



ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО № 17(150)
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА 2009

ISSN 2071-0216

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Выпуск 3

Редакционная коллегия

к.ф.-м.н., проф. **Заляпин В.И.**, к.ф.-м.н. **Манакова Н.А.** (*отв. секретарь*),
д.ф.-м.н., проф. **Менихес Л.Д.**, д.ф.-м.н., проф. **Свиридюк Г.А.** (*отв. редактор*),
д.ф.-м.н., проф. **Соколинский Л.Б.**

Редакционный совет

акад. РАН **Васильев С.Н.**, акад. РАН **Еремин И.И.** (*председатель*),
д.ф.-м.н., проф. **Кадченко С.И.**, д.ф.-м.н., проф. **Кожанов А.И.**, д.ф.-м.н., проф.
Лакеев А.В., д.ф.-м.н., проф. **Панюков А.В.**, д.ф.-м.н., проф. **Танана В.П.**,
д.ф.-м.н., проф. **Ухоботов В.И.**, д.ф.-м.н., проф. **Федоров В.Е.**,
чл.-кор. РАН **Ченцов А.Г.**, д.т.н., проф. **Ширяев В.И.**

Содержание

СИСТЕМА УДАЛЁННОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНЫХ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ М.О. Бахтерев, П.А. Васёв, А.Ю. Казанцев, Д.В. Манаков	4
РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ НА СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТЬЮ С ПОМОЩЬЮ ОДНО- И ДВУМЕРНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ Д.А. Беликов, А.В. Старченко	12
ВИРТУАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СРЕДЫ: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НА GRID ПОЛИГОНАХ В.М. Волохов, Д.А. Варламов, Н.Ф. Сурков, А.В. Пивушков	24
ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В.Л. Дильман	36
РАЗРАБОТКА, ВЕРИФИКАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВАННОГО НА МНОГООБЛОЧНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ РАСПАРАЛЛЕЛЕННОГО ПАКЕТА ОТКРЫТОГО ТИПА VP2/3 ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ, ПРИКЛАДНЫХ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ЗАДАЧ АЭРОМЕХАНИКИ И ТЕПЛОФИЗИКИ С.А. Исаев, А.Г. Судаков, П.А. Баранов, А.Е. Усачов, С.В. Стрижак, Я.К. Лоханский, С.В. Гувернюк	59
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ Е.Д. Кареева, В.В. Шайдунов, М.С. Вдовенко	73
НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА Т.Г. Сукачева	86
ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО РАЗЛИЧНЫМ КАРТОГРАФИЧЕСКИМ ДАННЫМ А.А. Сухинов	94
О ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ В.П. Танана, А.И. Сидикова	104
ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО КУРСА ЯХТЫ В.И. Ухоботов, И.В. Цеунова	114

Contents

SYSTEM OF DISTANT VISUALIZATION FOR ENGINEERING CALCULATIONS AND HPC M.O. Bakhterev, P.A. Vasev, A.Y. Kazantsev, D.V. Manakov	4
PARALLELING OF THE THREE-DIMENSIONAL MODEL OF THE ADMIXTURE TRANSFER IN THE DISTRIBUTED MEMORY SYSTEMS USING ONE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL DOMAIN DECOMPOSITION D.A. Belikov, A.V. Starchenko	12
VIRTUAL COMPUTING ENVIRONMENTS: UTILIZATION ON THE GRID POLYGONS V.M. Volokhov, D.A. Varlamov, N.F. Surkov, A.V. Pivushkov	24
RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODELS OF THE STRESS CONDITION OF THE THIN-WALLED HETEROGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS BASED ON ANALYTICAL METHODS V.L. Dil'man	36
DEVELOPMENT, VERIFICATION AND APPLICATION OF THE PARALLELED PACKAGE OF THE OPEN TYPE VP2/3 BASED ON MULTIBANK COMPUTING TECHNOLOGIES FOR SOLVING FUNDAMENTAL, APPLIED AND OPERATIONAL PROBLEMS IN AEROMECHANICS AND THERMAL PHYSICS S.A. Isaev, A.G. Sudakov, P.A. Baranov, A.Eu. Usachov, S.V. Strizhak, Ja.K. Lokhansky, S.V. Guvernuyuk	59
PARALLEL IMPLEMENTATION OF THE FEM FOR BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE SHALLOW WATER EQUATIONS E.D. Karepova, V.V. Shaidurov, M.S. Vdovenko	73
THE UNSTEADY LINEARIZED MODEL OF MOVEMENT OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC LIQUID OF HIGH ORDER T.G. Sukacheva	86
RECONSTRUCTION OF BASIN BOTTOM SURFACE ON THE BASIS OF VARIOUS MAP DATA A.A. Sukhinov	94
ASSURED ACCURACY ESTIMATION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM OF THE THERMAL DIAGNOSTICS IN THE HETEROGENEOUS ENVIRONMENT V.P. Tanana, A.I. Sidikova	104
GAME PROBLEM OF THE BEST YACHT COURSE CHOICE V.I. Ukhobotov, I.V. Tseunova	114

СИСТЕМА УДАЛЁННОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНЫХ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

М.О. Бахтерев, П.А. Васёв, А.Ю. Казанцев, Д.В. Манаков

SYSTEM OF DISTANT VISUALIZATION FOR ENGINEERING CALCULATIONS AND HPC

М.О. Bakhterev, P.A. Vasev, A.Y. Kazantsev, D.V. Manakov

Рассмотрены вопросы доступа к результатам вычислений. Выделены случаи, в которых выгодно применение удалённой визуализации, то есть такого распределения системы визуализации, когда изображения генерируются на одном компьютере, а просматриваются на другом. Предложена новая система удалённой визуализации, которая задействует преимущества веб-технологий.

Ключевые слова: визуализация, инженерные вычисления, распределённые системы, рендер-серверы, удалённая визуализация

The authors analyses issues of access to the calculation results. They marked the cases in which the usage of the distant visualization is rational, i.e. such distribution of the visualization system when the image data are generated in one computer and can be browsed on the other. The authors offer a new distant visualization system which will enable the web-technology advantages.

Keywords: visualization, engineering calculations, distributed systems, render-servers, distant visualization

1. Введение

Современная вычислительная техника позволяет осуществлять всё более сложные расчёты. Результаты таких вычислений могут представлять собой значительный объём данных. Очевидно, возникает проблема эффективного доступа к этим данным. Одним из решений такой проблемы является технология удалённой визуализации. Это подразумевает такую модификацию системы визуализации, когда изображения создаются на специальном компьютере и передаются по сети на компьютер пользователь. Пользователь может управлять визуализацией, влияя на процесс создания изображений, которые немедленно появляются на его компьютере.

Среди достоинств данного подхода можно отметить следующие. Во-первых, появляется возможность визуализации экспериментальных данных большого объёма без необходимости копирования этих данных на компьютер пользователя. Действительно, рендеринг может быть осуществлён на вычислительных мощностях, имеющих быстрый доступ к данным. При этом пользователю передаются лишь изображения, а не исходные данные. Во-вторых, анализ результатов эксперимента может быть начат без задержек, связанных с передачей большого объёма данных для визуализации. Далее, за счёт централизации программного

обеспечения появляется возможность сокращения лицензионных издержек на задействованное программное обеспечение. Также можно отметить упрощение процессов администрирования и поддержки системы визуализации и вычислительного комплекса в целом.

В Институте Математики и Механики УрО РАН разрабатывается технология поддержки удалённой визуализации. Эта технология позволяет создавать различные системы визуализации для суперкомпьютерных вычислений и инженерных расчётов через Интернет. Прежде чем перейти к описанию созданной технологии, предлагаем рассмотреть вопрос визуализации с точки зрения взаимного размещения данных, системы рендеринга и компьютера пользователя.

2. Расположение данных и системы рендеринга

С технической точки зрения визуализация включает в себя этапы загрузки данных, обработки, преобразования этих данных в визуальные сущности, их рендеринг и отображение на дисплее или другом устройстве [1]. Это относится как к онлайн-визуализации, так и к визуализации после счёта. В связи с наличием этих этапов для архитектуры системы визуализации существенными являются следующие вопросы.

1. Расположение данных – локальное или удалённое. Локальное расположение подразумевает наличие файлов на компьютере пользователя. Однако данные могут располагаться и во-вне – например, когда их невозможно или неэффективно целиком передать на машину пользователя для визуализации.

2. Расположение системы рендеринга – локальное или удалённое. Локальный рендеринг задействует мощности компьютера пользователя. Удалённое расположение системы рендеринга подразумевает её исполнение на отдельном компьютере (или даже на самом вычислителе). Это может быть оправдано в различных случаях, например, когда процесс рендеринга требует вычислительных мощностей, превышающих возможности машины пользователя.

Если рассмотреть комбинации расположения данных и рендеринга, то можно вплотную приблизиться к возможным архитектурным решениям для систем визуализации.

1. Данные и рендеринг – локальные. Этот случай можно считать классическим и самым распространённым. Подразумевается, что время чтения и визуализации данных приемлемо. Плюсом этого подхода является относительная простота реализации системы визуализации.

2. Данные удалённые, рендеринг локальный. Возникает необходимость создания технических средств для передачи данных или их части. Например, это может быть программа на компьютере с результатами вычислений, которая по команде считывает и передает часть данных на машину пользователя. Команды на чтение и передачу инициируются системой рендеринга в зависимости от текущего вида и параметров отображения. При этом локальный рендеринг обеспечивает оперативность взаимодействия с системой – например, поворот трёхмерной сцены с помощью мыши может выглядеть непосредственным и плавным [2].

Важной задачей, которую приходится решать в случае удалённых данных и локального рендеринга, является выбор правил передачи данных. Например, в широком спектре задач при визуализации расчётных сеток успешным является подход, когда данные огрубляются (с сохранением когнитивности восприятия) на удалённой машине, что позволяет передать их по сети и отобразить на машине пользователя [3].

3. Данные и рендеринг – удалённые. В этом случае изображения создаются на специальном компьютере и передаются по сети на компьютер пользователя. Пользователь может управлять визуализацией, влияя на процесс создания изображений, которые немед-

ленно появляются на его компьютере. Актуальной является ширина канала между ресурсом, содержащим данные, и системой рендеринга. Если этот канал обладает достаточной пропускной способностью, то система передачи данных может оказаться достаточно простой. Еще одним плюсом такого подхода является то, что система рендеринга может быть распределённой. Отметим также, что требования к ширине канала между системой рендеринга и машиной пользователя в общем случае являются фиксированной величиной, определяемой интенсивностью графического обмена для данной задачи.

