа проводилась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (грант 2007-4-1.4-20-01-026), программы СКИФ-ГРИД (грант СГ-1/07) и Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (грант 7434).*

## Литература

1. Бегунов, А.А. Применение результатов моделирования для оптимизации и управления технологическими процессами / А.А. Бегунов // Параллельные вычислительные технологии: тр. Междунар. науч. конф. (28 янв. – 1 февр. 2008 г., г. Санкт-Петербург). – СПб., 2008. – С. 31 – 38.
2. Foster, I. The Grid 2: Blueprint for a New Computing Infrastructure. Second edition / I. Foster, C. Kesselman. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 2003.
3. Foster, I. The Anatomy of the Grid: Enabling Scalable Virtual Organizations / I. Foster, C. Kesselman, S. Tuecke // International J. of Supercomputer Applications and High Performance Computing. – Massachusetts, 2001. – Т. 15, № 3. – С. 200 – 222.
4. Радченко, Г.И. CAEBeans: иерархические системы структурированных проблемно-ориентированных оболочек над инженерными пакетами / Г.И. Радченко, Л.Б. Соколинский // Научный сервис в сети Интернет: многоядерный компьютерный мир. 15 лет РФФИ: тр. Всерос. науч. конф. (24-29 сентября 2007 г., г. Новороссийск). – Новороссийск, 2007. – С. 54 – 57.
5. Радченко, Г.И. BeanShells: интеграция CAE-пакетов в GPE / Г.И. Радченко, Л.Б. Соколинский, И.С. Кутепов // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2007): тр. Междунар. науч. конф. (Челябинск, 29 янв. – 2 февр. 2007 г.). – Челябинск, 2007. – Т.2. – С. 15.
6. Разработка проблемно-ориентированной Grid-оболочки для моделирования резьбовых соединений труб для нефтяных скважин в распределенных вычислительных средах / В.В. Лёушкин, Л.Б. Соколинский, К.А. Чайко, В.В. Юрков // Параллельные вычислительные технологии: тр. междунар. науч. конф. (28 янв. – 1 февр. 2008 г., г. Санкт-Петербург). – СПб., 2008. – С. 534.
7. Дорохов, В.А. Разработка проблемно-ориентированной GRID-оболочки для решения задачи оваллизации труб при закалке / В.А. Дорохов, А.Н. Маковецкий, Л.Б. Соколинский // Параллельные вычислительные технологии: тр. Междунар. науч. конф. (28 янв. – 1 февр. 2008 г., г. Санкт-Петербург). – СПб., 2008. – С. 520.
8. Радченко, Г.И. Разработка компонентно-ориентированных CAEBean-оболочек для пакета ANSYS CFX / Г.И. Радченко, Л.Б. Соколинский, А.В. Шамакина // Параллельные вычислительные технологии: тр. Междунар. науч. конф. (28 янв. – 1 февр. 2008 г., г. Санкт-Петербург). – СПб., 2008. – С. 438 – 443.

9. Методы организации программных интерфейсов к инженерным пакетам в среде GPE / Р.С. Насибулина, К.В. Репина, А.В. Шамакина и др. // Параллельные вычислительные технологии: тр. Междунар. науч. конф. (28 янв. – 1 февр. 2008 г., г. Санкт-Петербург). – СПб., 2008. – С. 537.
10. Elmroth, E. A Grid resource broker supporting advance reservations and benchmark-based resource selection / E. Elmroth, J. Tordsson // Stateof-the-art in Scientific Computing, Springer-Verlag, LNCS. – 2006. – № 3732. – С. 1061 – 1070.

Кафедра системного программирования,  
Южно-Уральский государственный университет  
gleb.radchenko@gmail.com

*Поступила в редакцию 17 марта 2008 г.*



## О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

*В.П. Танана, А.И. Сидикова*

Получена оценка для приближенного решения одной обратной задачи для параболического уравнения в частных производных.

**Ключевые слова:** некорректная задача, обратная задача, параболическое уравнение

Во многих отраслях техники встречаются процессы, связанные с нагреванием твердых тел потоками жидкости или газа. Особую роль при этом играет информация о температуре на поверхности этих тел.

Как правило, единственным способом определения этой температуры является решение граничных обратных задач для уравнений теплообмена в твердых телах по результатам измерений внутри этих тел [1].

В настоящей работе решается одна из таких задач, сформулированная в [2].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a(x)u(x, t), \quad (1)$$

в котором  $x \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ ,  $a(x) \leq 0$  и  $a(x) \in C^2[0, 1]$ .

Предположим, что решение  $u(x, t)$  уравнения (1) удовлетворяет следующим начальному и граничным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

и

$$u(1, t) = v(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Граничное значение  $v(t)$  на правом конце отрезка нам неизвестно, а вместо него дано значение функции  $u(x, t)$  в точке  $x_0 \in (0, 1)$ .

$$u(x_0, t) = \varphi(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Требуется определить значение  $u(t) = u(x_1, t)$ , где  $x_0 < x_1 < 1$ . Эта задача является некорректно поставленной. Потому предположим, что при  $\varphi(t) = \varphi_0(t)$ , где  $\varphi_0 \in W_2^1[0, \infty)$ , существует решение  $u(x, t)$  задачи (1–5) такое, что  $u(x, t)$ ,  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \in C([0, 1]; L_2[0, \infty))$  и

$$u(x_1, t) = u_0(t); \quad t \geq 0, \quad (6)$$

такое, что, соответствующее  $v_0(t) = u(1, t)$  удовлетворяет условию

$$\|v_0\|_{L_2} \leq r. \quad (7)$$

Предположим, что решение  $u(x, t)$  задачи (1 – 4) при  $u(1, t) = v_0(t)$  удовлетворяет условию

$$u(x_0, t) = \varphi_0(t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Пусть точное значение  $\varphi_0(t)$  нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение  $\varphi_\delta(t) \in L_2[0, \infty)$  и уровень погрешности  $\delta > 0$  такие, что

$$\|\varphi_0 - \varphi_\delta\|_{L_2} \leq \delta. \quad (9)$$

Требуется, используя исходные данные  $\varphi_\delta$ ,  $\delta$  и  $r$ , построить приближенное решение  $u_\delta(t)$  задачи (1–5) и оценить его уклонение  $\|u_\delta - u_0\|_{L_2}$  от точного решения  $u_0(t)$ .

Таким образом, задача (1 – 5) неявно определяет оператор  $T$ , действующий из пространства  $L_2[0, \infty)$  в  $L_2[0, \infty)$ , который функции  $\varphi(t)$  ставит в соответствие искомое значение  $u(t) = u(x_1, t)$

$$T \varphi(t) = u(t), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

## 2. Формальное сведение задачи (1 – 5) к задаче вычисления значений оператора

Для формального решения задачи (1 – 5), используем косинус  $F_c$  и синус  $F_s$  преобразования.

Умножив уравнение (1) на мнимую единицу  $i$

$$i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + ia(x)u(x, t), \quad (11)$$

применим к уравнениям (1) и (11) синус и косинус преобразования, соответственно.

После чего получим

$$-\lambda F_c(u) = \frac{d^2 F_s(u)}{dx^2} + a(x)F_s(u), \quad \lambda \geq 0 \quad (12)$$

и

$$\lambda i F_s(u) = i \frac{d^2 F_c(u)}{dx^2} + ia(x)F_c(u), \quad \lambda \geq 0. \quad (13)$$

Складывая почленно соотношения (12) с (13) и нормируя сумму, будем иметь

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \lambda \int_0^\infty u(x, t)(\cos \lambda t - i \sin \lambda t) dt = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \int_0^\infty u(x, t)(i \cos \lambda t + \sin \lambda t) dt \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} a(x) \int_0^\infty u(x, t)(i \cos \lambda t + \sin \lambda t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом того, что  $i \cos \lambda t + \sin \lambda t = i(\cos \lambda t - i \sin \lambda t)$ , из (14) следует

$$\frac{d^2 \hat{u}(x, \lambda)}{dx^2} + a(x)\hat{u}(x, \lambda) = i\lambda \hat{u}(x, \lambda), \quad (15)$$

где  $\hat{u}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u(x, t) e^{-i\lambda t} dt$ .

Из (3) и (5) будем иметь, что

$$\hat{u}(0, \lambda) = 0, \quad (16)$$

а

$$\hat{u}(x_0, \lambda) = \hat{\varphi}(\lambda), \quad (17)$$

где  $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-i\lambda t} dt$ .

Из общего вида решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка следует, что задача (15–17) имеет решение

$$\hat{u}(x, \lambda) = l(\lambda)e(x, \lambda); \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \geq 0, \quad (18)$$

где  $l(\lambda)$  – некоторая функция, а  $e(x, \lambda)$  – решение задачи (15), (16), удовлетворяющее условию  $e'_x(0, \lambda) = 1$ .

Используя условие (17), определим функцию  $l(\lambda)$  формулой

$$l(\lambda) = \frac{\hat{\varphi}(\lambda)}{e(x_0, \lambda)}, \quad \lambda \geq 0. \quad (19)$$

Из (18), (19) следует, что

$$\hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}(\lambda); \quad \lambda \geq 0. \quad (20)$$

Исследуем поведение функции  $l(\lambda)$ , определяемой формулой (19).

**Теорема 1.** Для любого  $\lambda \geq 0$  функция  $e(x_0, \lambda) \neq 0$ , а функция  $l(\lambda)$  непрерывна на полу-прямой  $[0, \infty)$ .

*Доказательство.* Так как функции  $\hat{\varphi}(\lambda)$  и  $e(x_0, \lambda)$  непрерывны на полупрямой  $[0, \infty)$ , то для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любого  $\lambda \geq 0$   $e(x_0, \lambda) \neq 0$ . Предположим противное, то есть найдется  $\lambda > 0$  такое, что

$$e(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (21)$$

Тогда рассмотрим пространство  $H_0 = L_2[0, x_0]$  над полем комплексных чисел и оператор  $B$ , действующий из  $H_0$  в  $H_0$  и определяемый формулами

$$Bu = \frac{d^2u}{dx^2} + a(x)u, \quad u \in D(B), \quad (22)$$

а

$$D(B) = \{u : u, Bu \in H_0, u(0) = u(x_0) = 0\}. \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что оператор  $B$  отрицательно определен и самосопряжен. Поэтому существует число  $\lambda_1 < 0$  такое, что спектр  $Sp(B)$  оператора  $B$  лежит в полупрямой  $(-\infty, \lambda_1]$ .

Так как

$$Be(x, \lambda_0) = i\lambda_0 e(x, \lambda_0),$$

то  $e(x, \lambda_0) = 0$  при любом значении  $x \in [0, x_0]$  и  $e'_x(0, \lambda_0) = 0$ , что противоречит определению функции  $e(x, \lambda)$  и доказывает теорему.  $\square$

Пусть  $\tau = \sqrt{\lambda}$ , а  $e_1(x, \tau) = e(x, \lambda)$ . Тогда функция  $e_1(x, \tau)$  будет удовлетворять интегральному уравнению

$$e_1(x, \tau) = \frac{\text{sh } \mu_0 x \tau}{\mu_0 \tau} - \int_0^x \frac{\text{sh } \mu_0 (x - \xi) \tau}{\mu_0 \tau} a(\xi) e_1(\xi, \tau) d\xi, \quad (24)$$

где  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ ,  $x \in [0, 1]$ , а  $\tau \geq 0$ . Исследуем поведение функции  $|e_1(x, \tau)|$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Пусть  $a(x) \in C^2[0, 1]$  и для любого  $x \in [0, 1]$   $a(x) \leq 0$ . Тогда существует число  $\tau_1 > 0$  такое, что для любого  $\tau \geq \tau_1$  справедливы неравенства

$$\frac{1}{3} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau|}{\tau} \leq |e_1(x, \tau)| \leq \frac{4}{3} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau|}{\tau}.$$

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon(x, \tau) = \frac{\mu_0 \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} e_1(x, \tau)$ . Тогда из (24) следует, что

$$\varepsilon(x, \tau) = 1 - \frac{1}{\mu_0 \tau} \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0(x - \xi) \tau \operatorname{sh} \mu_0 \xi \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} a(\xi) \varepsilon(\xi, \tau) d\xi. \quad (25)$$

Так как

$$\left| \frac{\operatorname{sh} \mu_0(x - \xi) \tau \operatorname{sh} \mu_0 \xi \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} \right| = 1 + o(1) \text{ при } \tau \rightarrow \infty,$$

то из (25) следует существование числа  $\tau_1 > 0$  такого, что для любого  $\tau \geq \tau_1$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{\mu_0 \tau} \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0(x - \xi) \tau \operatorname{sh} \mu_0 \xi \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} a(\xi) d\xi \right| \leq \frac{1}{4}. \quad (26)$$

Решение уравнения (25) будем искать в виде

$$\varepsilon(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(x, \tau), \quad (27)$$

где  $\varepsilon_0(x, \tau) = 1$ , а

$$\varepsilon_{k+1}(x, \tau) = -\frac{1}{\mu_0 \tau} \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0(x - \xi) \tau \operatorname{sh} \mu_0 \xi \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} a(\xi) \varepsilon_k(\xi, \tau) d\xi. \quad (28)$$

Из (26–28) следует, что для любых значений  $k$ ,  $\tau \geq \tau_1$  и  $x \in [0, 1]$

$$|\varepsilon_k(x, \tau)| \leq 4^{-k}, \quad (29)$$

а из (27) и (29), что для любых значений  $x \in [0, 1]$  и  $\tau \geq \tau_1$

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} \leq |\varepsilon(x, \tau)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}.$$

Таким образом для любых значений  $x \in [0, 1]$  и  $\tau \geq \tau_1$

$$\frac{1}{3} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau|}{\tau} \leq |e_1(x, \tau)| \leq \frac{4}{3} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau|}{\tau}.$$

Тем самым теорема доказана.  $\square$

Так как

$$|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau| = e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}} (1 + o(1)) \text{ при } \tau \rightarrow \infty,$$

то из теоремы 2 следует существования числа  $\tau_2 \geq \tau_1$  такого, что для любых значений  $\tau \geq \tau_2$  и  $x \in [0, 1]$

$$\frac{1}{6} \frac{e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}}}{\tau} \leq |e_1(x, \tau)| \leq \frac{8}{3} \frac{e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}}}{\tau}. \quad (30)$$

### 3. Доказательство метрической эквивалентности задач (10) и (20)

Пусть  $\overline{H} = L_2[0, \infty) + iL_2[0, \infty)$ , а  $F$ -оператор, отображающий пространство  $L_2[0, \infty)$  в  $\overline{H}$  и определяемый формулой

$$F(u(t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \geq 0, u(t) \in L_2[0, \infty). \quad (31)$$

**Лемма 1.** Оператор  $F$ , определяемый формулой (31), изометричен.

*Доказательство.* Пусть  $u(t) \in L_2[0, \infty)$ . Продолжим эту функцию на отрицательную полуось, положив

$$u(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (32)$$

Таким образом  $u(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ .

Обозначим через  $\hat{u}(\lambda)$  преобразование Фурье функции  $u(t)$

$$\hat{u}(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (33)$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [3] на с. 412, следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\|_{L_2} = \|u(t)\|_{L_2}. \quad (34)$$

Из (32) и (33) следует, что

$$\hat{u}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u(t)e^{-i\lambda t} dt, & \lambda \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u(t)e^{i|\lambda|t} dt, & \lambda < 0 \end{cases} \quad (35)$$

Из (35) следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\|_{L_2}^2 = \int_0^{\infty} |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda + \int_0^{\infty} |\overline{\hat{u}(\lambda)}|^2 d\lambda, \quad (36)$$

где  $\overline{\hat{u}(\lambda)}$ -функция, сопряженная функции  $\hat{u}(\lambda)$ .

Так как для любого  $\lambda \geq 0$

$$\|\hat{u}(\lambda)\|_{L_2}^2 = \sqrt{2} \int_0^{\infty} |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda, \quad (37)$$

а из (34) и (37) следует утверждение леммы. □

Теперь введем пространства  $\Phi$ ,  $\hat{U}$  и  $\hat{V}$ . Предположим, что они являются подпространствами  $\overline{H}$  и определяются формулами

$$\hat{\Phi} = F[L_2[0, \infty)], \quad (38)$$

где  $F$ -оператор, определяемый формулой (31),

$$\hat{U} = \{\hat{u} : \hat{u} \in \overline{H}, \hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda) e(x_1, \lambda) F[u(t)], u(t) \in L_2[0, \infty)\}, \quad (39)$$

а

$$\hat{V} = \{\hat{v} : \hat{v} \in \overline{H}, \hat{v}(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda) e(1, \lambda) F[v(t)], v(t) \in L_2[0, \infty)\}. \quad (40)$$

Из леммы 1 следует, что пространства  $\hat{\Phi}$ ,  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$ , определяемые формулами (38-40), изометричны пространству  $L_2[0, \infty)$ .

Теперь запишем задачу (20) в виде

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{T}\hat{\varphi}(\lambda), \quad (41)$$

где  $\hat{T}\hat{\varphi}(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}(\lambda)$ ;  $\hat{\varphi}(\lambda) \in \hat{\Phi}$ , а  $\hat{u}(\lambda) \in \hat{U}$ .

Таким образом, из формулы (30) следует, что задача (41) является задачей вычисления значений неограниченного оператора  $\hat{T}$ , и она метрически эквивалентна исходной задаче (10).

#### 4. Решение задачи (41)

Так как задача (41) некорректна, то для ее решения в пространстве  $\hat{U}$  введем класс корректности  $\hat{M}_r$ . Для определения  $\hat{M}_r$  используем условие (20). Пусть  $\hat{L}$ —линейный инъективный оператор, действующий из  $\hat{U}$  в  $\hat{V}$  и определяемый формулой

$$\hat{L}\hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_1, \lambda)e(1, \lambda)\hat{u}(\lambda), \quad (42)$$

где  $\hat{u}(\lambda) \in \hat{U}$ , а  $\hat{L}\hat{u}(\lambda) \in \hat{V}$ .

Тогда

$$\hat{M}_r = \{\hat{u}(\lambda) : \hat{u}(\lambda) \in \hat{U}, \|\hat{L}\hat{u}\| \leq r\}. \quad (43)$$

Далее исходные пространства  $\hat{\Phi}$  и  $\hat{U}$  разложим в ортогональные суммы

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_1 \dot{+} \hat{\Phi}_2 \quad (44)$$

и

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \dot{+} \hat{U}_2, \quad (45)$$

где  $\hat{\Phi}_1 = \{\hat{\varphi}_1(\lambda) : \hat{\varphi}_1(\lambda) = F[\varphi(t)], \varphi \in L_2[0, \infty), 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2\}$ ,

$\hat{\Phi}_2 = \{\hat{\varphi}_2(\lambda) : \hat{\varphi}_2(\lambda) = F[\varphi(t)], \varphi \in L_2[0, \infty), \tau_2^2 \leq \lambda < \infty\}$

и аналогично

$\hat{U}_1 = \{\hat{u}_1(\lambda) : \hat{u}_1(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}_1(\lambda), \hat{\varphi}_1(\lambda) \in \hat{\Phi}_1\}$ ,

$\hat{U}_2 = \{\hat{u}_2(\lambda) : \hat{u}_2(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}_2(\lambda), \hat{\varphi}_2(\lambda) \in \hat{\Phi}_2\}$ .

Ортогональное разложение пространств (44) и (45) порождает разбиение задачи (41) на две.

Первая из них

$$\hat{u}_1(\lambda) = \hat{T}_1\hat{\varphi}_1(\lambda); \hat{u}_1 \in U_1, \text{ а } \hat{\varphi}_1 \in \hat{\Phi}_1, \quad (46)$$

где  $\hat{T}_1\hat{\varphi}_1(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}_1(\lambda)$ .

Так как, на основании теоремы 1, функция  $e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)$  непрерывна на отрезке  $[0, \tau_2^2]$ , то существует число  $c_1 > 0$  такое, что для любого  $\lambda \in [0, \tau_2^2]$

$$|e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)| \leq c_1. \quad (47)$$

Из (47) будет следовать ограниченность оператора  $\hat{T}_1$  и, соответственно, корректность задачи (46).

Приближенное решение задачи (46) обозначим через  $\hat{u}_{1,\delta}(\lambda)$  и определим формулой

$$\hat{u}_{1,\delta}(\lambda) = \hat{T}_1 \hat{\varphi}_{1,\delta}(\lambda), \quad (48)$$

где  $\hat{\varphi}_{1,\delta}(\lambda) = F[\varphi_\delta(t)]; \quad 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2$ .

Из (9), (47), (48) и леммы 1 будет следовать оценка

$$\|\hat{u}_{1,\delta} - \hat{u}_{1,0}\| \leq c_1 \delta, \quad (49)$$

где  $\hat{u}_{1,0}(\lambda) = \hat{T}_1 \hat{\varphi}_{1,0}(\lambda)$ , а  $\varphi_{1,0}(\lambda) = F[\varphi_0(t)], \quad 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2$ .

Вторая задача будет иметь вид

$$\hat{u}_2(\lambda) = \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda); \quad \hat{u}_2 \in \hat{U}_2, \text{ а } \hat{\varphi}_2 \in \hat{\Phi}_2, \quad (50)$$

где  $\hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda) e(x_1, \lambda) \hat{\varphi}_2(\lambda), \quad \lambda \geq \tau_2^2$ , а

$$D(\hat{T}_2) = \{\hat{\varphi}_2(\lambda) : \hat{\varphi}_2(\lambda) \in \hat{\Phi}_2, \quad \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda) \in U_2\}.$$

Из теоремы 2 следует, что оператор  $\hat{T}_2$  неограничен и потому задача (50) некорректна. Предположим, что  $\alpha > \tau_2^2$  и определим оператор  $\hat{T}_2^\alpha$ , отображающий пространство  $\hat{\Phi}_2$  в  $\hat{U}_2$ , формулой

$$\hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_2(\lambda) = \begin{cases} \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda), & \text{при } \tau_2^2 \leq \lambda \leq \alpha, \\ 0 & , \text{ при } \lambda > \alpha. \end{cases} \quad (51)$$

Приближенное решение  $\hat{u}_{2,\delta}^\alpha$  задачи (50) будет иметь вид

$$\hat{u}_{2,\delta}^\alpha(\lambda) = \hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_{2,\delta}(\lambda), \quad (52)$$

где  $\hat{\varphi}_{2,\delta}(\lambda) = F[\varphi_\delta(t)]; \quad \tau_2^2 \leq \lambda < \infty$ .

Таким образом,

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \leq \|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}^\alpha\| + \|\hat{u}_{2,0}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\|, \quad (53)$$

где  $\hat{u}_{2,0}(\lambda) = \hat{T}_2 \hat{\varphi}_{2,0}(\lambda)$ ,  $\hat{u}_{2,0}^\alpha(\lambda) = \hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_{2,0}(\lambda)$ , а  $\hat{\varphi}_{2,0}(\lambda) = F[\varphi_0(t)], \quad \tau_2^2 \leq \lambda < \infty$ .

Так как  $\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}^\alpha\| \leq \|\hat{T}_2^\alpha\| \cdot \delta$ , а  $\|\hat{u}_{2,0}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \leq \Delta_1(\alpha)$ ,

где  $\Delta_1^2(\alpha) = \sup \left\{ \int_\alpha^\infty |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda : \hat{u} \in \hat{M}_r \right\}$ , то из (53) следует, что

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \leq \Delta_1(\alpha) + \|\hat{T}_2^\alpha\| \cdot \delta. \quad (54)$$

Из (30), (50) и (51) следует, что

$$\frac{1}{16} e^{(x_1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \leq \|\hat{T}_2^\alpha\| \leq 16 e^{(x_1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}; \quad \alpha > \tau_2^2. \quad (55)$$

Перейдем к оценке величины  $\Delta_1(\alpha)$ . Из (43) следует, что, если  $\hat{u}(\lambda) \in \hat{M}_r$ , то

$$\int_\alpha^\infty |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \quad (56)$$

и

$$\int_\alpha^\infty |e^{-1}(x_1, \lambda) e(1, \lambda)|^2 |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \leq r^2. \quad (57)$$

Так как  $\lambda \geq \alpha$ , то из (30) и (57) следует, что

$$\int_{\alpha}^{\infty} |e^{-1}(x_1, \lambda)e(1, \lambda)|^2 |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \geq \left(\frac{1}{16}\right)^2 e^{2(1-x_1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \int_{\alpha}^{\infty} |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \quad (58)$$

Из (56 – 58) следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\| \leq 16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}$$

и, соответственно,

$$\Delta_1(\alpha) \leq 16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}. \quad (59)$$

Если, используя схему М.М. Лаврентьева [4], параметр  $\alpha$  выбрать из условия

$$16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = 16\delta e^{(x_1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}, \quad (60)$$

то из (54 – 60) будет следовать оценке погрешности

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^{\alpha(\delta)} - \hat{u}_{2,0}\| \leq 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}}, \quad (61)$$

где  $\alpha(\delta)$  решение уравнения (60).

Если положить

$$\hat{u}_{\delta}(\lambda) = \begin{cases} \hat{u}_{1,\delta}(\lambda), & \text{при } 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2, \\ \hat{u}_{2,\delta}^{\alpha(\delta)}(\lambda), & \text{при } \lambda > \tau_2^2, \end{cases}$$

то из (49) и (61) следует, что

$$\|\hat{u}_{\delta}(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \leq c_1\delta + 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}}, \quad (62)$$

где  $\hat{u}_0(\lambda) = \hat{T}\hat{\varphi}_0(\lambda)$ , а  $\hat{\varphi}_0(\lambda) = F[\varphi_0(t)]$ .

Пусть  $u_{\delta}(t) = |F^{-1}[\hat{u}_{\delta}(\lambda)]|$ , тогда из (62) и леммы 1 следует, что

$$\|u_{\delta}(t) - u_0(t)\| \leq c_1\delta + 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}},$$

где  $u_0(t) = T\varphi_0(t)$ .

*Работа проводилась при финансовой поддержке гранта р\_урал\_а с 07-01-96001.*

## Литература

1. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988.
2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. – 2006. – Т. 407, № 3. – С. 316 – 318.
3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972.
4. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Наука, 1962.

Кафедра вычислительной математики,  
Южно-Уральский государственный университет  
7413604@mail.ru

*Поступила в редакцию 29 февраля 2008 г.*



## О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ

*В.Е. Федоров*

В теории вырожденных полугрупп операторов существенную роль играют понятия  $(L, p)$ -радиального и сильно  $(L, p)$ -радиального операторов. В данной работе показано, что в определенных ситуациях каждое из них подразумевает обобщение на случай вырожденных сильно непрерывных полугрупп условий Хилле – Йосиды на инфинитезимальный генератор  $(C_0)$ -непрерывной полугруппы операторов. Кроме того, получены достаточные условия эквивалентности этих понятий. Аналогичные результаты получены и для  $(L, p)$ -секториальных и сильно  $(L, p)$ -секториальных операторов в случае вырожденных сильно голоморфных полугрупп.

**Ключевые слова:** *вырожденная полугруппа операторов, инфинитезимальный генератор, теорема Хилле – Йосиды*

### Введение

Многие начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени, удобно исследовать в рамках начальных задач для уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \quad (1)$$

где линейные операторы  $L, M$  действуют из одного секвенциально полного локально выпуклого пространства  $\mathcal{U}$  в другое –  $\mathcal{F}$ , при этом  $\ker L \neq \{0\}$ . Подходящим математическим аппаратом для исследования таких задач в локально выпуклых пространствах является теория вырожденных полугрупп операторов [1 – 3]. Речь идет о полугруппах, которые имеют нетривиальный проектор в качестве единицы. Это проектор вдоль ядра полугруппы на так называемое фазовое пространство уравнения (1).

В классической теории полугрупп [4, 5] главным образом рассматривается случай, когда единицей полугруппы является тождественный оператор. В дальнейшем такие полугруппы операторов будем называть невырожденными. Ключевыми результатами классической теории являются теоремы о порождении полугрупп операторов.

Для краткости назовем оператор  $A \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  (линейный, замкнутый и плотно определенный в  $\mathcal{U}$ , действующий в  $\mathcal{F}$ ) *радиальным*, если при некотором  $a \in \mathbb{R}$  имеет место соотношение  $(a, +\infty) \subset \rho(A)$  и при этом равномерно непрерывно семейство операторов

$$\{((\mu - a)R_\mu(A))^n : \mu \in (a, +\infty), n \in \mathbb{N}\}.$$

Одной из теорем о порождении является теорема Хилле – Йосиды, которая утверждает, что оператор является инфинитезимальным генератором невырожденной сильно непрерывной полугруппы точно тогда, когда он радиален.

Оператор  $A \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  называется *секториальным*, если при некоторых  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in (\pi/2, \pi)$  сектор  $S_{a,\theta} = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta\} \subset \rho(A)$  и равномерно непрерывно семейство операторов

$$\{(\mu - a)R_\mu(A) : \mu \in S_{a,\theta}\}.$$

Теорема Соломыка – Йосиды утверждает, что оператор является инфинитезимальным генератором невырожденной сильно голоморфной полугруппы точно тогда, когда он секториален.

При получении теорем о порождении вырожденных полугрупп операторов роль радиального (секториального) оператора играет сильно  $(L, p)$ -радиальный (сильно  $(L, p)$ -секториальный) оператор [2, 3, 6 – 8]. Непосредственное обобщение радиальности или секториальности, то есть равномерная непрерывность семейств

$$\left\{ \left( \prod_{k=0}^p (\mu_k - a)(\mu_k L - M)^{-1} L \right)^n : \mu_k \in (a, +\infty), k = \overline{0, p}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\left\{ \left( \prod_{k=0}^p (\mu_k - a)L(\mu_k L - M)^{-1} \right)^n : \mu_k \in (a, +\infty), k = \overline{0, p}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

или семейств

$$\left\{ \prod_{k=0}^p (\mu_k - a)(\mu_k L - M)^{-1} L : \mu_k \in S_{a,\theta} \right\},$$

$$\left\{ \prod_{k=0}^p (\mu_k - a)L(\mu_k L - M)^{-1} : \mu_k \in S_{a,\theta} \right\}$$

означает  $(L, p)$ -радиальность или  $(L, p)$ -секториальность оператора  $M$ . При этом речь идет о двух полугруппах уравнения (1) – на пространстве  $\mathcal{U}$  и на пространстве  $\mathcal{F}$ . Сильная  $(L, p)$ -радиальность (сильная  $(L, p)$ -секториальность) подразумевает, помимо  $(L, p)$ -радиальности ( $(L, p)$ -секториальности), выполнение еще двух дополнительных условий того же типа, достаточных для существования единицы полугруппы на всем пространстве и для существования оператора  $L_1^{-1}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$  (линейного непрерывного из  $\mathcal{F}^1$  в  $\mathcal{U}^1$ ) – непрерывного обратного к сужению оператора  $L$  на фазовое пространство уравнения (1). Однако во многих задачах эти дополнительные условия проверить сложнее, чем непосредственно показать существование единиц полугрупп и оператора  $L_1^{-1}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ . Главная цель работы – установить эквивалентность понятий сильной  $(L, p)$ -радиальности (сильной  $(L, p)$ -секториальности) и  $(L, p)$ -радиальности ( $(L, p)$ -секториальности) при условии существования единиц полугрупп и оператора  $L_1^{-1}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ .

## 1. Предварительные сведения

Пусть  $\mathcal{U}, \mathcal{F}$  – секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства,  $X$  – некоторое множество индексов. Обозначим через  $\mathfrak{U}$  ( $\mathfrak{F}$ ) множество всех полунорм, непрерывных в топологии пространства  $\mathcal{U}$  ( $\mathcal{F}$ ). Будем говорить, что семейство операторов  $\{\Phi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) : x \in X\}$  *равномерно непрерывно* относительно значений параметра  $x$ , если для любой полунормы  $r \in \mathfrak{F}$  существует полунорма  $q \in \mathfrak{U}$  такая, что для всех  $x \in X$ ,  $u \in \mathcal{U}$  выполняется  $r(\Phi(x)u) \leq q(u)$ .

Для операторов  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  (линейный непрерывный из  $\mathcal{U}$  в  $\mathcal{F}$ ),  $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  введем обозначения

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p (\mu_k L - M)^{-1} L, \quad L_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L(\mu_k L - M)^{-1},$$

$$\mathcal{U}^0 = \ker R_{(\mu,p)}^L(M), \quad \mathcal{F}^0 = \ker L_{(\mu,p)}^L(M),$$

$$\mathcal{U}^1 = \overline{\operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M)}, \quad \mathcal{F}^1 = \overline{\operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M)}$$

(замыкание в топологии пространства  $\mathcal{U}$  или  $\mathcal{F}$  соответственно). Через  $L_k$  ( $M_k$ ) обозначим сужение оператора  $L$  ( $M$ ) на  $\mathcal{U}^k$  ( $\operatorname{dom} M_k = \mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M$ ),  $k = 0, 1$ . Нетрудно убедиться, что  $\operatorname{im} L_0 \subset \mathcal{F}^0$ ,  $\operatorname{im} M_0 \subset \mathcal{F}^0$ .

**Лемма 1.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -радиален. Тогда

(i) если для отображений из  $\mathcal{F}^0$  в  $\mathcal{U}^0$  выполняется теорема о замкнутом графике, то существует оператор  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$ ;

(ii) операторы  $H = M_0^{-1} L_0$ ,  $J = L_0 M_0^{-1}$  нильпотентны степени не больше  $p$ ;

(iii)  $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_{(\mu,p)}^L(M))^{p+1} u = u \quad \forall u \in \mathcal{U}^1$ ;

(iv)  $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_{(\mu,p)}^L(M))^{p+1} f = f \quad \forall f \in \mathcal{F}^1$ ;

(v)  $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1 \subset \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ .

Уравнение (1) и эквивалентное ему уравнение

$$L(\alpha L - M)^{-1} \dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f$$

на пространстве  $\mathcal{F}$  рассмотрим как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2}$$

где операторы  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ,  $B \in \mathcal{Cl}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ,  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  – секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства. Решением уравнения (2) назовем вектор-функцию  $v \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{V})$ , удовлетворяющую (2) при  $t \geq 0$ . Здесь использовано обозначение  $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ .

**Определение 1.** Отображение  $V(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$  называется разрешающей полугруппой уравнения (2), если

(i)  $V(s)V(t)v = V(s+t)v$  для любых  $s, t \geq 0$  и любого  $v$  из  $\mathcal{V}$ ;

(ii)  $v(t) = V(t)v$  есть решение уравнения (2) для любого  $v$  из плотного в  $\mathcal{V}$  линейала;

(iii) для любого решения  $v \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{V})$  и для всех  $t \geq 0$  выполняется  $v(t) \in \operatorname{im} V(0)$ .

**Замечание 1.** Последний пункт в определении вырожденной разрешающей полугруппы имеет смысл требования максимальности ее образа. Без этого требования всегда можно говорить, например, о разрешающей полугруппе нулевых операторов.

Полугруппу операторов будем называть экспоненциально ограниченной с константой  $\omega \in \mathbb{R}$ , если семейство операторов  $\{e^{-\omega t} V(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$  равностепенно непрерывно.

**Определение 2.** Оператор  $M$   $(L, p)$ -радиален, если

(i)  $\exists a \in \mathbb{R} (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$ ;

(ii) равностепенно непрерывны семейства операторов

$$\left\{ \left( R_{(\mu,p)}^L(M) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) \right)^n : \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (a, +\infty)^{p+1}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\left\{ \left( L_{(\mu,p)}^L(M) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) \right)^n : \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (a, +\infty)^{p+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Замечание 2.** Определение 2 обобщает аналогичное определение, введенное в случае банаховых пространств в [9, 10].

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -радиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная с константой  $a$  сильно непрерывная разрешающая полугруппа  $\{U(t) : t \geq 0\}$  ( $\{F(t) : t \geq 0\}$ ) уравнения (1) ((2)), рассматриваемого на подпространстве  $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$  ( $\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ ).

*Доказательство.* Выполнение первых двух пунктов определения 2 доказано в [8], остается лишь показать, что выполняется пункт (iii). Из уравнения (1) следует равенство  $u = R_\alpha^L(M)(\alpha - \frac{d}{dt})u$ . Для решения уравнения (1) класса  $C^{p+1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{U})$  тогда можно получить равенство

$$u = (R_\alpha^L(M))^{p+1} \left( \alpha - \frac{d}{dt} \right)^{p+1} u,$$

откуда следует, что  $u(t) \in \text{im} R_{(\mu,p)}^L(M)$ . Осталось сослаться на плотность  $C^{p+1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{U})$  в  $C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{U})$ . Более подробно подобные рассуждения проведены, например, в [8].  $\square$

## 2. $(L, p)$ -радиальность и прямые суммы

Представление  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$  ( $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ ) равносильно существованию проектора  $P$  ( $Q$ ) вдоль  $\mathcal{U}^0$  ( $\mathcal{F}^0$ ) на  $\mathcal{U}^1$  ( $\mathcal{F}^1$ ).

**Предложение 1.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -радиален,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ . Тогда

- (i)  $P = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1}$ ;
- (ii)  $Q = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1}$ ;
- (iii)  $LPu = QLu \quad \forall u \in \mathcal{U}$ ;
- (iv)  $\forall u \in \text{dom} M \quad Pu \in \text{dom} M$  и  $MPu = QMu$ .

*Доказательство.* Для  $u \in \mathcal{U}$  имеем в силу леммы 1

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1} u &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1} (Pu + (I - P)u) = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1} Pu = Pu. \end{aligned}$$

Тем самым доказано утверждение (i), утверждение (ii) доказывается аналогично.

Соотношение

$$M(\mu R_\mu^L(M))^{p+1} u = (\mu L_\mu^L(M))^{p+1} Mu \quad \forall u \in \text{dom} M \quad (3)$$

очевидно. Тогда, используя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} M(\mu R_\mu^L(M))^{p+1} u &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1} (QMu + (I - Q)Mu) = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1} QMu = QMu \quad \forall u \in \text{dom} M. \end{aligned}$$

Устремим в (3)  $\mu \rightarrow +\infty$  и, в силу замкнутости оператора  $M$ , получим утверждение (iv). Утверждение (iii) доказывается аналогично с использованием непрерывности оператора  $L$ .  $\square$

Обозначим через  $L_1 (M_1)$  сужение оператора  $L (M)$  на  $\mathcal{U}^1$  ( $\text{dom}M_1 = \mathcal{U}^1 \cap \text{dom}M$ ).

**Предложение 2.** Пусть оператор  $M (L, p)$ -радиален,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ . Тогда

- (i)  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$ ;
- (ii)  $M_0 \in Cl(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ ;
- (iii)  $M_1 \in Cl(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$ .

*Доказательство.* По определению проектора  $u \in \mathcal{U}^1$  ( $f \in \mathcal{F}^1$ ) тогда и только тогда, когда  $u = Pu$  ( $f = Qf$ ). Возьмем  $u \in \mathcal{U}^1$  ( $u \in \text{dom}M_1$ ). Согласно предложению 1  $Lu = LPu = QLu$  ( $Mu = MPu = QMu$ ), поэтому  $\text{im}L_1 \subset \mathcal{F}^1$  ( $\text{im}M_1 \subset \mathcal{F}^1$ ).