Можно сказать, что каждый из перечисленных вариантов является предпочтительным в зависимости от ситуации. Конкретный выбор той или иной конфигурации определяется решаемой задачей и имеющимся системным окружением. В разработанной нами системе подразумевается использование третьего варианта, когда и результаты экспериментального моделирования, и программы рендеринга расположены на удалённых мощностях.

3. Классификация систем удалённой визуализации

В работах западных коллег [4] встречается следующая классификация систем удалённой визуализации, которая представляет на наш взгляд особый интерес.

1. Рендеринг на компьютере пользователя. В этом варианте программа визуализации выполняется на сервере, однако рендеринг происходит на машине пользователя. Ярким примером этого класса являются системы X-Windows и Chromium. Первая позволяет запускать программы на удалённом компьютере, но при этом они отображаются и ведут себя как локальные. Вторая система – Chromium – позволяет направлять поток OpenGL-команд от сервера к клиенту. Системы этого класса, помимо своих преимуществ, обладают также и недостатком – они не задействуют серверные мощности для выполнения рендеринга, оставляя эту задачу машине пользователя.

2. Рендеринг на стороне сервера для двумерных и административных задач. Наиболее распространённые представители этого класса – Microsoft Terminal Services, Citrix MetaFrame, а также технология VNC. Эти продукты используются, как уже отмечено, для выполнения задач по администрированию, а также для удалённого доступа к офисным и другим двумерным приложениям. Однако с трёхмерной графикой данные системы справляются слабо.

3. Рендеринг на стороне сервера для трёхмерных приложений. В эту категорию попадают все системы, поддерживающие распределение «данные и рендеринг – удалённые», которое описано в предыдущем параграфе. Далее будет рассмотрен целый ряд таких систем.

Как уже отмечалось, в предлагаемой нами системе мы придерживаемся подхода, когда рендеринг осуществляется на стороне сервера. Обратимся теперь к краткому обзору имеющихся систем удалённой визуализации, уделив должное внимание техническим нюансам их применения.

4. Обзор существующих решений

Нами исследованы возможности систем Windows Terminal Services 2008, Citrix XenApp, решений VNC и XWindows, а также ряда менее известных систем. Анализ показывает, что ведущие разработчики этих решений только приступают к поддержке программ с аппаратной трёхмерной графикой. Так, в пресс-релизах компаний Microsoft и Citrix 2008 года заявлено, что следующие версии их продуктов будут непосредственно поддерживать приложения, использующие DirectX и OpenGL. Безусловно, данные заявления вселяют определённую уверенность и желание применить эти широко используемые технологии, однако в настоящий момент единственно возможный путь – рассмотрение альтернативных решений.

Существуют решения различных уровней. Например, на уровне библиотек и сервисов выделяются VNC и VirtualGL. А среди флагманов готовых продуктов можно отметить Paraview Enterprise Edition, Sun Visualization System, HP Scalable Visualization Array, Mental Images Reality Server и StreamMyGame. Подчеркнём, что большинство из этих решений ориентированы на пользовательский интерфейс, базирующийся на веб-технологиях. Среди представленных систем отдельно хотелось бы выделить следующие.

Среда VirtualGL расширяет функциональность систем на базе технологий X-Windows, задействуя аппаратный рендеринг на стороне сервера. В X-Windows все команды OpenGL направляются по сети для исполнения на компьютере пользователя. После включения среды VirtualGL рендеринг осуществляется сразу на сервере, и по сети передаются готовые изображения. Плюсом этой среды, очевидно, является прозрачная интеграция с имеющимися приложениями. Минус – привязка к X-Windows.

Paraview Enterprise Edition – содержит веб-интерфейс к системе визуализации Paraview для организации удалённой визуализации. Paraview является распространённым инструментом для визуализации результатов различных расчётов. Среди плюсов программы – богатый набор видов отображения и различные варианты конфигурации распределённого рендеринга. Минус – необходимость конвертации данных в формат Paraview.

Программный комплекс RealityServer является платформой для создания 3D-веб-приложений. Система содержит инфраструктуру для рендеринга трёхмерных сцен, передачи изображений в веб-интерфейс, и приём команд от пользователя веб-интерфейса с последующей обработкой их на сервере. Существует возможность как настройки веб-интерфейса, так и программирования серверной логики. Среди плюсов программы можно отметить поддержку аппаратного рендеринга. Среди минусов – закрытость разработки. Кроме того, отдельной проблемой является необходимость конвертации данных в формат сцен «.m», применяющихся в RealityServer.

По результатам исследования существующих решений нами было принято решение о создании новой системы удалённой визуализации. Это позволит в будущем глубже понять проблематику этой технической области, а также производить достаточно гибкие изменения, которые потребует практика.

5. Новая система удалённой визуализации

Система состоит из трёх уровней: (1) модулей визуализации, (2) сервиса-посредника и (3) интерфейсов пользователя. Каждый модуль визуализации (программа рендеринга) – это один или несколько процессов, ответственных за загрузку и графическое представление экспериментальных данных определённого типа. Сервис-посредник – это серверный процесс, он принимает команды от интерфейса пользователя и направляет их к программам рендеринга. Интерфейсы пользователя – в настоящее время построенные на веб-технологиях – отображают построенные графические представления данных и взаимодействуют с пользователем. На рис. 1 показана общая схема работы системы.

Итак, пользователь взаимодействует с системой через веб-интерфейс, в котором представлены элементы управления модулем визуализации. В основе этого интерфейса – сгенерированное визуальное представление данных. Пользователь может оказывать воздействие на изображение, а также на элементы управления. При воздействии веб-интерфейс направляет соответствующие команды сервису-посреднику. Посредник, в свою очередь, транслирует команды конкретному процессу модуля визуализации. Это могут быть запросы на изменение тех или иных параметров либо на перерисовку изображения. В случае запроса на перерисовку в модуле визуализации вызывается специальная функция рендеринга. После отработки этой функции изображение сжимается в определённый формат и передаётся через сервис-посредник в браузер пользователя.



Рис. 1. Общая схема системы онлайн-визуализации

В настоящий момент в рамках предлагаемой технологии для каждой системы визуализации подразумевается «ручное» создание собственного веб-интерфейса пользователя. Задача разработки универсальных механизмов создания таких графических интерфейсов – это особый вопрос, который заслуживает внимания отдельной исследовательской работы.

Модули визуализации создаются и работают по следующей схеме. При запуске модуль регистрируется в системе, сообщая свое сетевое расположение. Также модуль сообщает перечень параметров, которые влияют на визуализацию и которые можно изменять через интерфейс пользователя. Далее модуль регистрирует функцию рендеринга и переходит в режим ожидания.

Как отмечено выше, когда возникает необходимость сгенерировать изображение, система вызывает зарегистрированную функцию рендеринга. Если пользователь инициирует изменение параметров, то происходит обновление значений соответствующих переменных в оперативной памяти модуля визуализации.

На рис. 2 показан пример исходного кода модуля визуализации. В данном случае модуль имеет два параметра визуализации – углы поворота сцены *alfa* и *beta*. Эти параметры публикуются в системе с помощью вызовов *iv_publish*. После публикации система может читать и записывать значения параметров в память программы. Доступ к памяти осуществляется асинхронно, в параллельном потоке.

В этом примере функция рендеринга создана простейшим образом – она передает в графическую сцену указанные параметры и вызывает захват изображения с окна приложения. Эта функция также выполняется в потоке, отличном от главного потока приложения. Гарантируется, что во время работы данной функции параметры визуализации остаются неизменными.

После срабатывания функции рендеринга изображение сжимается и передаётся сервис-посреднику. Правилам сжатия изображений требуется уделить особое внимание. На текущий момент они упаковываются в формат PNG по следующей схеме. При первом запросе на кадр система высылает изображение, уменьшенное в 4 раза. При поступлении в браузер это изображение растягивается, и пользователь видит слегка размытую картину. В случае, если пользователь не проявляет какой-либо активности в течение нескольких секунд, посылается улучшенная копия изображения с коэффициентом уменьшения 2. Если в течение последующих секунд пользователь продолжает «молчать», то передаётся и показывается

```
double alfa=0,beta=0; // параметры визуализации

// функция рендеринга. Вызывается по требованию интерфейса.
void perform_render( char *name, int w, int h, fipWinImage*
theImage ) {
    scene.rot.z = -alfa;
    scene.Yaw( 0 );
    scene.Slide( -beta*100,0,0 );
    theImage->captureWindow( engine.render->hWnd );
}

...

iv_init( «gryffin»,0 ); // регистрация в системе
iv_publish(«alfa»,&alfa,1,0 ); // публикация параметра alfa
iv_publish( «beta»,&beta,1,0 ); // публикация параметра beta

// регистрация функции рендеринга с именем gryffinview
iv_remoteWindow( «gryffinview»,perform_render );

... \vspace{-0.5cm}
```

Рис. 2. Пример подключения модуля визуализации

исходное изображение. Этот подход позволяет уменьшить объём данных, передаваемых по сети. Действительно, если пользователь с помощью мыши вызывает интерактивное вращение трехмерной сцены, то с точки зрения восприятия важно показать результат быстро, пусть и огрублённым. Для одного конкретного приложения, которое будет приведено ниже, размер изображения PNG с разрешением 640x480 в среднем составляет 60 Кб, а уменьшенного в 4 раза – 5 Кб. Соответственно, при поворотах сцены передаётся 10 – 50 изображений суммарным объемом всего в 50 – 250 Кб. Это позволяет сократить время отклика системы.

Хотелось бы объяснить, почему используется формат PNG, а не JPEG. По наблюдениям авторов, использование формата PNG более предпочтительно из-за применения компрессии без потерь. При необходимости система проводит дополнительную компрессию, сжимая изображение по осям. При этом сжатое, а потом растянутое изображение визуально выглядит более приемлемо при динамических изменениях (например, во время вращения сцены), чем в случае сжатия с потерей качества JPEG. Последний формат в динамике воспринимается неаккуратным, хоть и предоставляет лучший коэффициент сжатия. Тем не менее, в мировой практике JPEG довольно часто применяется в работе систем удалённой визуализации. Более того, разрабатываются подсистемы компрессии с применением технологий CUDA [4]. Мы также надеемся со временем исследовать этот вопрос, что в результате может привести к еще большему сокращению времени отклика системы.

Что касается сервиса-посредника, то он выполняет три функции. Во-первых, посредник ведёт учёт активных модулей визуализации. Он хранит их сетевые адреса, а также список имен параметров визуализации для каждого модуля. Это и позволяет посреднику определять, куда именно необходимо маршрутизировать запросы от пользовательских интерфейсов. Прием таких запросов, их обработка и маршрутизация является второй функцией посредника. Наконец, посредник является веб-сервером, обслуживая файлы пользовательского веб-интерфейса.