Осталось показать, что  $\overline{\text{dom}M_0} = \mathcal{U}^0$ ,  $\overline{\text{dom}M_1} = \mathcal{U}^1$ . В силу предложения 1 для любого  $u_\alpha \in \text{dom}M$  имеем  $Pu_\alpha \in \text{dom}M_1$ . Так как линейал  $\text{dom}M$  плотен в пространстве  $\mathcal{U}$ , для любого  $u \in \mathcal{U}$ , в частности для  $u = Pu \in \mathcal{U}^1$ , существует обобщенная последовательность  $\{u_\alpha\} \subset \text{dom}M$ , сходящаяся к  $u$ . Поэтому  $Pu_\alpha \rightarrow Pu = u$ .

Плотность  $\text{dom}M_0$  показывается аналогично с использованием проектора  $(I - P)$ .  $\square$

**Предложение 3.** Пусть оператор  $M (L, p)$ -радиален,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ . Тогда существует оператор  $L_1^{-1} \in Cl(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ .

*Доказательство.* Инъективность оператора  $L_1$  следует из того, что  $\ker L \subset \mathcal{U}^0$ . Далее,

$$(L_\mu^L(M))^{p+1} = (J(\mu J - I)^{-1})^{p+1}(I - P) + (L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}P = (L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}P,$$

так как  $J$  нильпотентен степени не больше  $p$  в силу леммы 1. Поэтому  $\text{im}L_{(\mu,p)}^L(M) = \text{im}L_{(\mu,p)}^{L_1}(M_1)$  и  $\mathcal{F}^1 \subset \overline{\text{im}L_1}$ . Но  $\text{im}L_1 \subset \mathcal{F}^1$ , следовательно,  $\text{im}L_1$  плотен в  $\mathcal{F}^1$ , а значит,  $L_1^{-1}$  плотно определен.  $\square$

Введем следующие обозначения:  $S_1 = L_1^{-1}M_1 : \text{dom}S_1 \rightarrow \mathcal{U}^1$ ,  $\text{dom}S_1 = \text{im}R_\mu^{L_1}(M_1)$ ;  $T_1 = M_1L_1^{-1} : \text{dom}T_1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ ,  $\text{dom}T_1 = \text{im}L_\mu^{L_1}(M_1)$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор  $M (L, p)$ -радиален,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ . Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы  $\{U_1(t) : t \geq 0\}$  ( $\{F_1(t) : t \geq 0\}$ ) является оператор  $S_1 (T_1)$ .

*Доказательство.* этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 5.1 [8], при этом сначала доказывается замкнутость операторов  $S_1, T_1$ .  $\square$

### 3. Сильная $(L, p)$ -радиальность

В этом параграфе будут приведены условия, при которых оператор  $L_1^{-1}$  непрерывен.

**Определение 3.** Оператор  $M$  называется *сильно  $(L, p)$ -радиальным*, если он  $(L, p)$ -радиален, для всех  $f$  из некоторого плотного в  $\mathcal{F}$  линейала  $\mathring{\mathcal{F}}$  и для любой полунормы  $r \in \mathfrak{F}$  существует константа  $c$ , зависящая от  $f$ , такая, что

$$r \left( (\lambda - a) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) M (\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,p)}^L(M) f \right) \leq c(f)$$

при любых  $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in (a, +\infty)$ , при этом равномерно непрерывно семейство операторов

$$\left\{ (\lambda - a) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) R_{(\mu,p)}^L(M) (\lambda L - M)^{-1} : \lambda \in (a, +\infty), \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (a, +\infty)^{p+1} \right\}.$$

**Замечание 3.** Определение 3 является обобщением аналогичного определения в случае банаховых пространств [10].

**Замечание 4.** В работе [10] показано, что в случае банаховых пространств из сильной  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  следуют равенства  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ . Для случая секвенциально полных локально выпуклых пространств этот факт доказывается аналогично.

**Теорема 3.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда оператор  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ .

*Доказательство.* Пусть  $f \in \text{im}L_{(\mu, p)}^L(M)$ , т. е.  $f = (L_\beta^L(M))^{p+1}g$  при некоторых  $\beta \in \rho^L(M)$ ,  $g \in \mathcal{F}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \mu^{p+2}(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}f - \lambda^{p+2}(R_\lambda^L(M))^{p+1}(\lambda L - M)^{-1}f = \\ & \sum_{k=0}^{p+1} \left( \mu^{p+2-k} \lambda^k (R_\mu^L(M))^{p+1-k} (R_\lambda^L(M))^k (\mu L - M)^{-1} - \right. \\ & \left. \mu^{p+1-k} \lambda^{k+1} (R_\mu^L(M))^{p+1-k} (R_\lambda^L(M))^k (\lambda L - M)^{-1} \right) f = \\ & \sum_{k=0}^{p+1} \mu^{p+1-k} \lambda^k (R_\mu^L(M))^{p+1-k} (R_\lambda^L(M))^{k-1} (\lambda L - M)^{-1} (\mu L (\mu L - M)^{-1} - \lambda L (\lambda L - M)^{-1}) f = \\ & \sum_{k=0}^{p+1} \mu^{p+1-k} \lambda^k (R_\mu^L(M))^{p+1-k} (R_\lambda^L(M))^{k-1} (\lambda L - M)^{-1} M ((\mu L - M)^{-1} - (\lambda L - M)^{-1}) f = \\ & (\lambda - \mu) \sum_{k=0}^{p+1} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1-k} (\lambda R_\lambda^L(M))^k (\lambda L - M)^{-1} M (\mu L - M)^{-1} f = \\ & (\lambda - \mu) \sum_{k=0}^{p+1} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1-k} (\lambda R_\lambda^L(M))^k (\lambda L - M)^{-1} L_\mu^L(M) (L_\beta^L(M))^p M (\beta L - M)^{-1} g. \end{aligned}$$

Отсюда вследствие сильной  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  для любой полунормы  $r \in \mathfrak{U}$  найдется такая полунорма  $q \in \mathfrak{F}$ , что

$$\begin{aligned} & r \left( \mu^{p+2}(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}f - \lambda^{p+2}(R_\lambda^L(M))^{p+1}(\lambda L - M)^{-1}f \right) \leq \\ & (\mu^{-1} + \lambda^{-1}) \sum_{k=0}^{p+1} \frac{q(M(\beta L - M)^{-1}g)}{(1 - a/\mu)^{p+1-k} (1 - a/\lambda)^k (\beta - a)^p} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $\mu, \lambda \rightarrow +\infty$ . Поэтому, учитывая плотность  $\text{im}L_{(\mu, p)}^L(M)$  в  $\mathcal{F}^1$  и равномерную непрерывность семейства операторов  $\{\mu^{p+2}(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1} : \mu \in (a, +\infty)\}$ , мы можем утверждать, что существует оператор

$$\hat{L}_1^{-1} = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} L_\mu^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1),$$

где  $L_\mu^{-1} = \mu^{p+2}(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}$ . Здесь мы использовали замечание 4 и предложение 2.

Возьмем  $u = (R_\beta^L(M))^{p+1}v$  при некотором  $v \in \mathcal{U}$ . Обозначим  $w_k = ((\beta L - M)^{-1}M)^k v = (\beta R_\beta^L(M) - I)^k v$ , тогда

$$L_\mu^{-1}L_1 u = (\mu R_\mu^L(M))^{p+2}u = (I + (\mu L - M)^{-1}M)^{p+2}u =$$

$$u + \sum_{k=1}^{p+1} C_{p+2}^k (R_\mu^L(M))^k (R_\beta^L(M))^{p+1-k} w_k + (R_\mu^L(M))^{p+1} (\mu L - M)^{-1} M w_{p+1}.$$

Из сильной  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  получаем

$$r(L_\mu^{-1} L_1 u - u) \leq \sum_{k=1}^{p+1} \frac{C_{p+2}^k q(w_k)}{(\mu - a)^k (\beta - a)^{p+1-k}} + \frac{q(M w_{p+1})}{(\mu - a)^{p+2}} \rightarrow 0$$

при  $\mu \rightarrow +\infty$ .

Покажем, что семейство операторов  $\{L_\mu^{-1} L_1 : \mu \in (2a, +\infty)\}$  равностепенно непрерывно. Для любой полунормы  $r \in \mathfrak{U}$  существует такая полунорма  $q \in \mathfrak{F}$ , что для всех  $\mu \in (2a, +\infty)$ ,  $f \in \mathcal{F}$

$$r(L_\mu^{-1} f) = (1 - a/\mu)^{-p-2} r((\mu - a)^{p+2} (R_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1} (\mu L_1 - M_1)^{-1} f) \leq 2^{p+2} q(f) = \tilde{q}(f).$$

В силу непрерывности оператора  $L_1$  для  $\tilde{q} \in \mathfrak{F}$  существует такая полунорма  $q_1 \in \mathfrak{U}$ , что для всех  $u \in \mathcal{U}^1$   $\tilde{q}(L_1 u) \leq q_1(u)$ . Таким образом, для любой полунормы  $r \in \mathfrak{U}$  существует такая полунорма  $q_1 \in \mathfrak{U}$ , что для всех  $\mu \in (2a, +\infty)$ ,  $u \in \mathcal{U}^1$  выполняется  $r(L_\mu^{-1} L_1 u) \leq q_1(u)$ .

Так как  $\text{im} R_{(\mu,p)}^L(M) = \mathcal{U}^1$ , из всего вышесказанного получаем, что  $\hat{L}_1^{-1} L_1 u = u$  для любого  $u \in \mathcal{U}^1$ . Аналогично доказывается, что  $L_1 \hat{L}_1^{-1} = I$ .  $\square$

Сужение  $\{U_1(t) : t \geq 0\}$  ( $\{F_1(t) : t \geq 0\}$ ) полугруппы  $\{U(t) : t \geq 0\}$  ( $\{F(t) : t \geq 0\}$ ) на подпространство  $\mathcal{U}^1$  ( $\mathcal{F}^1$ ) является равностепенно непрерывной полугруппой класса  $(C_0)$  [5].

При условии сильной  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  введем также обозначения:  $S_1 = L_1^{-1} M_1 : \text{dom} S_1 \rightarrow \mathcal{U}^1$ ,  $\text{dom} S_1 = \text{dom} M_1$ ;  $T_1 = M_1 L_1^{-1} : \text{dom} T_1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ ,  $\text{dom} T_1 = L_1[\text{dom} M_1]$ . Очевидно, что  $S_1 \in Cl(\mathcal{U}^1)$ ,  $T_1 \in Cl(\mathcal{F}^1)$ .

**Теорема 4.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы  $\{U_1(t) : t \geq 0\}$  ( $\{F_1(t) : t \geq 0\}$ ) является оператор  $S_1$  ( $T_1$ ).

*Доказательство.* Аналогично доказательству теоремы 6.1 в [10].  $\square$

**Следствие 1.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда

- (i)  $\{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re} \mu > a\} \subset \rho^L(M)$ ;
- (ii) семейства операторов  $\{((\text{Re} \mu - a) R_\mu(S_1))^n : \text{Re} \mu > a, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{((\text{Re} \mu - a) R_\mu(T_1))^n : \text{Re} \mu > a, n \in \mathbb{N}\}$  равностепенно непрерывны.

*Доказательство.* (i) Возьмем  $\mu > a$ , тогда

$$(\mu L - M)^{-1} u = \sum_{k=0}^p \mu^k H^k M_0^{-1} (I - P) u + \int_0^\infty e^{-\mu t} U(t) L_1^{-1} P u dt \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

согласно лемме 1, предложению 2 и теореме 3. Для  $\lambda = \mu + i\tau$  рассмотрим экспоненциально ограниченную с константой  $a$  полугруппу  $\{V(t) = e^{-\lambda t} U(t) : t \geq 0\}$  с генератором  $S - i\tau I$ . Тогда

$$(\lambda I - S)^{-1} L_1^{-1} P u = (\mu I - (S - i\tau I))^{-1} L_1^{-1} P u = \int_0^\infty e^{-\mu t} V(t) L_1^{-1} P u dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) L_1^{-1} P u dt.$$

Таким образом, правая часть этого равенства определена в комплексной полуплоскости  $\{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re} \mu > a\}$ , поэтому и про левую часть можно сказать то же самое.

(ii) Утверждение следует из теоремы 2 [5, гл. IX, §4], если сделать замену  $\mu - a = \lambda$  и рассмотреть резольвенты генераторов равностепенно непрерывных полугрупп класса  $(C_0)$   $S_1 - aI$ ,  $T_1 - aI$ . Действительно, в силу тождества (10) [5, гл. IX, §4] при положительных  $\operatorname{Re}\lambda$

$$q((\operatorname{Re}\lambda R_\lambda(S_1 - aI))^{n+1}u) \leq \frac{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}}{n!} \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| t^n dt \sup_{t \geq 0} q(\tilde{U}_1(t)u) \leq$$

$$\frac{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-t\operatorname{Re}\lambda} t^n dt r(u) = r(u),$$

где  $\{\tilde{U}_1(t) : t \geq 0\}$  – порождаемая оператором  $S_1 - aI$  полугруппа. □

#### 4. Основной результат

Выделим пять условий. Будем предполагать, что для отображений из  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{U}$  справедлива теорема о замкнутом графике.

**(A1)** *Существуют две экспоненциально ограниченные сильно непрерывные полугруппы  $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \geq 0\}$ ,  $\{F(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) : t \geq 0\}$  операторов.*

Определим проекторы  $P = U(0)$ ,  $Q = F(0)$ . Введем обозначения  $\mathcal{U}^0 = \ker P$ ,  $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P$ ,  $\mathcal{F}^0 = \ker Q$ ,  $\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q$ ; имеем  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ . Через  $\{U_1(t) : t \geq 0\}$  и  $\{F_1(t) : t \geq 0\}$  обозначим сужения соответствующих полугрупп на подпространства  $\mathcal{U}^1$  и  $\mathcal{F}^1$ . Сужения являются невырожденными полугруппами. По теореме Хилле – Йосиды [5, гл. IX, §7] экспоненциально ограниченные с общей константой  $a$  (если константы разные, выберем наибольшую) сильно непрерывные полугруппы  $\{U_1(t) : t \geq 0\}$  и  $\{F_1(t) : t \geq 0\}$  обладают инфинитезимальными генераторами  $S_1$  и  $T_1$ .

**(A2)** *Существует линейный гомеоморфизм  $L_1 : \mathcal{U}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$  такой, что  $L_1[\operatorname{dom} S_1] = \operatorname{dom} T_1$ ,  $L_1 S_1 = T_1 L_1$ .*

**(A3)** *Существует биективный оператор  $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ .*

Отсюда следует существование оператора  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$ .

**(A4)** *Существует оператор  $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$  такой, что оператор  $H = M_0^{-1} L_0$  нильпотентен степени не больше  $p \in \mathbb{N}_0$ .*

**(A5)**  $L = L_0(I - P) + L_1 P$ ;  $M = M_0(I - P) + L_1 S_1 P$ ,  $\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} L_1 S_1$ .

**Теорема 5.** *Оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален тогда и только тогда, когда выполнены все условия (A1) – (A5).*

*Доказательство.* Необходимость условий (A1) – (A5) следует из результатов предыдущих параграфов. Покажем их достаточность. Имеем

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=0}^p \mu^k H^k M_0^{-1} (I - Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q,$$

$$(R_{(\mu,p)}^L(M))^n = \mathbb{O}(I - P) + \prod_{k=0}^p (R_{\mu_k}(S_1))^n P,$$

$$(L_{(\mu,p)}^L(M))^n = \mathbb{O}(I - Q) + \prod_{k=0}^p (R_{\mu_k}(T_1))^n Q,$$



где  $\mu_k > 0$ ,  $k = \overline{0, p}$ . Далее,

$$R_{(\mu, p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1} = \mathbb{O}(I - Q) + \prod_{k=0}^p (\mu_k I - S_1)^{-1} (\lambda I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q,$$

$$M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu, p)}^L(M)f = \mathbb{O}(I - Q)f + (\lambda I - T_1)^{-1} \prod_{k=0}^p (\mu_k I - T_1)^{-1} T_1 Qf.$$

Здесь  $f$  из плотного линейала  $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \dot{+} \text{dom} T_1$ . Из данных соотношений и выполнения условий Хилле – Йосиды для операторов  $S_1$  и  $T_1$  следует требуемое.  $\square$

**Следствие 2.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда для любого  $q \in \mathbb{N}$  оператор  $M$  сильно  $(L, p + q)$ -радиален.

Для доказательства достаточно обратить внимание, что константа  $p$  среди достаточных условий сильной  $(L, p)$ -радиальности присутствует лишь в условии (A4).

**Следствие 3.** Оператор  $M$  сильно  $(I, p)$ -радиален тогда и только тогда, когда он радиален.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ ,  $L = I$ . Тогда условия (A2) – (A5) становятся тривиальными, и остается лишь условие (A1) о существовании сильно непрерывной полугруппы, теперь уже невырожденной. При этом  $M = S$  – ее генератор и поэтому является радиальным оператором.  $\square$

(A2)' Существует инъективный оператор  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$  с плотным в  $\mathcal{F}^1$  образом, при этом  $\text{dom} L_1 S_1 = \text{dom} T_1 L_1$  и для всех  $u \in \text{dom} L_1 S_1$  имеет место равенство  $L_1 S_1 u = T_1 L_1 u$ .

**Теорема 6.** Оператор  $M$   $(L, p)$ -радиален и при этом имеют место равенства  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$  тогда и только тогда, когда выполнены все условия (A1), (A2)', (A3) – (A5).

*Доказательство.* Теорема доказывается аналогично теореме 5. Надо лишь вместо теоремы 4 использовать теорему 2 и тот факт, что равенства  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$  следуют уже из условия (A1).  $\square$

Аналогично следствиям 2, 3 получим

**Следствие 4.** Если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ , то из  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  следует его  $(L, p + q)$ -радиальность при любом  $q \in \mathbb{N}$ .

**Следствие 5.** Оператор  $M$   $(I, p)$ -радиален тогда и только тогда, когда он радиален.

В отличие от доказательства следствия 3 надо еще заметить, что при  $L = I$  условия  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$  также становятся тривиальными.

**Замечание 5.** Из следствий 3 и 5 вытекает, что каждая из теорем 5, 6 является обобщением теоремы Хилле – Йосиды.

Из теорем 5 и 6 получим следующий основной результат данной работы.

**Теорема 7.** Оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален точно тогда, когда выполняются следующие условия:

- (i) оператор  $M$   $(L, p)$ -радиален;

- (ii)  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ ;
- (iii) существует оператор  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ .

*Доказательство.* Тот факт, что утверждения (i) – (iii) следуют из сильной  $(L, p)$ -радиальности оператора, вытекает из ее определения и теоремы 5. Докажем обратное утверждение. Из утверждений (i), (ii) следует справедливость условий (A1), (A2)', (A3) – (A5). А утверждение (iii) вкупе с (A2)' влечет (A2). Наконец, из утверждений (A1) – (A5) следует сильная  $(L, p)$ -радиальность оператора  $M$ , что и требовалось.  $\square$

Другой возможной формулировкой теоремы 7 является

**Следствие 6.** Пусть  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$  и существует оператор  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ . Тогда  $(L, p)$ -радиальность оператора  $M$  эквивалентна его сильной  $(L, p)$ -радиальности.

## 5. Случай $(L, p)$ -секториального оператора

Аналогичные результаты имеют место и в случае, когда речь идет о вырожденных сильно голоморфных полугруппах операторов. Сформулируем их.

**(B1)** Существуют две экспоненциально ограниченные сильно голоморфные полугруппы  $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \geq 0\}$ ,  $\{F(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) : t \geq 0\}$  операторов.

Отличие от предыдущего параграфа состоит только в том, что операторы  $S_1, T_1$  секториальны.

**Теорема 8.** [7]. Оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален тогда и только тогда, когда выполнены все условия (B1), (A2) – (A5).

**Теорема 9.** Оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален и при этом имеют место равенства  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$  точно тогда, когда выполнены все условия (B1), (A2)', (A3) – (A5).

Для случая банаховых пространств эта теорема доказана в [11]. В случае локально выпуклых пространств доказательство может быть проведено дословным повторением.

**Теорема 10.** Оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален точно тогда, когда выполняются следующие условия:

- (i) оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален;
- (ii)  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ ;
- (iii) существует оператор  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ .

*Доказательство.* Условия (i) – (iii) следуют из определения сильной  $(L, p)$ -секториальности оператора и теоремы 8. Обратно, из утверждений (i), (ii) следует справедливость условий (B1), (A2)', (A3) – (A5). А утверждения (iii) и (A2)' влекут (A2). Выполнение условий (B1), (A2) – (A5) и теорема 8 позволяют сделать вывод о сильной  $(L, p)$ -секториальности оператора  $M$ .  $\square$

**Следствие 7.** Пусть  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$  и существует оператор  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ . Тогда  $(L, p)$ -секториальность оператора  $M$  эквивалентна его сильной  $(L, p)$ -секториальности.

*Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, грант №07-01-96030-р\_урал\_a*

## Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47 – 74.

2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
3. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003.
4. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М.: Иностранная литература, 1962.
5. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967.
6. Свиридюк, Г.А. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 604 – 616.
7. Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131 – 160.
8. Федоров, В.Е. Обобщение теоремы Хилле – Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 426 – 448.
9. Федоров, В.Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно  $p$ -радиальными операторами / В.Е. Федоров // ДАН. – 1996. – Т. 351, № 3. – С. 316 – 318.
10. Федоров, В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Федоров // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, вып. 3. – С. 173 – 200.
11. Федоров, В.Е. Единицы вырожденных аналитических полугрупп операторов и относительная  $p$ -секториальность / В.Е. Федоров // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 138 – 155.

Кафедра математического анализа,  
Челябинский государственный университет  
kar@csu.ru

*Поступила в редакцию 24 марта 2008 г.*

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

*Е.В. Шафранов*

Рассматривается решение задачи восстановления характеристик зеркальных антенн на основе моделирования процесса измерений поля в ближней зоне. В качестве точного решения принимается диаграмма направленности (ДН), рассчитанная апертурным методом по заданному распределению вектора напряженности электрического поля в апертуре антенны. Осуществляется восстановление ДН по источникам, заданным в ближней зоне, причем в качестве источников электромагнитного поля используются эквивалентные электрические и магнитные токи, рассчитанные апертурным методом на прямоугольнике измерений. Приводятся оценки восстановления ДН в пределах главного и двух боковых лепестков.

**Ключевые слова:** апертурный метод, диаграмма направленности, зеркальная антенна, моделирование процесса измерения поля

### Введение

В работе [1] изложен строгий метод решения задачи дифракции электромагнитных волн (ЭМВ) на металлических экранах. Однако, когда размеры зеркальной антенны намного больше длины волны, более эффективными являются приближенные методы решения.

Одним из широко используемых методов расчета характеристик зеркальных антенн является апертурный метод [2 – 5]. Суть метода в применении к параболическим антеннам заключается в том, что в качестве апертуры используется плоский круглый раскрыв, вдоль которого задается распределение вектора напряженности электрического  $\vec{E}^s$  поля. На рис. 1 изображена геометрия рассматриваемых ниже задач, где  $S$  – апертура параболического зеркала,  $D$  – прямоугольник конечных размеров в ближней зоне, на котором предполагаются выполненными измерения тангенциальных составляющих электрического  $\vec{E}^D$  и магнитного  $\vec{H}^D$  полей. Параболическое зеркало предполагается неглубоким, а его размеры намного больше длины волны, тогда апертурный метод является приближенным методом решения задачи и обладает простой реализацией.

Рассматривается распространение электромагнитных волн в однородной, изотропной, абсолютно непроводящей среде (вакуум) с постоянными диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями. Предполагается гармоническая зависимость процесса возбуждения и распространение по закону  $e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  – частота электромагнитного поля.

В случае апертурных антенн источниками поля являются эквивалентные электрические и магнитные поля. Приведенные предпосылки являются традиционно принятыми при решении задач расчета поля по заданным источникам, будем их придерживаться при дальнейшем изложении.

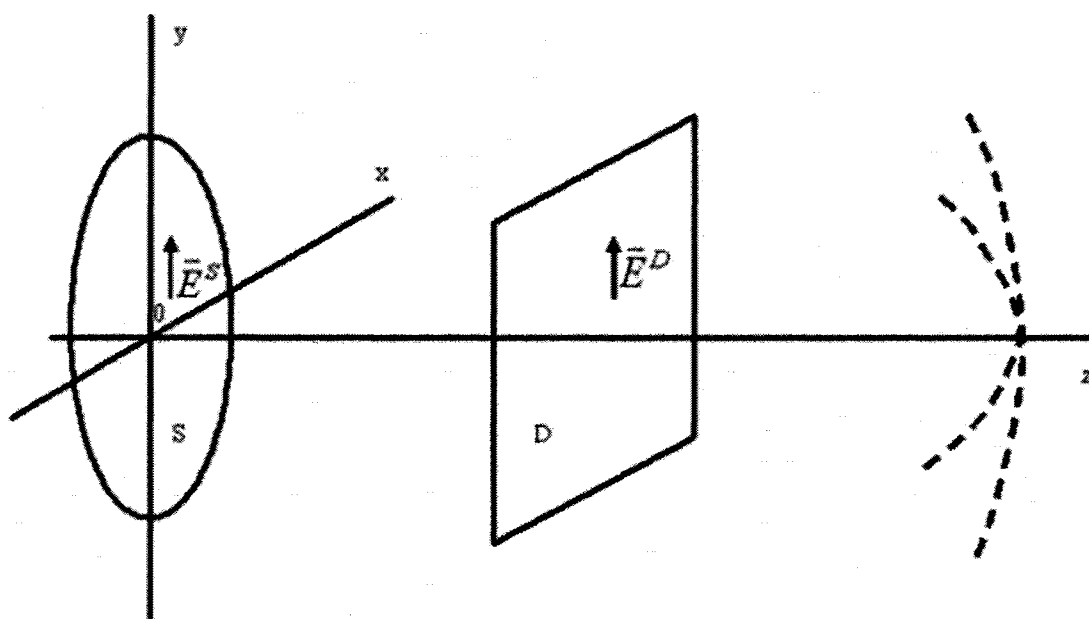


Рис. 1. Геометрия задачи

В силу сделанных предположений связь между векторами напряженности электрического  $\vec{E}^s$  и магнитного  $\vec{H}^s$  поля и источниками поля  $\vec{j}^{eo}$  (сторонний электрический ток) и  $\vec{j}^{mo}$  (сторонний магнитный ток) можно представить [2] в виде:

$$\vec{E}(M) = -i\omega\mu\vec{A}^e(M) - \frac{i}{\omega\epsilon} \text{grad div } \vec{A}^e(M) - \text{rot } \vec{A}^m(M), \quad (1)$$

$$\vec{H}(M) = -i\omega\epsilon\vec{A}^m(M) - \frac{i}{\omega\mu} \text{grad div } \vec{A}^m(M) + \text{rot } \vec{A}^e(M). \quad (2)$$

Так как рассматривается внешняя задача, решения соответствующих волновых уравнений, удовлетворяющих условиям излучения Зоммерфельда, могут быть представлены в виде:

$$\vec{A}^e(M) = \int_S \vec{j}^{eo}(P) \cdot G(M, P) dS, \quad (3)$$

$$\vec{A}^m(M) = \int_S \vec{j}^{mo}(P) \cdot G(M, P) dS, \quad (4)$$

где  $S$  – либо апертура зеркальной антенны, либо прямоугольник измерения в ближней зоне,  $M$  – точка наблюдения, расположенная вне источника поля,  $P \in S$  – переменная точка интегрирования, а

$$G(M, P) = \frac{e^{-ikR(M, P)}}{4\pi R(M, P)}$$

функция Грина пограничного однородного изотропного пространства,  $k$  – волновое число,  $R(M, P)$  – расстояние между точками  $M$  и  $P$ ,  $\vec{A}^e(M)$  и  $\vec{A}^m(M)$  – векторные потенциалы, соответствующие эквивалентным электрическим и магнитным токам. Решение поставленных задач позволяет определить размеры и расположение прямоугольника измерений, обеспечивающие восстановление ДН с приемлемой для практики точностью.