Компоненты всех трёх уровней системы могут располагаться на разных компьютерах.

Так, например, интерфейс пользователя выполняется в браузере на компьютере пользователя, сервис-посредник может быть размещен на специальном сервере, а модуль визуализации может располагаться на вычислительном кластере. Взаимодействие посредника и модулей визуализации осуществляется с помощью протокола SOAP. Пользовательские интерфейсы взаимодействуют с посредником по протоколу HTTP, AJAX и, при необходимости, SOAP.

В завершение этого параграфа хотелось бы отметить, что в рамках разрабатываемой нами системы модуль визуализации не привязан к конечному типу оборудования – это может быть отдельное приложение на сервере визуализации или параллельное приложение, работающее на вычислителе. Более того, функции модуля визуализации может выполнять часть узлов вычислительной программы. Таким образом, система позволяет варьировать архитектуру для модуля визуализации и может применяться как для оффлайн-, так и для онлайн-визуализации.

6. Пример использования системы

На представленной иллюстрации (рис. 3) показан один из шагов расчёта процесса определённого воздействия на сечение трубы нефтепровода [5], проведённого в инженерном пакете DEFORM. Пользователь может нажать кнопку мыши на изображении и перемещать её, при этом изображение будет немедленно обновляться, показывая вращение объекта. Рендеринг осуществляется на удалённом сервере визуализации аппаратно специальной программой с применением технологии DirectX. В локальной сети 10 Мбит удалось достичь скорости работы 15 кадров в секунду. В эксперименте с визуализацией через Интернет по каналу Екатеринбург – Москва – Челябинск система показала скорость работы около 3 кадров в секунду.

7. Заключение

Система показала работоспособность и расширяемость; может работать под управлением Windows, Linux и переносима на другие ОС. Веб-интерфейс системы является независи-

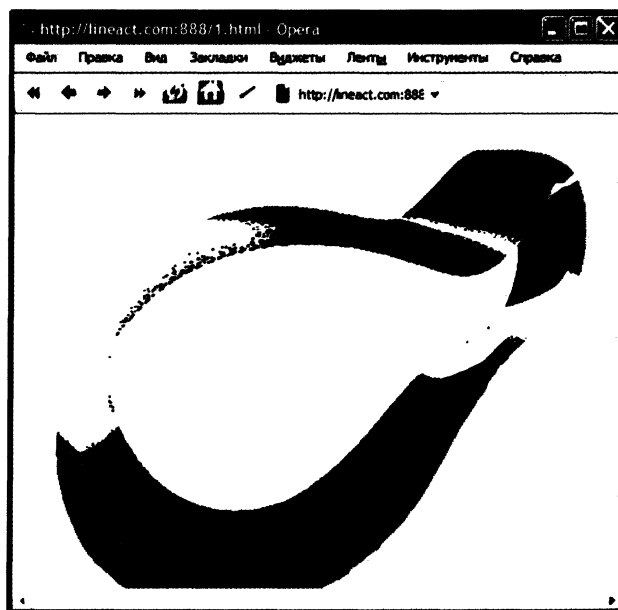


Рис. 3. Пример использования системы

мым от браузера. Технологии написания модулей визуализации могут быть самыми разнообразными. Теоретически, это любые программы, способные работать с сетевым протоколом SOAP. Модули визуализации могут исполняться в разных средах – будь то выделенные сервера визуализации или узлы вычислителя.

Созданная реализация системы показала достаточно высокое удобство использования и восприятия – до 15 кадров в секунду в локальной сети, что соизмеримо по скорости с визуализацией на компьютере пользователя.

Разработан модуль для визуализации определённого класса расчётных сеток. При этом необходимо подчеркнуть, что в общем случае в системе подразумевается создание индивидуального модуля визуализации для каждой конкретной задачи. Перспективным направлением, возможно, является создание набора универсальных модулей визуализации для определённых классов задач. Основу такого набора может составить какая-либо существующая система визуализации для научных исследований.

В заключении авторы хотели бы выразить искреннюю благодарность и признательность В.Л. Авербуху за научное руководство; С.В. Шарфу и М.В. Якововскому за конструктивные обсуждения проблематики, а также уважаемым коллегам из Сарова (РФЯЦ-ВНИИЭФ) и Челябинска (ЮУрГУ) за поддержку и плодотворный обмен идеями.

Литература

1. Подходы к реализации средств on-line визуализации параллельных вычислений / В.Л. Авербух, Д.В. Манаков, П.А. Васёв и др. // Супервычисления и математическое моделирование: тезисы междунар. семинара, г. Саров, ВНИИЭФ-РФЯЦ. – Саров, 2003. – С. 14 – 16.
2. ScientificView – система параллельной постобработки результатов, полученных при численном моделировании физических процессов / А.Л. Потехин, В.И. Тарасов, С.А. Фирсов и др. // Труды XVIII Международной конференции по компьютерной графике и визуализации Graphicon, 2008. – М., 2008. – С. 65 – 69.
3. Якововский, М.В. Решение сеточных задач на распределенных системах / М.В. Якововский // Параллельные вычислительные технологии: тр. науч. конф. – Челябинск, 2007. – Т. 2. – С. 201 – 211.
4. Lietsch, S., A CUDA-Supported Approach to Remote Rendering / S. Lietsch, O. Marquardt // Proceedings of the International Symposium on Visual Computing. – Lake Tahoe, Nevada, United States, Springer. – 2007. – P. 724 – 733.
5. Технология создания виртуальных испытательных стендов в грид-средах / Г.И. Радченко, В.А. Дорохов, Р.С. Насибулина и др. // Вторая Международная научная конференция «Суперкомпьютерные системы и их применение» (SSA'2008): докл. конф. (27 – 29 октября 2008 года, Минск). – Минск, 2008. – С. 194 – 198.

Институт математики и механики Уральского отделения РАН,
Уральский государственный университет
mike.bakhterev@gmail.com, pavel.vasev@gmail.com, ajk@gmail.com, manakov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 6 февраля 2009 г.

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ НА СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТЬЮ С ПОМОЩЬЮ ОДНО- И ДВУМЕРНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ

Д.А. Беликов, А.В. Старченко

PARALLELING OF THE THREE-DIMENSIONAL MODEL OF THE ADMIXTURE TRANSFER IN THE DISTRIBUTED MEMORY SYSTEMS USING ONE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL DOMAIN DECOMPOSITION

D.A. Belikov, A.V. Starchenko

Представлено распараллеливание вычислительного алгоритма решения системы адвективно-диффузионно-кинетических уравнений математической модели переноса малых составляющих примеси с учетом их химических взаимодействий в приземном слое атмосферы. Распараллеливание основано на одно- или двумерной декомпозиции расчетной области с использованием синхронных операций для межпроцессорной передачи данных. Производительность разработанного параллельного алгоритма при различных способах декомпозиции и организации обменов оценена экспериментально на кластере Томского государственного университета СКИФ Cyberia.

Ключевые слова: параллельные вычисления, модель переноса примеси

In the article the authors present paralleling of the computing algorithm of the solution of the system of the advective-diffusive-kinetic equations of the mathematical model of the transfer of the minor constituents of the admixture taking into consideration their chemical interaction in the atmosphere bottom layer. The paralleling is based on the one- or two-dimensional decomposition of the rated domain using the synchronous operations for the interprocessor data transfer. The efficiency of the worked out parallel algorithm using various decomposition modes and transput organization were tested using the cluster of the Tomsk State University «СКИФ Cyberia»(SKIF).

Keywords: parallel computing, admixture-transfer model

Введение

Подробное моделирование протекания сложных атмосферных процессов в региональных масштабах требует значительных вычислительных затрат. При этом затраты со временем будут только возрастать, поскольку развитие моделей подобного класса идет по пути повышения пространственного разрешения и включения в рассмотрение более широкого спектра атмосферных явлений [1].

Эффективным способом сокращения времени расчета, активно развиваемым в настоящее время, является применение вычислительных систем с параллельной архитектурой.

Наиболее общим подходом при создании параллельных программ на системах с распределенной памятью является стандарт MPI (Message Passing Interface), разработанный в 1993 году в результате обобщения и стандартизации различных библиотек передачи сообщений [2]. Однако его практическое применение сопровождается необходимостью решения не всегда тривиальных задач, а для достижения положительного результата (получения параллельных программ с эффективностью, близкой к единице) требуется учитывать особенности алгоритма решения задачи и вычислительной системы [3].

Универсальным подходом при реализации моделей атмосферного пограничного слоя и переноса примеси на вычислительных системах с параллельной архитектурой является распараллеливание по данным. При этом область исследования разделяется на подобласти в соответствии с числом доступных процессоров, и каждый процессор одновременно с другими производит вычисления в своей подобласти. Тогда объемы вычислений для всех процессов примерно равны и напрямую зависят от равномерности декомпозиции области исследования. Хотя при расчете химических реакций уровни нагрузки на процессы, работающие с подобластями, характеризующимися большим количеством источников примеси (урбанизированная территория), могут быть выше, чем у процессов, имеющих дело с подобластью с меньшим количеством источников (сельская местность) [1].

При использовании парадигмы распараллеливания по данным для моделирования пространственных процессов в атмосфере декомпозиция расчетной области может быть проведена по трем координатным направлениям. Однако разбиение области исследования по вертикальной координате представляется менее эффективной, поскольку в мезомасштабных метеорологических моделях или фотохимических моделях качества атмосферного воздуха необходимо вычислять интегральные характеристики в вертикальном столбе воздуха [1, 4, 5], что потребует межпроцессорных пересылок и негативно скажется на ускорении параллельного алгоритма. Поэтому двумерная декомпозиция по двум горизонтальным координатам является оптимальным способом распараллеливания, поскольку обеспечивает масштабируемость и гибкость параллельной программы при проведении вычислений на современных многопроцессорных кластерных системах. Заметим, однако, что при небольшом числе используемых процессоров эффективность параллельных программ, построенных с применением одномерной и двумерной декомпозиции области исследования, отличается незначительно [6]. Это следует также принимать в расчет, поскольку трудоемкость создания параллельных программ для решения сеточных уравнений с использованием более простой одномерной декомпозиции значительно ниже.

Данная работа посвящена теоретическому анализу и апробации параллельных алгоритмов, основанных на одномерной и двумерной декомпозиции сеточной области, для численного решения уравнений пространственной прогностической модели переноса примеси с учетом химических реакций.