## Расчет диаграммы направленности в дальней зоне по заданным источникам в апертуре зеркальных антенн

В качестве метода решения задачи воспользуемся апертурным методом. Вектор  $\vec{H}^s$  в апертуре связан с вектором  $\vec{E}^s$  соотношением

$$\vec{j}(P) = 2[\vec{n}, \vec{H}(P)] = 2W^{-1}[\vec{n}, [\vec{s}, \vec{E}(P)]], \quad (5)$$

где  $\vec{E}(P), \vec{H}(P)$  – первичное поле в точке  $P \in S$ ,  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности, направленная в сторону, откуда приходит излучение,  $\vec{s}$  – единичный вектор совпадающий с направлением падающей волны,  $W$  – волновое сопротивление свободного пространства с постоянными параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ .

Эквивалентные электрические и магнитные токи в апертуре  $S$  определяются с помощью соотношений

$$\begin{cases} \vec{j}^{eo}(P) = [\vec{k}, \vec{H}_y^S] \\ \vec{j}^{mo}(P) = [\vec{k}, \vec{E}_y^S] \end{cases}, \quad (6)$$

где  $\vec{k}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $Oz$ .

Вид распределения  $\vec{E}^S$  зададим с помощью соотношений:

$$\begin{cases} E_y^S(x, y) = 1 - 2,667 \left( \frac{x^2 + y^2}{D_S^2} \right) \\ E_x^S(x, y) = \sin \left( 1,78 \cdot \frac{\pi x}{D_S} \right) \cdot \left( 1 - 2,667 \frac{y^2}{D_S^2} \right) \end{cases}, \quad (7)$$

где  $D_S$  – диаметр раскрыва зеркала, а  $(x, y)$  – декартовы координаты текущей точки раскрыва. Первая формула (7) формирует обычную ДН, а вторая – разностную ДН, что позволяет рассчитать векторы напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей в произвольной точке наблюдения  $M$  по формулам (1) – (4).

## Моделирование процесса измерения электромагнитного поля в ближней зоне

По заданному распределению электрического поля (7) в апертуре антенны  $S$  рассчитаем векторы электрического  $\vec{E}^D$  и магнитного  $\vec{H}^D$  поля на прямоугольнике измерений  $D$ , которые являются аналогом процесса измерения. По формулам (6), где  $S = D$ , найдем распределение эквивалентных электрических и магнитных токов и рассчитаем диаграмму направленности по формулам (1) – (4).

## Расчет диаграммы направленности в дальней зоне по результатам моделирования поля в ближней зоне

Исследуем решение поставленных задач, в том случае, когда в качестве апертуры  $S$  параболической антенны выбирался круг с диаметром раскрыва  $D_S = 10\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны, а плоскость измерений  $D$  представляла собой квадрат со стороной  $21\lambda$ , расположенный на расстоянии  $20\lambda$  от раскрыва  $S$ . На рис. 2 – 5 представлены ДН, полученные в результате решения задачи апертурным методом в двух взаимно перпендикулярных сечениях как для обычной, так и для разностной диаграмм. При расчете эквивалентных электрических и магнитных токов на прямоугольнике измерений  $D$  (моделирование процесса измерений) число узлов прямоугольной сетки выбиралось равным  $71 \times 71$ , что соответствует шагу дискретизации  $\frac{\lambda}{3}$ . По рассчитанным токам производился пересчет ДН в дальнюю зону. Решение

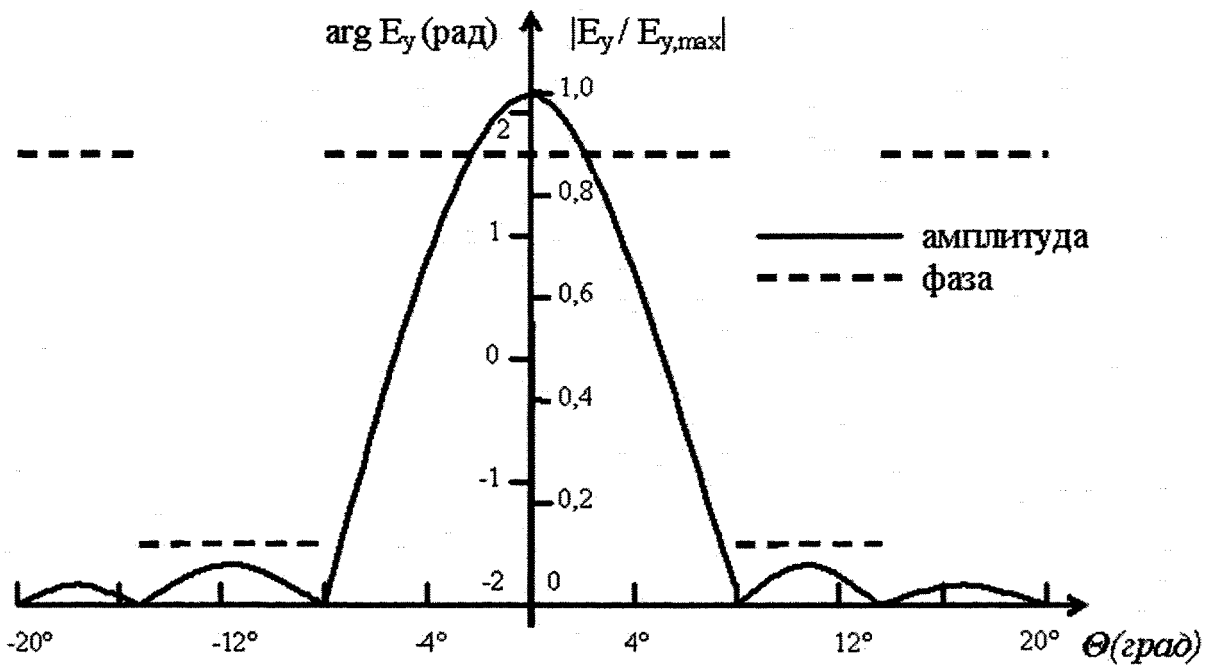


Рис. 2. Обычная ДН составляющей  $E_y$  в дальней зоне в плоскости вектора  $\vec{H}$

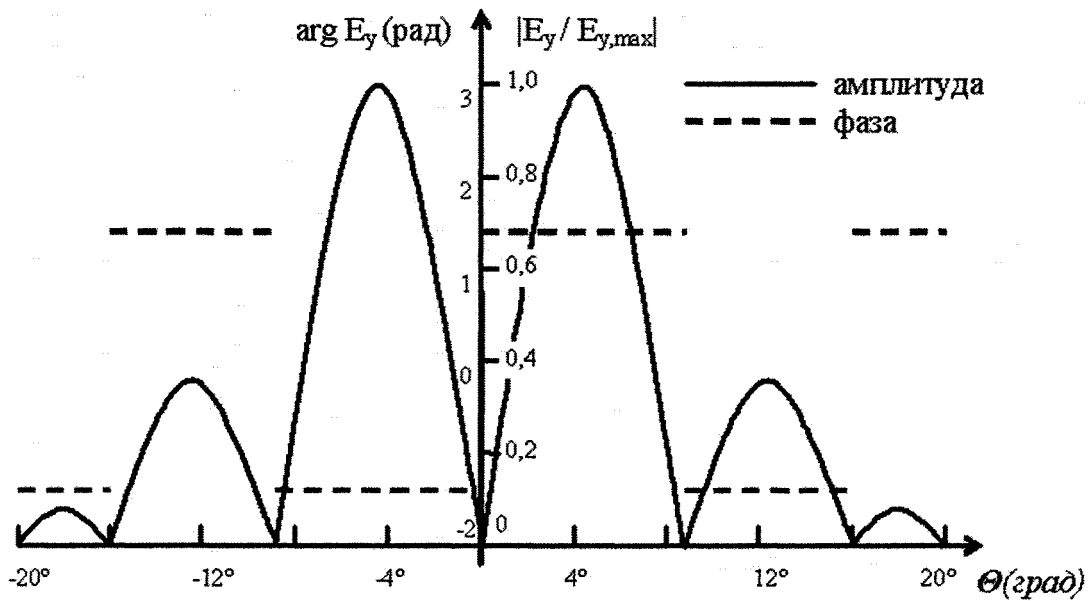


Рис. 3. Разностная ДН составляющей  $E_y$  в дальней зоне в плоскости вектора  $\vec{H}$

задачи восстановления сравнивалось с решением задачи расчета ДН по источникам, заданным в апертуре зеркальной антенны. Результаты сравнения для обычной ДН показали, что в пределах главного и первого бокового лепестка рассчитанные ДН совпадают с хорошей степенью точности ( $\Delta_{отн} < 5 \cdot 10^{-2}$  по амплитуде и  $\delta_{абс} < 2 \cdot 10^{-1}$  рад по фазе). Второй боковой лепесток восстанавливается относительно хорошо по амплитуде ( $\Delta_{отн} < 8 \cdot 10^{-2}$ ), но плохо по фазе ( $\delta_{абс} \approx 1$  рад). Приемлемая практическая точность восстановления достигается и в случае разностных ДН.

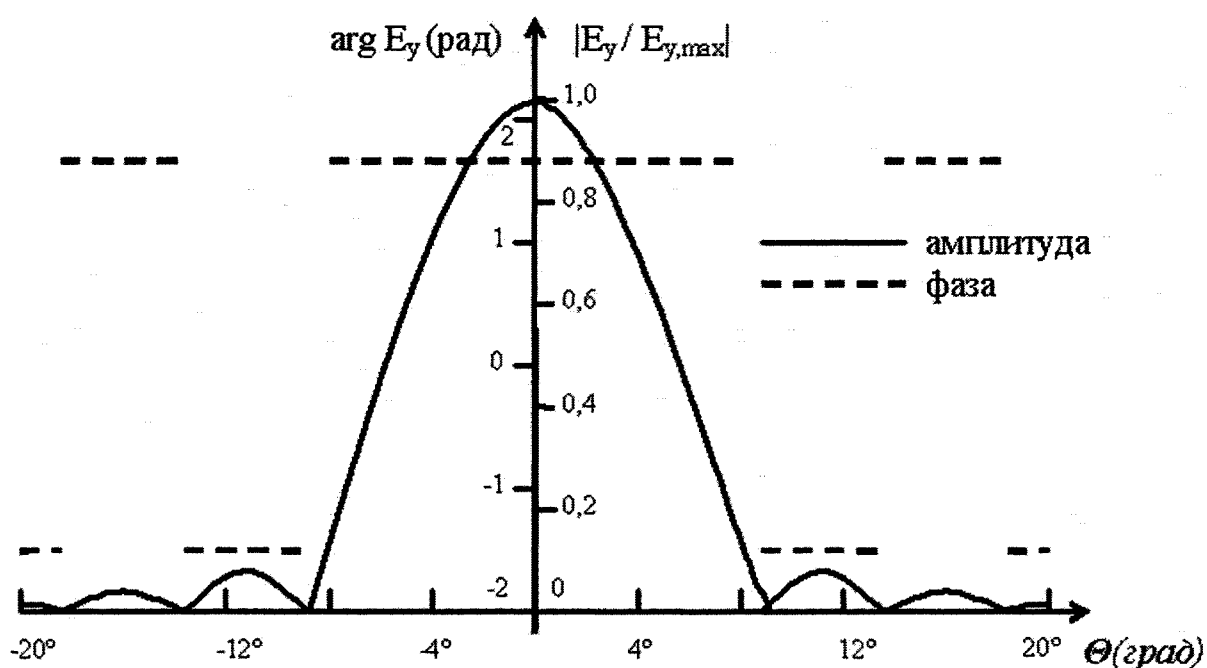


Рис. 4. Обычная ДН составляющей  $E_y$  в дальней зоне в плоскости вектора  $\vec{E}$

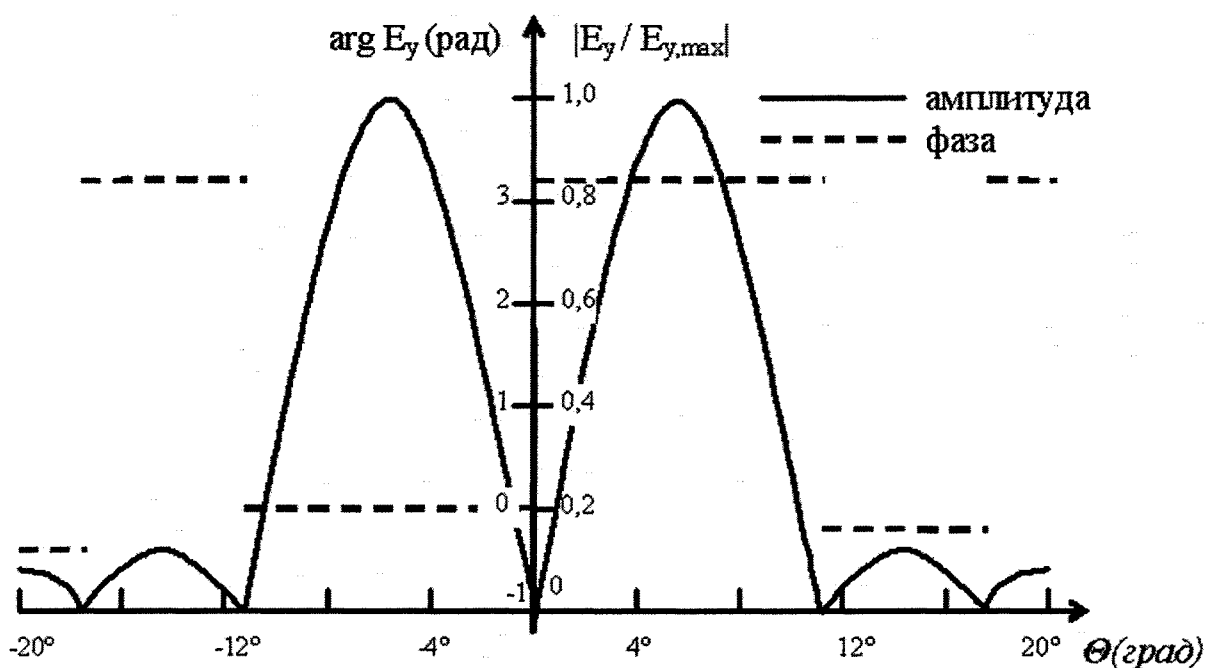


Рис. 5. Разностная ДН составляющей  $E_y$  в дальней зоне в плоскости вектора  $\vec{E}$

## Литература

1. Шафранов, Е.В. О численном решении задачи дифракции на основе метода интегральных уравнений электрического поля / Е.В. Шафранов // Материалы Всероссийской научной конференции «Математика. Механика. Информатика». – Челябинск, 2007. – С. 235 – 241.



2. Марков, Г.Т. Электродинамика и распространение радиоволн / Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. – М.: Сов. радио, 1979.
3. Крымский, В.В. Применение сплайн функций при расчете ДН по измерениям в ближней зоне / В.В. Крымский, Е.В. Шафранов // Антенные измерения: тез. докл. IV Всесоюз. конф. «Метрологическое обеспечение антенных измерений». – Ереван, 1987. – С.348 – 350.
4. Горобец, Н.Н. Программная реализация задачи расчета электромагнитного поля в ближней и дальней зоне апертурных антенн / Н.Н. Горобец, Е.В. Шафранов // Теория и техника антенн: тез. докл. XXVI межведомств. конф. «Метрологическое обеспечение антенных измерений», секция «Зеркальные и другие антенны». – М., 1990. – С. 31 – 33.
5. Восстановление пеленгационных характеристик антенн с помощью сплайнов / В.А. Василенко, А.Б. Хашимов, Е.В. Шафранов и др. // Вопросы радиоэлектроники: серия ОВР. – 1988. – Вып. 4. – С. 73 – 76.

Кафедра теории управления и оптимизации,  
Челябинский государственный университет

*Поступила в редакцию 7 марта 2008 г.*

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

*А.С. Шипилов*

Описаны экспоненциальные дихотомии решений уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной, определенных на геометрическом графе.

**Ключевые слова:** уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, геометрический граф, относительно  $p$ -ограниченные операторы, экспоненциальные дихотомии.

### Введение

Пусть  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$  – конечный связный ориентированный граф, где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество ребер, причем, каждому ребру  $E_j$  сопоставлены два положительных числа  $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$ , которые удобно трактовать как длину и площадь поперечного сечения соответственно. Такой граф  $\mathbf{G}$  предложено называть *геометрическим графом* [1]. Пусть на каждом ребре  $E_i$  задано уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \alpha u_{jxx} - \beta u, \quad (0.1)$$

где производные берутся по  $x \in (0, l_i)$  и  $t \in \mathbb{R}$ . В каждой вершине  $V_i$  зададим условия непрерывности

$$\begin{aligned} u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \\ E_j, E_k \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i), E_m, E_n \in \mathfrak{E}^\omega(V_i), \end{aligned} \quad (0.2)$$

и условия баланса потоков

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in \mathfrak{E}^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0, \quad (0.3)$$

где через  $\mathfrak{E}^\alpha(V_i)$  и  $\mathfrak{E}^\omega(V_i)$  обозначено множество ребер, «выходящих» из вершины  $V_i$ , и, соответственно, «входящих» в вершину  $V_i$ . Физический смысл задачи (0.1) – (0.3) объяснен в [2]. Кстати сказать, термин «отсутствовать» в контексте условий непрерывности не означает «быть равным нулю». Скажем, если из вершины  $V_i$  не «выходит» ни одно ребро, то первые два равенства в (0.2) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Более того, если в вершину  $V_i$  «входит» (или «выходит» из нее) только одно ребро, то условия (0.2) для этой вершины «отсутствуют».

Впервые уравнения в частных производных на геометрических графах начали изучаться в конце прошлого века в связи с моделированием процессов «реакции-диффузии» в трубчатых реакторах, а также динамики давления и влагопереноса в «тонких» областях. Первая монография [1] по классическим уравнениям на геометрических графах вышла в 2004 г. Первая статья [3], в которой рассмотрены неклассические уравнения – уравнения соболевского типа, появилась в 2002 г. Первая диссертация [4], в которой описаны фазовые пространства некоторых уравнений соболевского типа, защищена в 2005 г. В данной статье впервые исследуется устойчивость и неустойчивость (в зависимости от параметров

$\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) решений задачи (0.1) – (0.3). Статья, кроме вводной части и списка литературы, содержит два параграфа. В первом приводятся вспомогательные сведения о дихотомиях решений уравнений соболевского типа, почерпнутые из гл.7 [5], куда они попали из [6]. Во втором параграфе описываются дихотомии решений задачи (0.1) – (0.3).

## 1. Инвариантные пространства и дихотомии решений

Пусть  $\mathcal{U}$  и  $\mathfrak{F}$  – банаховы пространства; операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ , причем, оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  (т. е.  $M$  ( $L, \sigma$ )-ограничен, и  $\infty$  – несущественная особая точка  $L$ -резольвенты оператора  $M$ ; если  $p \in \mathbb{N}$ , то  $p$  – порядок полюса в  $\infty$ , а если  $p = 0$ , то  $\infty$  – устранимая особая точка).

Рассмотрим уравнение

$$Li = Mi. \tag{1.1}$$

Вектор-функцию  $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{U})$ , удовлетворяющую ему (1.1), назовем *решением*. Решение  $u = u(t)$  уравнения (1.1), удовлетворяющее еще и начальному условию Коши

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

назовем *решением задачи* (1.1), (1.2).

**Определение 1.** Множество  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{U}$  называется фазовым пространством уравнения (1.1), если

(i) любое решение  $u = u(t)$  уравнения (1.1) лежит в  $\mathfrak{F}$  поточечно, т. е.  $u(t) \in \mathfrak{F}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ;

(ii) для любой точки  $u_0 \in \mathfrak{F}$  существует единственное решение задачи (1.1), (1.2).

Если существует оператор  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathcal{U})$ , то фазовым пространством уравнения (1.1) служит пространство  $\mathcal{U}$ . Если оператор  $L$  необратим, в частности,  $\ker L \neq \{0\}$ , то описание фазового пространства – нетривиальная задача.

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Тогда фазовым пространством уравнения (1.1) является образ  $Im P$  проектора

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu.$$

Здесь  $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$  – правая  $L$ -резольвента оператора  $M$ , а контур  $\gamma \subset \mathbb{C}$  ограничивает область, содержащую  $L$ -спектр оператора  $M$ .

Заметим, что если оператор  $L : \mathcal{U} \rightarrow \{0\}$ , то фазовое пространство  $\mathfrak{F} = \{0\}$ , поскольку в этом случае оператор  $M$  непрерывно обратим.

**Определение 2.** Множество  $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{F}$  называется инвариантным пространством уравнения (1.1), если для любого  $u_0 \in \mathfrak{I}$  решение задачи (1.1), (1.2) лежит в  $\mathfrak{I}$  поточечно.

В частности, фазовое пространство является инвариантным пространством, однако обратное, вообще говоря, неверно.

**Теорема 2.** Пусть оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Пусть  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$  расщепляется на две компоненты  $\sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M)$  так, что существует контур  $\gamma_0 \subset \mathbb{C}$ , ограничивающий область, содержащую  $\sigma_0^L(M)$ , причем,  $\gamma_0 \cap \sigma_1^L(M) = \emptyset$ .

Тогда существует инвариантное пространство  $\mathcal{I}_0$  уравнения (1.1), совпадающее с образом  $\text{Im} P_0$  проектора

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R_{\mu}^L(M) d\mu.$$

**Определение 3.** Говорят, что решения уравнения (1.1) имеют экспоненциальную дихотомию, если

(i) фазовое пространство  $\mathfrak{F}$  уравнения (1.1) расщепляется в прямую сумму двух инвариантных пространств,  $\mathfrak{F} = \mathcal{I}^s \oplus \mathcal{I}^u$ ;

(ii) существуют константы  $a, C \in \mathbb{R}_+$  такие, что при любом  $u_0 \in \mathcal{I}^s$  ( $u_0 \in \mathcal{I}^u$ ) и любом  $t \in \mathbb{R}_+$  ( $t \in \mathbb{R}_-$ )

$$\|u(t)\|_{\mathcal{U}} \leq C e^{-at} \|u_0\|_{\mathcal{U}} \quad (\|u(t)\|_{\mathcal{U}} \leq C e^{at} \|u_0\|_{\mathcal{U}}).$$

Термин «дихотомия» предполагает некоторую «раздвоенность» фазового пространства. Однако в приложениях нередко возникает ситуация, когда либо  $\mathfrak{F} = \mathcal{I}^s$ , либо  $\mathfrak{F} = \mathcal{I}^u$ . Поэтому в таких ситуациях мы будем говорить либо об экспоненциальной устойчивости решений, либо об их экспоненциальной неустойчивости соответственно.

**Теорема 3.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен, и

$$\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset. \quad (1.3)$$

Тогда если

(i)  $\sigma^L(M) \subset \{\text{Re} \mu < 0\} = \mathbb{C}_-$ , то решения уравнения (1.1) экспоненциально устойчивы.

(ii)  $\sigma^L(M) \subset \{\text{Re} \mu > 0\} = \mathbb{C}_+$ , то решения уравнения (1.1) экспоненциально неустойчивы.

(iii)  $(\sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_- \neq \emptyset) \wedge (\sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset) \wedge (\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset)$ , то решения уравнения (1.1) имеют экспоненциальную дихотомию.

## 2. Устойчивость и неустойчивость решений

Здесь мы редуцируем задачу (0.1) – (0.3) к уравнению (1.1), а затем применим результаты из п. 1. Для этого согласно [2], введем в рассмотрение гильбертово пространство  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(E_j)\}$  со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

и банахово пространство  $\mathcal{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(E_j) \text{ и выполнено (0.2)}\}$  с нормой

$$\|u\|^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Очевидно, вложение  $\mathcal{U} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$  плотно и компактно, поэтому обозначим через  $\mathfrak{F}$  сопряженное к  $\mathcal{U}$  относительно двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  пространство.

Формулой

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx} v_{jx} dx, \quad u, v \in \mathcal{U}$$

зададим оператор  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$ , чей спектр  $\sigma(A)$  неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке  $+\infty$ . Обозначим через  $\{\lambda_k\}$  собственные значения оператора  $A$ , занумерованные по убыванию с учетом кратности. Заметим, что первое собственное значение  $\lambda_1 = 0$  однократно, причем соответствующий нормированный (в смысле  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ ) собственный вектор имеет следующий вид:

$$\varphi_1 = \left( \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j l_j \right)^{-\frac{1}{2}} (1, 1, \dots, 1, \dots).$$

Далее построим операторы  $\langle Lu, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle Au, v \rangle$  и  $\langle Mu, v \rangle = -\alpha \langle Au, v \rangle - \beta \langle u, v \rangle$ . По построению операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , и выполнено одно из следующих условий:

- (i) при всех  $k \in \mathbb{N}$   $\lambda \neq -\lambda_k$ ,
- (ii) существует  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\lambda = \lambda_k$ , но  $\beta \neq \alpha\lambda$ .