1. Прогностическая пространственная модель переноса примеси с учетом химических и фотохимических реакций

Для расчета концентрации компонентов примеси с учетом химических взаимодействий между ними применяется эйлерова модель турбулентной диффузии, включающая транспортные уравнения с описанием адвекции, турбулентной диффузии и химических реакций [5]:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial UC_i}{\partial x} + \frac{\partial VC_i}{\partial y} + \frac{\partial WC_i}{\partial z} = -\frac{\partial \langle c_i u \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle c_i v \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle c_i w \rangle}{\partial z} + S_i + R_i; \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_s.$$

Здесь C_i, c_i – осредненная и пульсационная составляющие концентрации i -ой компоненты примеси; W, w – осредненная и пульсационная составляющие вертикальной компоненты скорости примеси; U, V, u, v – осредненные и пульсационные составляющие горизонтальной скорости; $\langle \rangle$ – осреднение по Рейнольдсу, S_i – источниковый член, представляющий выбросы компонентов примеси в атмосферу; R_i описывает образование и трансформацию вещества за счет химических и фотохимических реакций с участием компонентов примеси; n_s – количество химических компонентов примеси, принятых к рассмотрению в выбранной схеме химических реакций.

Уравнения (1) незамкнуты, так как в них кроме концентрации C_i , которую необходимо рассчитать, присутствуют дополнительные неизвестные – корреляции $\langle c_i u \rangle$, $\langle c_i v \rangle$, $\langle c_i w \rangle$, моделирующие турбулентную диффузию примеси. В данной работе для их определения используются замыкающие соотношения, которые получаются в рамках равновесного приближения для дифференциальных уравнений переноса турбулентных потоков массы в условиях локальной однородности атмосферного пограничного слоя [7].

В настоящее время в рассматриваемой фотохимической модели адаптировано три сокращенные кинетические схемы [5]: модуль AIRCHEM ($n_s = 10$) [8], механизм GRS ($n_s = 11$) [9], RADM ($n_s = 11$) [10].

2. Начальные и граничные условия

На нижней границе области исследования ставятся граничные условия, моделирующие сухое осаждение компонентов примеси [11]. На верхней границе для концентраций C_i применяются простые градиентные условия. На боковых границах расчетной области используются условия радиационного типа, обеспечивающие выход возмущений, сгенерированных в области (погрешность метода и округления), за ее пределы без отражения. При инициализации модели считается, что во всей расчетной области концентрации рассматриваемых компонентов примеси равны начальным фоновым.

Расчет полей метеорологических характеристик осуществляется при помощи мезомасштабной метеорологической модели [4] или модели атмосферного пограничного слоя в однородном приближении [12].

3. Метод расчета

Дискретизация дифференциальных уравнений модели переноса примеси (1) осуществлена с использованием метода конечного объема на основе схем второго порядка аппроксимации для диффузионных (центрально-разностная схема) и адвективных (MLU-схема Ван-Лира [13]) членов уравнений переноса на равномерной в горизонтальных направлениях (Ox и Oy) и неравномерной, сгущающейся к поверхности конечно-разностной сетке.

Дискретный аналог уравнения переноса (1) при фиксированном индексе $1 \leq i \leq n_s$, $S = S_i$, $R = R_i$, $\Phi = C_i$ можно записать в виде:

$$\left[a_P^0 - (R_i^-)_P^k \Delta x \Delta y \Delta z + D_t + D_b \right] \Phi_P^{k+1} = D_t \Phi_T^{k+1} + D_b \Phi_B^{k+1} + \left[a_E \Phi_E^k + a_W \Phi_W^k + a_N \Phi_N^k + a_S \Phi_S^k + a_T \Phi_T^k + a_B \Phi_B^k - a_P \Phi_P^k \right] + b, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a_E &= \max(-F_e, 0) + D_e; & a_W &= \max(F_w, 0) + D_w; & a_N &= \max(-F_n, 0) + D_n; \\ a_S &= \max(F_s, 0) + D_s; & a_T &= \max(-F_t, 0); & a_B &= \max(F_b, 0); \\ b &= \left((S_i)_P^k + (R_i^-)_P^k \right) \Delta x \Delta y \Delta z + D m_P^*; & a_P^0 &= \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_P^{k+1} \approx \Phi(t^k + \Delta t, x_i, y_j, z_m)$, k – номер слоя по времени, $\Delta x \Delta y \Delta z$ – размеры конечного объема с центром в точке P (рис. 1); центры соседних конечных объемов обозначены по направлениям сторон света $E(x_i + \Delta x/2, y_j, z_m)$, $W(x_i - \Delta x/2, y_j, z_m)$, $N(x_i, y_j + \Delta y/2, z_m)$, $S(x_i, y_j - \Delta y/2, z_m)$. Для центров, расположенных выше конечных объемов, используется $T(x_i, y_j, z_m + \Delta z/2)$, а ниже – $B(x_i, y_j, z_m - \Delta z/2)$. Центры соответствующих граней конечного объема обозначены n, s, e, w, t, b . Расходы и эффективные коэффициенты диффузии на соответствующих гранях конечного объема записаны как F и D . Под обозначением Dm_p^* понимается конечно-объемная аппроксимация смешанных производных по x, y, z от Φ на временном слое k и сумма наклонов, получаемых в MLU-представлении адвективных потоков.

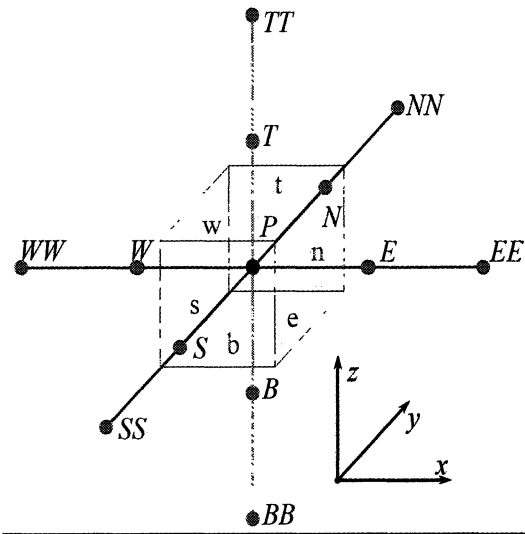


Рис. 1. Вычислительная ячейка с обозначением центров используемых по шаблону ячеек и граней выбранного конечного объема

Используемая явно-неявная разностная схема (2) позволяет неявным образом провести расчет в вертикальных столбцах, и тем самым избежать существенных ограничений на шаг по времени, вследствие малых вертикальных размеров вычислительных ячеек, высота которых из-за сгущения вычислительной сетки к поверхности в первом узле составляет всего 2 м. В то же время горизонтальные размеры сетки (300 – 500 м) позволяют использовать явную вычислительную схему. Такой подход обеспечивает высокую скорость вычислений вследствие применения экономичного метода прогонки для решения на каждом шаге по времени систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей (2).

Расчетная область представляет собой часть пограничного слоя атмосферы размером 50×50 км на поверхности и 2 км в высоту, выбранную таким образом, что ее квадратное основание содержит участок подстилающей поверхности с крупным населенным пунктом в центре. В расчете учитывается эмиссия примеси от линейных, площадных и точечных источников, находящихся на поверхности или приподнятых над землей. Область покрывается вычислительной сеткой с размерами: $N_x \times N_y \times N_z = 100 \times 100 \times 30$ узлов. Период прогностического моделирования обычно составляет 48 часов. Использовался шаг по времени $\Delta t_c = 6$ сек для решения уравнений химической кинетики и $\Delta t_c = 60$ сек для интегрирования адвективно-диффузионных процессов. Поля метеорологических характеристик, необходимые для проведения расчета, подготавливались перед началом вычислений полей концентраций [4, 12].

Таким образом, в данной постановке для исследования распространения и рассеяния основных загрязнителей воздуха над крупным промышленным центром требуется решить порядка десяти пространственных нестационарных адвективно-диффузионных уравнений переноса с учетом химических реакций. Основным направлением использования данной модели является краткосрочный прогноз качества атмосферного воздуха над урбанизированной территорией, поэтому важно обеспечить наименьшее время вычислений. Однако современные рабочие станции и сервера даже с многоядерной архитектурой не способны обеспечить в полной мере требуемого быстродействия при использовании обыкновенной последовательной версии расчетной программы. Но широко распространенные в наши дни

системы с параллельной архитектурой, в особенности кластеры [14], делают возможным эффективно сократить время вычислений за счет распараллеливания алгоритма.

4. Распараллеливание численного алгоритма

При параллельной реализации алгоритма очень важно выбрать оптимальный способ распределения нагрузки между процессорами, который определяется особенностями самого алгоритма, архитектурой вычислительной системы, количеством доступных для расчета процессоров, а также соображениями физического и вычислительного характера.

Рассмотрим особенности разработки параллельных программ, а также оценим ускорение и эффективность при одномерной и двумерной декомпозиции сеточной области. Схема расчетной области представлена на рис. 2.

Непосредственно область расчета $(2 \leq x \leq N_x + 1) \times (2 \leq y \leq N_y + 1)$ окаймлена по периметру фиктивными ячейками вследствие используемого расчетного шаблона и для обеспечения второго порядка аппроксимации граничных условий.

4.1. Одномерная декомпозиция

В случае одномерной декомпозиции расчетная область разделяется на блочные столбцы или строки (совокупности узлов расчетной сетки, попавших на один процессорный элемент) по одной из горизонтальных координат, выбор которой определяется особенностями хранения данных в оперативной памяти. В результате каждому вычислительному процессору предоставляется участок подстилающей поверхности и столб атмосферы над ним. На этапе инициализации процессы получают информацию о физических параметрах своей подобласти (метеорологические данные, параметры подстилающей поверхности, данные об источниках и т.д.) и подготавливаются к вычислениям.

При расчете приграничных значений в силу используемого разностного шаблона («расширенный» крест – рис. 3) процессы нуждаются в данных, которые находятся в локальной памяти соседних процессов, поэтому возникает необходимость обеспечения обменов данными из приграничных ячеек между соседними процессами в течение всего времени расчета. Рассмотрим пример декомпозиции сеточной области в случае использования двух процессоров (нулевого и первого), представленный на рис. 4. Вдоль горизонтального направления Ox , по которому производится декомпозиция, выполняется перенумерация узлов сетки сле-

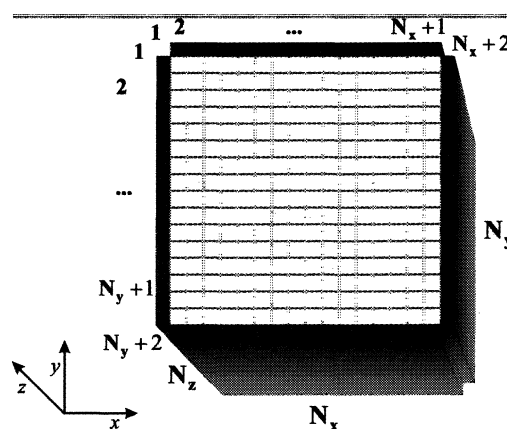


Рис. 2. Схема расчетной области

дующим образом. Нулевой вычислительный процесс ведет расчеты в подобласти шириной $Pm_0 = N_x/2$ с нумерацией узлов по оси Ox со второго до узла с номером $N_x/2 + 1$ (под делением подразумевается целочисленная операция).

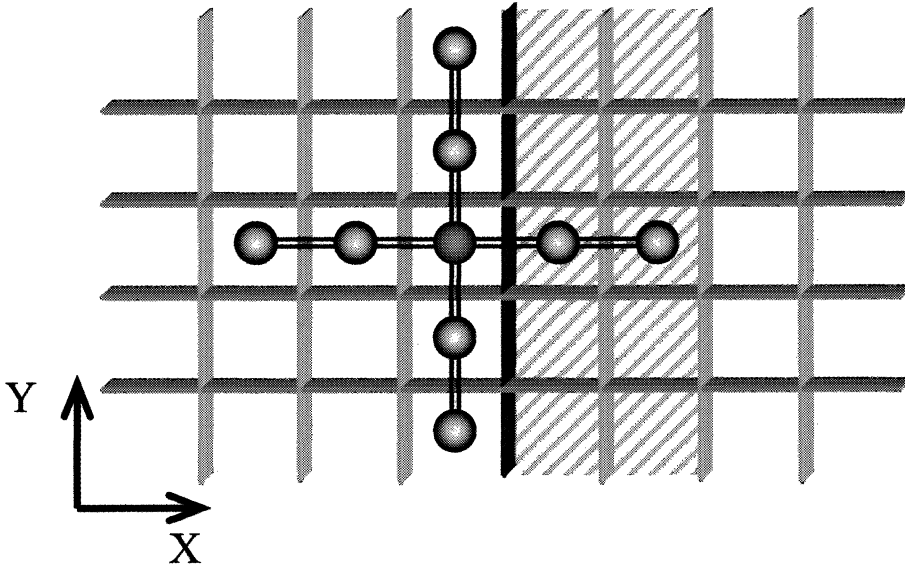


Рис. 3. Вычислительный шаблон разностной схемы вблизи границы раздела области на подобласти

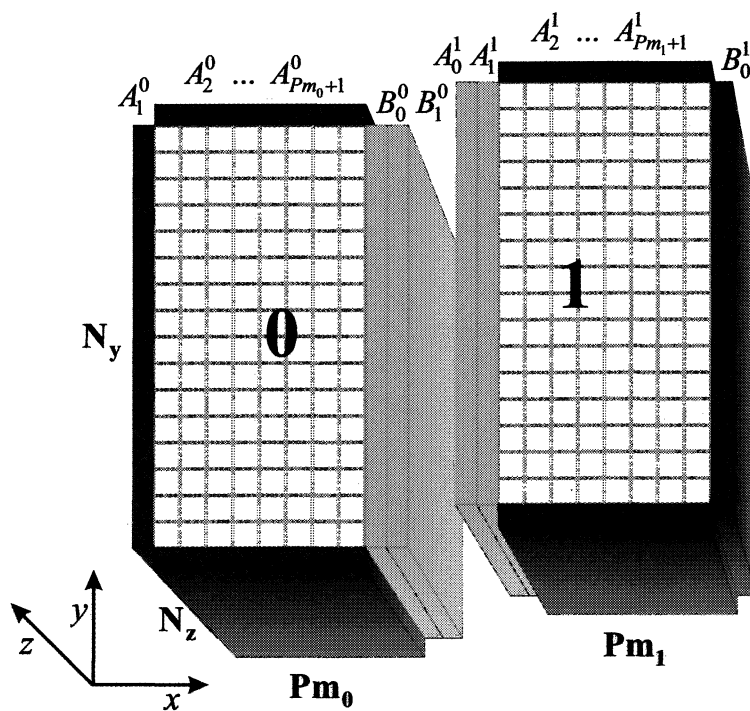


Рис. 4. Схема одномерной декомпозиции параллельной реализации явно-неявного метода на примере двух процессоров

Вычислительная область нулевого процесса ограничивается справа двумя фиктивными сечениями, в которые заносятся данные, рассчитываемые процессом с номером на единицу большим (первым процессом). Таким образом, область, с которой работает нулевой процессор, состоит из $Pm_0 + 3$ сечений с нумерацией от $A_0^0 = 1$ до $B_1^0 = Pm_0 + 3 = N_x/2 + 3$. Аналогичным образом, расчетная область первого процессора, состоит из $Pm_1 + 3$ сечений с нумерацией от $A_0^1 = N_x/2$ до $B_1^1 = Pm_1 + 2 = N_x + 2$ рис. 4.

В общем случае, при декомпозиции на p процессов ширина расчетной области для любого j -ого процесса, имеет вид:

$$Pm_j = \frac{N_x}{p}. \quad (3)$$

Здесь также подразумевается целочисленное деление. В случае, если N_x не делится нацело на число используемых процессоров p , то оставшиеся от деления полосы в количестве $N_x - N_x/p$ дораспределяются по процессам, т.е. часть процессов имеет ширину расчетной области $Pm_j = N_x/p$, а оставшиеся – $Pm_j = N_x/p + 1$. При этом, естественно, выполняется условие:

$$N_x = \sum_{j=0}^{p-1} Pm_j. \quad (4)$$

Первоначально процедура обмена сеточными значениями искомой функции между соседними (по направлению декомпозиции расчетной области) процессами была реализована при помощи двух пар последовательных блокирующихся операций MPI_SENDRECV. Во время первой серии операций каждый процессор передает свои правые приграничные сечения, в данном случае $A_{Pm_0}^0, A_{Pm_0+1}^0$, процессу с номером на единицу больше и принимает левые граничные сечения A_0^0, A_1^0 от процесса с номером на единицу меньше (рис. 4). Вторая часть передачи данных выполняется в обратном направлении: процессоры передают левые приграничные сечение A_2^1, A_3^1 своим предыдущим по номерам процессам и принимают правые граничные сечения B_0^0, B_1^0 от последующих по номерам процессоров [6]. Обмены осуществляются на каждом временном шаге после расчета новых значений концентраций в подобласти. При этом индекс пересылаемого массива концентраций, соответствующий координате, по которой производится разбиение области, следует делать последним, поскольку это обеспечивает хранение пересылаемых элементов в области памяти последовательно и помогает получить более простой и быстрый доступ к ним [6].

Такой подход легко реализуется и гарантированно обеспечивает синхронизацию между одновременно выполняемыми процессами при расчете [2]. В то же время он не является оптимальным, поскольку каждый процесс вынужден бездействовать до момента завершения обменов, т.е. пока все процессорные элементы не получат отправленные им сообщения.

Устранить указанный выше недостаток можно используя неблокирующиеся или асинхронные операции обмена MPI_ISEND и MPI_Irecv. В этом случае операции получения и отправки сообщений идут во время расчета и не требуют ожидания их завершения.

4.2. Двумерная декомпозиция

Двумерная декомпозиция предполагает лучшую масштабируемость задачи, решаемой конечно-разностными или конечноэлементными методами на многопроцессорных вычислительных системах, поскольку такой подход позволяет задействовать большее число процессоров. Так, при некотором ограничении на ширину обрабатываемой сеточной области при одномерном разбиении можно использовать p процессоров, а при двумерном – p^2 . Теоретиче-

ски при увеличении числа процессоров и заданной размерности задачи время на пересылку будет сокращаться. Тогда, начиная с некоторой размерности и некоторого числа процессоров, для данной задачи более эффективным является двумерное разбиение области [6].

Двумерное разбиение можно рассматривать как два одномерных разбиения, выполненных независимо вдоль координатных направлений Ox и Oy на p_x и p_y ($p_x \times p_y = p$) процессоров соответственно рис. 5.

Реализация двумерной декомпозиции с использованием стандарта MPI [2] существенно отличается от одномерной. Во-первых, необходимо организовать двумерную топологию одновременно выполняемых процессов. В данной работе выбрана декартова топология. После инициализации MPI и определения числа действующих процессоров вызывается процедура `MPI_Dims_Create`, подбирающая оптимальные параметры $p_x \times p_y = p$ для двумерной декомпозиции, используя которые процедура `MPI_Cart_Create` создает декартову топологию с перенумерацией процессов. Далее `MPI_Comm_Rank` и `MPI_Cart_Shift` позволяют определить новый номер процесса и новые номера соседних процессоров уже в декартовой топологии. После этого вычисляются размеры подобластей для каждого процесса. Такой подход универсален и позволяет организовать вычисления на любом четном числе процессоров, но для сбалансированного распределения нагрузки рекомендуется выбирать p , удовлетворяющее условию:

$$p_x = p_y = \sqrt{p}.$$

Во-вторых, в двумерной декомпозиции более сложной является реализация межпроцессорных обменов. Если в одномерном случае всегда можно выбрать направление декомпозиции таким образом, что элементы трехмерного массива концентрации вдоль границы будут располагаться в памяти последовательно друг за другом, что, несомненно, будет удобным для формирования пересылаемого сообщения, то при двумерной декомпозиции добиться этого для всех направлений, по которым проводится декомпозиция, не представляется возможным. Поэтому для организации обменов при помощи процедуры `MPI_Type_Hvector` создаются новые типы данных – трехмерные массивы, представляющие собой сечения под-области, выполненные плоскостями $X = \text{const}$ и $Y = \text{const}$ (h_vector и v_vector (рис. 5)), с размерами $(N_z, 1, N_y/p_y)$ и $(N_z, N_x/p_x, 1)$. Пересылка данных между процессорами осуществляется такими блоками при помощи блокирующих операций обмена `MPI_SENDRECV`.

В-третьих, при двумерной декомпозиции непросто осуществить сбор решения на одном процессорном элементе. Для сбора решения на одном процессорном элементе, например, перед выдачей в файл процессы формируют одномерные массивы данных и пересылают процессорному элементу с номером «0», который собирает полученные данные и вновь их переписывает в соответствующем порядке в трехмерный массив.