Тогда оператор  $M$  ( $L, 0$ )-ограничен.

Доказательство леммы 1 принципиально не отличается от доказательства леммы (3.1) [2]. Заметим лишь, что в данном случае  $L$ -спектр оператора  $M$  состоит из объединения точек вида

$$\mu_k = -\frac{\alpha\lambda_k + \beta}{\lambda + \lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = -\lambda_l\}. \quad (2.1)$$

Обозначим через  $\{\varphi_k\}$  множество ортонормированных (в смысле  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ ) собственных векторов оператора  $A$ . Тогда в силу теоремы 1 справедлива

**Теорема 4.** Если выполнено условие (i) леммы 1, то фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит все пространство  $\mathcal{U}$ . Если выполнено условие (ii) леммы 1, то фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит образ проектора

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\lambda = -\lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Перейдем к изучению устойчивости решений задачи (0.1) – (0.3). Для этого потребуем, чтобы параметры  $\alpha$  и  $\beta$  были положительны, это хорошо согласуется с физическим смыслом задачи. Кроме того, положительность этих параметров обеспечивает выполнение условия  $\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ . Теперь применим теорему 3, разбив ее на четыре части для того, чтобы снабдить каждую часть некоторыми комментариями.

**Теорема 5.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}_+$ , тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит пространство  $\mathcal{U}$ , причем, решения этой задачи экспоненциально устойчивы.

Действительно, при любом  $u_0 = (u_{10}, u_{20}, \dots, u_{j0}, \dots) \in \mathcal{U}$  существует единственное решение задачи (0.1) – (0.3) с начальными данными Коши, которые здесь имеют вид

$$u_j(x, 0) = u_{j0}(x), \quad x \in (0, l_j). \quad (2.2)$$

Решение к тому же имеет вид  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$ . Экспоненциальная устойчивость таких решений в силу теоремы 5 очевидна.

**Теорема 6.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda = 0$ . Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит множество  $\mathfrak{F} = \{u \in \mathcal{U} : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}$ , причем, решения этой задачи экспоненциально устойчивы.

Фазовое пространство находим из теоремы 4. Ввиду однократности первого собственного значения оператора  $A$  оно действительно ортогонально вектору  $\varphi_1$ . Аналогично предыдущему, решение задачи (0.1) – (0.3) при любом  $u_0 \in \mathfrak{F}$  имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x),$$

и оно, очевидно, экспоненциально устойчиво.

**Теорема 7.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda \in \mathbb{R}_- \setminus \{-\lambda_k\}$ . Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) является  $\mathfrak{U}$ , причем, решения этой задачи имеют экспоненциальную дихотомию.

Пусть  $u_0 \in \mathfrak{U}$ , тогда единственное решение задачи (0.1) – (0.3), удовлетворяющее 5, имеет вид

$$u(x, t) = \left( \sum_{\lambda_k > -\lambda} + \sum_{\lambda_k < -\lambda} \right) \exp\left(-\frac{\alpha\lambda_k + \beta}{\lambda + \lambda_k} t\right) \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x). \quad (2.3)$$

Устойчивые  $\mathfrak{J}^s$  и неустойчивые  $\mathfrak{J}^u$  инвариантные пространства ортогональны в смысле  $L_2(\mathbf{G})$ , причем,  $\mathfrak{J}^u = \text{span}\{\varphi_k : \lambda_k < -\lambda\}$ , т. е. конечномерно.

**Теорема 8.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  и существует натуральное число  $l > 1$  такое, что  $\lambda = -\lambda_l$ . Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит множество  $\mathfrak{F} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \lambda_k = -\lambda\}$ , причем, решения имеют экспоненциальную дихотомию.

Этот, на вид самый трудный, случай исследуется аналогично предыдущему. Инвариантные пространства здесь имеют следующий вид:  $\mathfrak{J}^s = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \lambda_k \leq -\lambda\}$ ,  $\mathfrak{J}^u = \text{span}\{\varphi_k : \lambda_k < -\lambda\}$ . Они, очевидно, ортогональны, причем,  $\mathfrak{J}^s \oplus \mathfrak{J}^u = \mathfrak{F}$ . Любое решение задачи (0.1) – (0.3) имеет вид 6, где  $u_0 \in \mathfrak{F}$ .

## Литература

1. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.
2. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Вестн. МАГУ. Сер. Математика – 2003. – №4. – С.129 – 139.
3. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах. / Г.А. Свиридюк // Некласс. уравн. матем. физики – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
4. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах дис... канд. физ.-мат. наук / В. В. Шеметова. – Магнитогорск, 2005.
5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.T. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.T. Fedorov. – Utrecht, Köln, Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
6. Свиридюк Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика. – 1997. – №5. – С. 60 – 68.

Кафедра математического анализа  
Южно-Уральский государственный университет  
9226348588@mail.ru

Поступила в редакцию 5 марта 2008 г.

## SUMMARIES

Bayazitova A.A. AN INVERSE PROBLEM FOR THE HOFF EQUATION

The Hoff equation describes the H-beam buckling dynamics. For the first time it is considered an inverse coefficient problem modelling the experiment as a result of which under additional measurements not only the buckling dynamics but as well as the characteristics of the beam material are investigated. It is shown the existence of the unique solution of this problem.

**Key words:** *the Hoff equation, phase space, inverse problem*

Herreinstein A.W., Herreinstein E.A., Mashrabov N. STEADY OBVIOUS SCHEMES FOR EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY

In given clause the numerical method of integration for equation of heat conductivity, based on a combination of the obvious and implicit scheme with use of the linear differential first-order equation (ordinary or partial differential – depending on presence in the initial equation of first-order derivatives on spatial variables) is offered.

**Key words:** *equation of heat conductivity, steady, obvious scheme, differential first-order equation*

Grishkevich A.A., Piątek Ł., Burmutaev A. FINDING FIRST, SECOND AND THIRD ORDER GRAPH CUTS

An effective method for finding 1-, 2-, 3-order cuts based on procedure of finding all minimal cut graph sets is offered, i.e. a method for finding the cuts which are not being minimal.

**Key words:** *graph, minimal cut, quasiminimal cut, undecomposable (nonreducible) cut, distributive lattice, algorithm*

Zagreбина S.A., Solovyeva N.P. THE INITIAL-FINITE PROBLEM FOR THE EVOLUTION SOBOLEV-TYPE EQUATIONS ON A GRAPH

The article is devoted to the study of initial-finite problem for evolutionary linear Sobolev type equation unique solvability on a finite connected oriented graph.

**Key words:** *evolutionary linear Sobolev type equation, initial-finite problem, relatively p-sectorial operator, finite connected oriented graph*

Kozhanov A.I. SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM OF FINDING THE HIGHER COEFFICIENT IN AN EQUATION OF COMPOSITE TYPE

For the equations of composite type, called pseudoparabolic equations, we study the solvability of the inverse problem of determining a solution together with an unknown coefficient dependent on the distinguished (time) variable. Integral overdetermination is suggested as an additional condition. The unique existence of regular solutions is demonstrated.

**Key words:** *equation of composite type, unknown coefficient, integral overdetermination, regular solution, unique existence*

Leontyev R.Y. IMPLICIT FUNCTION THEOREM IN SECTORIAL QUASI-NEIGHBORHOODS

We consider nonlinear operational equation  $F(x, \lambda) = 0$  with condition  $F(0, 0) \equiv 0$ . Operator  $F_x(0, 0)$  is not continuously invertible. We construct continuous solutions  $x(\lambda) \rightarrow 0$  as  $\lambda \rightarrow 0$  in open set  $S$  of linear normalized space  $\Lambda$ . Zero belongs to frontier of set  $S$ .

---

Solution existence theorems we have illustrated by examples.

**Key words:** *Banach space, implicit function theorem, sectorial quasi-neighborhoods, nonlinear operator equation, linear normalized space, two-point boundary problem*

Lepikhov A.V. USE CASE MODEL OF PARALLEL DATABASE MANAGEMENT SYSTEM FOR GRID ARCHITECTURES

This paper is dedicated to design of parallel database management systems for grid environments. General requirements and parallel DBMS structure is described, use case model of the system is presented. Specifications and use case diagrams for subsystems «Client» and «Coordinator» is showed.

**Key words:** *use case, parallel database system, grid, parallel processing*

Panyukov A.V., Tychinin S.A. MATCHING SUPPLEMENT APPLICATION FOR SOLVING MAX TSP

An approach to approximation solving of MAX TSP based on supplementation of partial tours by matchings of the open vertexes subgraphs is presented in the paper. Analytical research demonstrates that this algorithm firstly have time complexity no more than  $O(n^3)$ , here  $n$  is the number of towns, and secondly does not improve the guaranteed accuracy ratio of the known algorithms. The modification of Serdukov algorithm with time complexity  $O(n^3)$  and best known guaranteed accuracy ratio is presented. Computational experiment results cause to anticipate asymptotic accuracy of this algorithm for a broad spectrum of MAX TSP.

**Key words:** *Hamilton cycle, travelling salesman problem, approximation algorithm, approximation ratio, matching, time complexity, computational experiment*

Pivovarova P.O. ON INSTABILITY OF SOLUTIONS TO EVOLUTION SOBOLEV TYPE EQUATIONS ON A GRAPH

The stability and solvability of the Cauchy problem for equations  $\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \beta u_{jxx} - \alpha u_{jxxx} + \gamma u_j$ , arised in filtering theory and defined on finit oriented connected graph with conditions of continuity and blast balance in its vertexes is under investigation.

**Key words:** *Sobolev type equation, graph, phase space*

Radchenko G.I. METHODS OF ORGANIZATION OF SYSTEM LAYER GRID-SHELLS IN CAEBEANS TECHNOLOGY

In this paper we describe the CAEBeans technology of problem-oriented grid-shells hierarchy building over CAE. We describe the structural organization of CAEBeans shell in the form of four layers: conceptual, logical, physical, system. We consider in detail methods of CAEBeans shells system layer organization.

**Key words:** *CAE, CAEBean, grid-shell, service-oriented architecture, system layer, resource broker*

Tanana V.P., Sidikova A.I. ABOUT THE APPROXIMATE SOLUTION OF A INVERSE PROBLEM

In this article we got exact in the order estimations of error the approximate solution one of inverse problem for parabolical equalization.

**Key words:** *the approximate decision, tactless problem, parabolical equalization*



---

Fedorov V.E. ON SOME CORRELATIONS IN THE THEORY OF DEGENERATE SEMIGROUPS OF OPERATORS

In the theory of degenerate operator semigroups the notions of  $(L, p)$ -radial and strongly  $(L, p)$ -radial operators have essential significances. In this work it is shown that in certain situations every of them means a generalisation in the case of degenerate strongly continuous semigroups of Hille – Yosida conditions on an infinitesimal generator of  $(C_0)$ -continuous semigroup. Besides, sufficient conditions of equivalence of these notions are obtained. Analogous results are established for  $(L, p)$ -sectorial and strongly  $(L, p)$ -sectorial operators in the case of degenerate strongly holomorphic semigroups.

**Key words:** *degenerate operator semigroup, infinitesimal generator, Hille – Yosida theorem*

Shafranov E.V. RESTORATION OF CHARACTERISTICS OF MIRROR ANTENNAS ON THE BASIS OF MODELLING PROCESS OF MEASUREMENTS OF A FIELD IN A NEAR ZONE

The decision of a problem of restoration of characteristics of mirror antennas on the basis of modelling process of measurements of a field in a near zone is considered. As the exact decision the diagram of an orientation calculated by an aperture method on the set distribution of a vector of intensity of an electric field in the aperture of the aerial is accepted. Restoration the diagram of an orientation on the sources set in a near zone is carried out, and as sources of an electromagnetic field the equivalent electric and magnetic currents calculated by an aperture method on a rectangular of measurements are used. Estimations of restoration the diagram of an orientation within the limits of the main thing and two lateral petals are resulted.

**Key words:** *aperture method, the diagram of an orientation, the mirror antenna, modelling of process of measurement of a field*

Shipilov A.S. ON STABILITY OF SOLUTIONS TO THE BARENBLATT – ZHELTOVA – KOCHINA EQUATIONS DEFINED ON GEOMETRICAL GRAPH

Exponential dichotomies of solutions of the Barenblatt – Zheltova – Kochinoy defined on geometrical graph are described.

**Key words:** *the Barenblatt – Zheltova – Kochina equation, geometrical graph, relatively  $p$ -bounded operators, exponential dichotomy*

*Подписной индекс Вестника ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование»: 29126, объединенный каталог «Пресса России». Периодичность выхода – 2 номера в год.*

*Информация о «Вестнике ЮУрГУ» и требования к оформлению статей доступны в Интернет по адресу:  
<http://www.susu.ac.ru/ru/science/publish/vestnik/>*

**ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**№ 15 (115) 2008**

**Серия  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»**

**Выпуск 1**

**Издательство Южно-Уральского государственного университета**

---

Подписано в печать 28.03.2008. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.  
Усл. печ. л. 13,48. Уч.-изд. л. 12,5. Тираж 500 экз. Заказ 113/196.

---

Отпечатано в типографии Издательства ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.