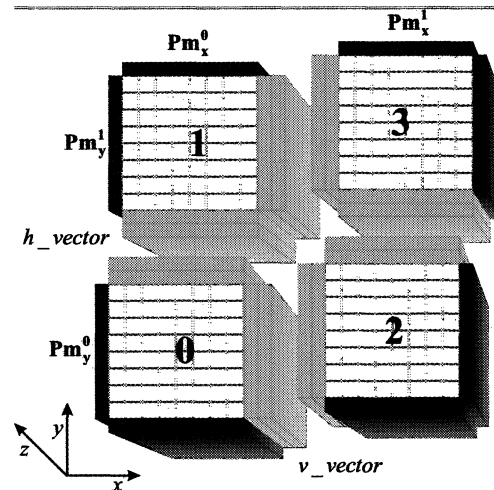


Рис. 5. Схема двумерной декомпозиции параллельной реализации явно-неявного метода на примере четырех процессоров ($p = 4$, $p_x = 2$, $p_y = 2$)

5. Ускорение параллельной программы

В работе проведено экспериментальное исследование ускорения параллельной программы по отношению к последовательной и ее эффективность. С этой целью была проведена серия расчетов на кластере ТГУ СКИФ Cyberia при следующих условиях: период моделирования 1 час, вычислительная сетка $100 \times 100 \times 30$ узлов, кинетическая схема химических и фотохимических реакций – GRS [9]. Для обеспечения сбалансированной нагрузки и достижения тем самым наилучшей производительности расчеты проводились с использованием такого числа процессоров, чтобы количество узлов сетки расчетной области, обрабатываемых каждым процессорным элементом, было одинаковым. Для одномерной декомпозиции использовалось 1, 2, 4, 10, 20, 25 и 50 процессоров вычислительного кластера, для двумерной – 1, 2, 4, 16, 25, 64. Графики достигнутого ускорения представлены на рис. 6.

Численное решение используемых в модели уравнений переноса и химических превращений представляет собой достаточно трудоемкую в вычислительном плане задачу, поэтому доля временных затрат на пересылки в общем времени работы программы незначительна. В результате при использовании малого числа процессоров (2 или 4) наблюдается практически линейное равное для обеих конфигураций ускорению. Действительно, при использовании 2-х процессоров двумерная декомпозиция сводится к одномерной и ни чем от нее не отличается.

При задействовании десяти и более процессоров ситуация становится более определенной. При использовании блокирующихся операций при увеличении числа межпроцессорных обменов увеличивается время простоя процессоров в ожидании завершения передачи сообщения. Эффективность одномерной конфигурации снижается, что особенно отчетливо видно на фоне более высокой производительности алгоритма с двумерной декомпозицией.

При двумерной декомпозиции увеличение числа процессов для решения задачи приводит к уменьшению размера пересылаемого сообщения при неизменном числе обменов на каждый процессор (общее количество обменов растет вместе с числом задействованных процессоров), поэтому производительность продолжает расти. При использовании 64 процессоров ускорение составляет 54, а эффективность соответственно 0,84.

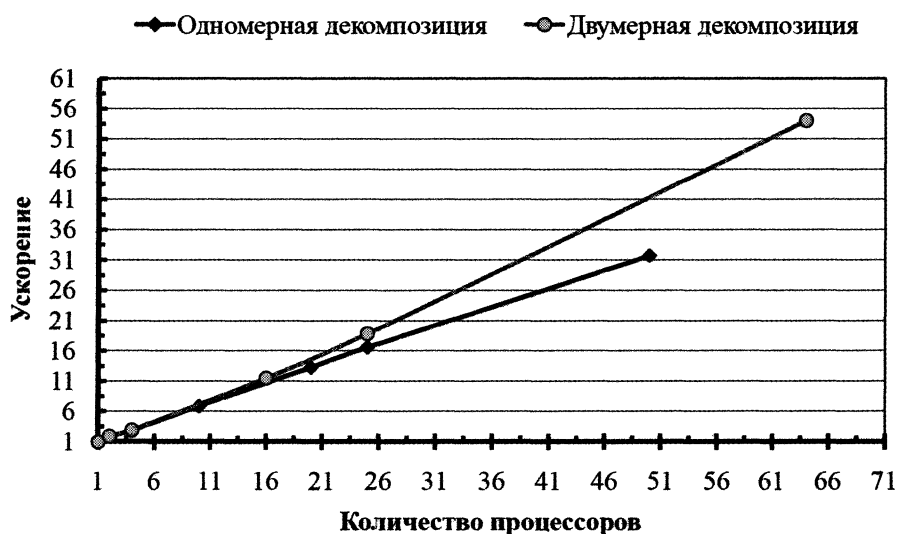


Рис. 6. Ускорение параллельной программы для различных вариантов декомпозиции

Таким образом, для обеспечения высокой производительности параллельной программы с двумерной декомпозицией на кластере ТГУ СКИФ Cyberia принципиальное значение имеет размер пересылаемого сообщения (количество пересылаемых элементов), а не общее количество обменов.

Вычислительная система ТГУ СКИФ Cyberia собрана из двухпроцессорных узлов и сконфигурирована так, что при запуске задачи в стандартном режиме процессы распределяются по принципу минимизации количества работающих узлов, т.е. задействуются оба процессора на узле. Такой подход способствует экономии ресурсов, но не оптимален с точки зрения быстродействия, поскольку в этом случае оба процессора на одном узле используют одну сетевую карту и один канал связи, а также делят между собой оперативную память. Это, прежде всего, затрудняет коммуникационные обмены между процессами, что в конечном итоге, сказывается на производительности вычислений.

При помощи специальных директив ОС Linux возможно использование в параллельных вычислениях только одного процессора на узле. Проведенная серия вычислений с использованием только одного и двух процессоров на узле показывает, что эффективность рассматриваемых способов декомпозиции сеточной области в этом случае возрастает (см. пунктирные кривые на рис. 7). Особенно заметен прогресс для одномерной декомпозиции, эффективность которой увеличивается на 30 – 45 %. Причина кроется в следующем. При синхронных обменах оба процессора на узле вынуждены одновременно использовать один канал связи, следовательно, скорость обменов уменьшается примерно в 2 раза. В случае запуска программы только на одном процессоре на узле этой проблемы нет, так как нет конкурента, претендующего на сетевые ресурсы. Двумерная конфигурация также показывает более высокие результаты, эффективность достигает 0,95. Но наибольший прирост производительности (20 – 30 %) наблюдается при использовании 4–25 процессоров, когда размеры пересылаемых блоков значительны, и двухпроцессорная конфигурация вычислительного узла заметно замедляет передачу данных другим вычислительным узлам.

Таким образом, использование двухпроцессорных вычислительных узлов с одной сетевой картой на узле сужает канал передачи сообщений и уменьшает скорость обменов при использовании блокирующихся операций, особенно при одномерной декомпозиции. Возможно, для конструирования высокоэффективной параллельной программы следует использовать асинхронные обмены, которые более рационально используют коммуникационную среду. При обеспечении высокой скорости передачи сообщений эффективность разных подходов при организации межпроцессорных обменов примерно одинакова. Но и в этом случае предпочтительнее использовать более масштабируемую двумерную декомпозицию, позволяющую получить решение за минимальное время. Так, один час моделирования на 64 процессорах выполняется за 21 секунду, а на одном – за 19 минут.

Таким образом, в данной работе проведено исследование эффективности одно- или двумерной декомпозиции расчетной области для распараллеливания алгоритма решения системы адвективно-диффузионно-кинетических уравнений в математической модели переноса примеси. Двумерная декомпозиция производится по двум горизонтальным координатам, одномерная – по одной. Межпроцессорная передача данных основана на синхронных операциях обмена. Выявлено, что производительность параллельной программы с двумерной декомпозицией выше, чем с одномерной. А ее эффективность начинает расти при использовании 16-ти и более процессоров. При одномерной декомпозиции эффективность с увеличением доступных для вычислений процессоров наоборот падает.

Применение двухпроцессорных вычислительных узлов с одним каналом передачи сообщений уменьшает скорость обменов при использовании блокирующих операций при рассмотренных способах декомпозиции. Применение специальных директив для задействования при вычислениях только одного процессора на узле позволяет увеличить производи-

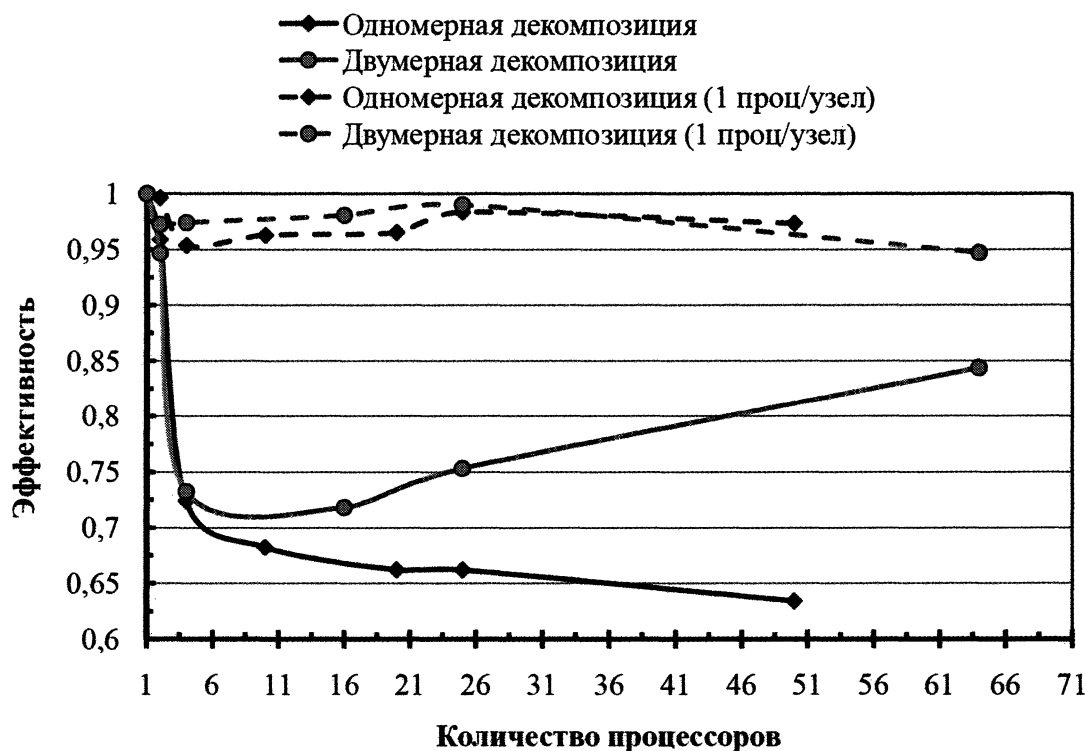


Рис. 7. Эффективность параллельной программы для различных вариантов декомпозиции

тельность параллельной программы. В данном случае прирост эффективности программы с одномерной декомпозицией составляет 30 – 45 %, с двумерной – 20 – 30 %.

Данная модель и разработанный алгоритм решения будут использованы в создаваемой в Томском государственном университете информационно-вычислительной системе для контроля и прогноза качества воздуха над городом Томском. Высокая эффективность численного алгоритма открывает широкие возможности для модификации модели: укрупнения расчетной области и увеличения разрешения сетки, включения более сложных механизмов химических реакций и других усовершенствований.

Статья выполнена при поддержке РФФИ грант № 07-05-01126-а и рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2009»

Литература

1. Dabdub, D. Parallel Computation in Atmospheric Chemical Modeling / D. Dabdub, J.H. Seinfeld // Parallel Computing. – 1996. – V. 22. – P. 111 – 130.
2. Gropp, W. Using MPI-2: Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface / W. Gropp, E. Lusk, A. Skjellum. – Cambridge, MA: MIT Press, 1999.
3. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
4. Есаулов, А.О. Использование параллельных вычислений при моделировании мезомасштабных атмосферных процессов / А.О. Есаулов // Труды Второй Сибирской школы-семинара по параллельным вычислениям. – Томск, 2004. – С. 100 – 107.

5. Беликов, Д.А. Исследование образования вторичных загрязнителей (озона) в атмосфере г. Томска / Д.А. Беликов, А.В. Старченко // Оптика атмосферы и океана. – 2005. – Т. 18, № 05 – 06. – С. 435 – 443.
6. Толстых, М.А. Особенности использования MPI для распараллеливания задач математической физики на вычислительных системах с невысокой скоростью обменов между процессорами / М.А. Толстых // Сибирская школа-семинар по параллельным вычислениям. – Томск, 2006. – С. 99 – 125.
7. Беликов, Д.А. Численная модель турбулентного переноса примеси в пограничном слое атмосферы / Д.А. Беликов, А.В. Старченко // Оптика атмосферы и океана. – 2007. – Т. 20, № 8. – С. 667 – 673.
8. Morison, R.P. Atmospheric modeling of air pollution as a tool for environmental prediction management / R.P. Morison, L.M. Leslie, M.S. Speer // Meteorology and atmospheric physics. – 2002. – V. 80. – P. 141 – 151.
9. Hurley, P.J. The Air Pollution Model (TAPM) Version 2 / P.J. Hurley // CSIRO Atmospheric Research Technical Paper. – 2002. – N. 55. – P. 37.
10. Короленок, Е.В. Моделирование приземных концентраций озона городского региона / Е.В. Короленок, О.В. Нагорнов // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14, № 4. – С. 80 – 94.
11. Perego, S. Metphomod – a Numerical Mesoscale Model for Simulation of Regional Photosmog in Complex Terrain: Model Description and Application during Pollumet 1993 (Switzerland) / S. Perego // Meteorology and Atmospheric Physics. – 1999. – V. 70. – P. 43 – 69.
12. Старченко, А.В. Численная модель для оперативного контроля уровня загрязнения городского воздуха / А.В. Старченко, Д.А. Беликов // Оптика атмосферы и океана. – 2003. – Т. 16, № 7. – С. 657 – 665.
13. Van Leer, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. Part IV: A new approach to numerical convection / B. Van Leer // J.Comput. Phys. – 1977. – V. 23. – P. 276 – 299.
14. Электронный ресурс. Режим доступа (<http://parallel.ru/>).

Кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования,
Томский государственный университет
dimon@math.tsu.ru, starch@math.tsu.ru

Поступила в редакцию 2 марта 2009 г.

ВИРТУАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СРЕДЫ: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НА GRID ПОЛИГОНАХ

В.М. Волохов, Д.А. Варламов, Н.Ф. Сурков, А.В. Пивушков

VIRTUAL COMPUTING ENVIRONMENTS: UTILIZATION ON THE GRID POLYGONS

V.M. Volokhov, D.A. Varlamov, N.F. Surkov, A.V. Pivushkov

Статья посвящена анализу применимости различных технологий виртуализации в распределенных GRID средах, включая создание виртуальных вычислительных и сетевых ресурсов и динамически формируемых виртуальных программных «контейнеров» с поддержкой различных параллельных программных сред. Разработанные методы позволяют запускать различные параллельные приложения на произвольных ресурсных узлах GRID полигонов. Приведен пример подготовки и запуска квантово-химического пакета GAMESS-US в распределенной среде gLite на ресурсах полигона EGEE-RDIG.

Ключевые слова: виртуализация, распределенные среды, параллельные вычисления, GAMESS

The article is devoted to the analysis of applying of various virtualization technologies in the distributed GRID environment including creation of the virtual computational and network resources as well as dynamically forming virtual program «containers» with support of various parallel program environments. The worked out methods make it possible to start different parallel supplements on random resource units of GRID polygons. As a case in point, the authors give preparation and launching of quantum-chemical GAMESS-US package in the distributed gLite environment on the basis of the polygon EGEE-RDIG resources.

Keywords: virtualization, distributed environments, parallel computing, GAMESS

Введение

Распределенные вычисления или GRID вычисления являются результатом развития научной концепции создания глобальных вычислительных ресурсов, доступных в любых объемах в любой точке планеты посредством высокоскоростных сетей, в том числе через Интернет. Суть GRID технологий заключается в организации вычислений путем объединения через сеть мощностей многих компьютеров, географически удаленных друг от друга. Сейчас эта технология используется в основном для проведения научных расчетов, при этом ее потенциал оценивается очень высоко. По сути, она имеет стратегический характер, и в будущем GRID вычисления претендуют на то, чтобы стать одним из основных двигателей развития информационных технологий, подобно тому, как такими двигателями стали персональный компьютер и Интернет. Решение многих задач вычислительной химии, таких как моделирование молекулярных структур и их динамики, поведение и энергетика сложных химических реакций, наномоделирование невозможно без применения GRID вычислений.

Например, время расчета поведения нанотрубок, легированных металлами, состоящих из $n \cdot 10^3$ атомов, может достигать 3 – 4 лет для однопроцессорных систем.

На основе опыта работы в различных распределенных вычислительных средах [1 – 3] авторами был сделан вывод, что наиболее существенными препятствиями на пути применения GRID технологий в вычислительной химии являются следующие проблемы:

- гетерогенность доступных вычислительных ресурсов (на уровне архитектур процессоров, операционных систем, сетевых настроек и т.д.);
- необходимость создания для многих ресурсоемких распределенных приложений целой системы из конфигурационных настроек, дополнительных служб, хранилищ данных и прочих компонентов информационно-вычислительной инфраструктуры.

Данные проблемы во многом могут быть преодолены применением интенсивно развиваемых в последнее время технологий виртуализации вычислений на уровне: (а) распределенных ресурсов, (б) виртуальных «контейнеров-приложений» и (в) полнофункциональных виртуальных машин, передаваемых удаленным ресурсам на исполнение. Появление процессоров с поддержкой виртуализации на уровне ядра, интегрированных в материнскую плату гипервизоров, поддерживаемых распространенными операционными системами, развитие технологий быстрой передачи данных, удешевление Интернет-трафика привели в последние два года к «взрывному» росту исследований и рынка ПО виртуализации.

Термин «виртуализация» здесь и далее нами используется в двух основных смыслах: виртуализация вычислительного GRID ресурса и виртуализация вычислительного объекта (ОС, приложение и т.д.), перемещаемого в GRID среде. Потребность в виртуализации для распределенных вычислительных сред продиктована необходимостью создания и поддержки стандартных механизмов взаимодействия между пользователями и вычислительными ресурсами (сервисами), одинаковых со стороны ресурса (поставщика сервисов) и со стороны пользователя.

Спектр использования средств виртуализации и виртуальных машин сегодня очень широк: объединение различных вычислительных и управляющих сервисов на единых физических ресурсах, возможность разработки и тестирования прикладного ПО в различных средах, миграция приложений и служб – все это постоянно продвигает технологии виртуализации вперед. Возможность снизить затраты на приобретение дополнительных физических серверов, электропитание и охлаждение для них, возможность виртуальной изоляции чрезмерно ресурсоемких или потенциально опасных приложений, мобильность и управляемость виртуальных ресурсов и приложений создают ощутимые преимущества для вычислительных центров и обеспечивают создание виртуальной вычислительной инфраструктуры в относительно небольшие сроки.

В настоящее время более 40 фирм и сообществ программистов развивают различные направления виртуализации: разработка виртуальных платформ, виртуализация приложений и служб, средства разработки, управления и сопровождения и т.д. Все типы представлены как коммерческими разработками, так и Open Source проектами. По данным консалтинговых компаний до 40% компаний среднего и крупного бизнеса уже используют или готовы использовать те или иные технологии виртуализации. Применение методов виртуализации ресурсов и приложений для проведения различных расчетов за этот год вышло на лидирующие позиции в области информационных технологий. По оценкам агентства Gartner (<http://www.gartner.com>) технология виртуализации вычислительных объектов и хранилищ данных совместно с виртуализацией приложений поднялась в ежегодной десятке ИТ-технологий с 5-й позиции в top-10 2008 года на первую в top-10 (<http://www.cnews.ru/news/top/index.shtml?2008/10/27/324944>) на 2009 год. Для эффектив-

ного развития GRID технологий в области вычислительной химии авторами были проведены интенсивные исследования применимости различных методов виртуализации к GRID вычислениям.

1. Применение технологий виртуализации в распределенных средах

Авторы поставили целью изучить и применить на реальных расчетах в области вычислительной химии ряд технологий виртуализации, включая:

- создание и применение виртуальных машин на существующих ресурсных узлах входящих в различные распределенные среды. Это позволит: расширить функциональность ресурсных узлов; решать различные прикладные задачи на базе разных программных архитектур; разделять ресурсы; повысить безопасность;
- адаптация прикладного программного обеспечения для работы в составе виртуальной динамически формируемой параллельной среды;
- создание образа виртуальной машины со встроенным прикладным пакетом сложной конфигурации для запуска на удаленных ресурсах с использованием GRID инфраструктуры.

1.1. Создание виртуальных вычислительных ресурсов в виде ВМ (виртуальных машин) на базе существующих физических узлов

Для работы многих приложений требуется создание целой системы из служб, сетей, хранилищ данных и прочих компонентов современной информационно-вычислительной инфраструктуры. Создание такой системы иногда невозможно на ресурсном узле из-за несовместимости ПО. Для ряда пакетов ПО и сервисов нужно создавать комплексные среды с необходимым набором приложений и политиками безопасности. Ключевыми требованиями являются скорость и простота предоставления таких сред, их тщательная изоляция друг от друга, квотирование вычислительных ресурсов для каждой среды, независимость от базовых настроек узла. Зачастую все это необходимо делать без прерывания работы узлов и остановки вычислительной среды, особенно в рамках «production farms», т.е. ресурсных узлов, не допускающих остановок и переконфигурирования. Данная задача может быть решена путем установки и настройки виртуальных машин на существующих ресурсных узлах. Они будут обслуживать сервисы и конкретные входящие приложения с наибольшей эффективностью и практически полной безопасностью для инфраструктуры ресурсного узла (включая ОС и прикладное ПО).

Идея использования виртуализации для распределенных вычислений не является новой (в России известны проекты «Дубна-Грид», «SKIF@Home» и т.п.), Однако увеличение производительности узлов и развитие архитектуры процессоров и соответствующего ПО позволило на новом уровне подойти к решению данной проблемы (например, с использованием преимуществ нетипичных параллельных сред в условиях кластеров). Кроме того, авторам неизвестно применение виртуальных машин работающих в роли ресурсных узлов для конкретных распределенных ресурсоемких приложений в области вычислительной химии.

При создании виртуальных машин (ВМ), в качестве ресурса, пользователю может быть предоставлена изолированная виртуальная вычислительная среда, по своим свойствам практически не уступающая физическому серверу, в которой может быть предоставлен любой

вычислительный сервис. Приложения, реализованные в ВМ, в этом случае не зависят как от самой операционной системы, в которой выполняется ВМ, так и от ее окружения. Еще одним преимуществом такой виртуализации является полное отделение конкретной службы или программы от внешней среды, а также и внешней среды от нее. Это возможно благодаря использованию дополнительного слоя программного обеспечения – виртуального оборудования, позволяющего выполнять обычное приложение так, как если бы оно было запущено на отдельном компьютере. Возможно создать образ виртуальной машины с предустановленной операционной системой и полностью сконфигурированными приложениями, нацеленной на решение конкретных задач. Этот образ может быть запущен на удаленном узле. Для этого не требуется перенастройки физического узла под конкретные задачи. Возможность подготовки и запуска образа виртуальной машины существенно облегчает адаптацию прикладного ПО для работы в распределенных средах.

Большим преимуществом виртуальной машины является возможность ее переноса, при необходимости, с одного сервера на другой и толерантность к аппаратным сбоям. В случае поломки одного физического узла копия виртуальной машины легко запускается на другом. Более того, в настоящее время ПО виртуализации позволяет перенести работающую виртуальную машину с одного физического узла на другой.

Для создания и применения виртуальных ресурсов авторами было протестировано несколько свободно распространяемых гипервизоров виртуальных машин, среди которых полнофункциональные среды Xen (<http://xen.org>, разработка XenSource, Inc.), VirtualBox (<http://www.virtualbox.org>, разработка Innotek Inc. – подразделения Sun Microsystems), VMware (<http://www.vmware.com>, разработка VMware Inc. – свободно распространяемая версия с сокращенной функциональностью), а также отдельной виртуальной машины – QEMU (<http://bellard.org/qemu>).

Изучение выбранного ПО показало схожесть функциональных характеристик указанных пакетов для поставленных в проекте задач и возможность применения всех их в распределенных средах. Все они позволяют производить виртуализацию распространенных ОС и осуществлять запуск нескольких виртуальных машин на одном физическом узле.

Для создания рабочих виртуальных машин нами был выбран гипервизор Xen, который входит как компонент в состав ОС Scientific Linux 5 (<https://www.scientificlinux.org>), на ней реализован ресурсный GRID узел ИПХФ РАН [3]. В настоящее время пакет Xen можно установить из репозитория CERN на ОС Scientific Linux 4, являющуюся базовой для платформы gLite.

Для более эффективной оценки возможностей одна из рабочих станций ресурсного узла GRID ИПХФ была модернизирована с наращиванием RAM до 8 Гб, установкой дополнительных дисковых накопителей (по одному на виртуальную машину (ВМ)) и сетевых адаптеров. На нее была установлена ОС Scientific Linux 5.1 со встроенной поддержкой гипервизора Xen (версия 3.1) и пользовательского интерфейса к нему. В дальнейшем созданные на ней виртуальные машины запускались на не модернизированных узлах ресурсного центра ИПХФ.

На данной машине были созданы образы следующих виртуальных машин: ОС Scientific Linux (версия 4.6), Ubuntu (8.10), AltLinux, а также, в качестве тестовой, Microsoft Windows XP. Тестирование машин показало их полную работоспособность. Производительность виртуальных машин была сопоставима с производительностью базовой ОС. Для дальнейших работ были оставлены виртуальные машины на базе Scientific Linux 4.6 и Linux Ubuntu 8.10. Данные виртуальные машины были сконфигурированы как расчетные узлы (worknodes) для сред gLite и Unicore соответственно. Виртуальная машина, сконфигурированная как 2-х процессорный рабочий узел с поддержкой PBS Torque и MPI для ресурсного узла gLite, была запущена на этой же физической машине и введена в список рабочих узлов на Computing

Elements ресурсного узла gLite, после чего с ее использованием был просчитан ряд тестовых и практических задач. С точки зрения внешнего пользователя, никаких отличий от физического узла в использовании виртуальной машины не наблюдалось, т.е. в составе ресурсного узла произошло добавление расчетного узла с примерно теми же вычислительными параметрами, что и на физических машинах.

Виртуальные машины на основе ОС Linux Ubuntu 8.10 были сконфигурированы для работы в качестве расчетных узлов созданного в ИПХФ ресурсного сайта СКИФ–Полигона на базе middleware Unicore [4]. Созданные виртуальные машины были перенесены на расчетные узлы кластера ИПХФ (ОС Scientific Linux 4.5, входят в состав ресурсного GRID узла gLite) и запущены там под управлением установленного гипервизора Xen. Проведенное тестирование показало их полную работоспособность в данной обстановке. Был проведен эксперимент по запуску VM Ubuntu на основе вышеупомянутой физической машины с выполнением базового сервиса ресурсного узла Unicore – TSI (Target system interface).

В настоящее время в составе ресурсного сайта Unicore (полигон СКИФ–Полигон, <https://unicorgw.icp.ac.ru:8080>) работают две виртуальные машины в качестве расчетных узлов на базе физических машин, входящих, в свою очередь, в состав ресурсного узла gLite. А на базе физической машины, поддерживающей базовые компоненты ресурсного узла Unicore (Gateway; UAS, Unicore atomic services; XUADB, Unicore user database) была протестирована работа изолированной VM с поддержкой базового сервиса TSI.

Таким образом, показана возможность установки, запуска и работы виртуальных машин с поддержкой различных сервисов на существующих физических узлах без значительного вмешательства в рабочее пространство распределенных и/или параллельных сред ресурсных узлов. Это дает возможность разворачивать распределенные вычислительные полигоны на уже существующих вычислительных кластерах без кардинальной перенастройки их аппаратно-программной конфигурации, что особенно важно для постоянно работающих центров класса «production farm».

В настоящее время нами проводится изучение версии 2.0, выпущенной в октябре 2008 г., гипервизора VirtualBox, для которого заявлена существенно улучшенная, по сравнению с предыдущей версией, функциональность и взаимодействия с аппаратными компонентами.

Среди обнаруженных проблем виртуализации следует отметить две основные. Первая относится к учету ресурсов физического узла и мониторингу выполняемых ресурсным узлом задач. Учет ресурсов, востребованных VM, пока проводится на уровне гипервизора и не вполне корректно оценивается внешним мониторингом распределенной среды gLite, что может вести к недоучету ресурсов и завышенными ожиданиями со стороны входящих задач. Заметим, что в планах развития большинства гипервизоров заявлена возможность решения этих проблем. Вторая проблема связана со сложностью привязки изученных нами виртуальных машин к нескольким физическим сетевым интерфейсам, что может накладывать ограничения на работу VM внутри ресурсных узлов со сложной топологией интерконнекта.

1.2. Создание виртуального «контейнера» с образом среды исполнения параллельного приложения

Одним из вариантов виртуализации прикладного программного обеспечения для работы в распределенных средах становится виртуальное приложение, которое в виде виртуального «контейнера» доставляется на ресурсный узел вместе со всеми конфигурационными настройками, относящимися к операционной системе и приложению, и не требует процедуры предварительной установки. При этом отсутствуют конфликты приложения с другими, уже установленными на узле программами и даже с другими экземплярами этого же приложения. Суть виртуализации приложения заключается в создании персональной копии

необходимой части системных файлов и настроек операционной системы и доставки приложения совместно с этой информацией в качестве GRID задачи с последующим запуском в изолированном «контейнере».

В рамках вычислительной химии данная концепция становится весьма востребованной, поскольку крупные пакеты (типа GAMESS, Gaussian, Dalton, CPMD) требуют весьма значительной настройки ОС всех узлов участвующих в расчете. Применение таких «контейнеров» позволяет передавать заранее настроенную среду как единое задание, не требующее дополнительного конфигурирования и сложной процедуры установки и настройки, производимых, как правило, вручную администратором кластера.

Авторами был разработан метод создания виртуальных «контейнеров», запускаемых стандартными средствами middleware на удаленном ресурсном узле распределенной среды. В настоящее время этот метод применим для исполнения на узлах под ОС Linux.

Участниками проекта был проведен анализ процедуры исполнения типичного параллельного задания на ресурсном узле GRID, позволивший определить требования к создаваемому виртуальному образу среды исполнения, а также принципиальную возможность динамической организации среды исполнения для тестируемых типов ресурсов. Также был сделан анализ систем параллельного программирования для выбора оптимального виртуального образа среды исполнения параллельного приложения. В результате проведенного анализа в качестве базового пакета для разработки виртуального образа среды исполнения параллельного приложения был выбран пакет Mprich-2.

В настоящее время в качестве распределенных ресурсов GRID используются, как правило, узлы в виде кластеров рабочих станций с операционной системой и некоторым набором приложений, настроенных для работы в среде GRID и специфичных для каждого из этих распределенных ресурсов. Для проведения параллельных вычислений требуется наличие установленной на ресурсных узлах какой-либо системы параллельного программирования (например, MPI, OpenMP и др.), причем единые стандарты на установку данного вида программного обеспечения отсутствуют. Поэтому на ресурсных узлах GRID среды, как правило, можно ожидать наличия только библиотек стандарта MPI-1. Использование параллельных приложений в настоящее время в среде GRID крайне ограничено как возможностями брокера ресурсов, который не распознает тип параллельного задания, так и отсутствием предоставленных на кластерах необходимых Runtime библиотек, а также отсутствием стандартов на размещение таких библиотек. Поэтому запуск параллельного сложно сконфигурированного задания на узле распределенной среды обычно неэффективен, либо неудачен.

Проведенная работа была направлена на преодоление указанных недостатков и особенностей среды GRID для запуска в ней сложно сконфигурированных параллельных приложений.

Был проведен анализ предоставляемых псевдопользователям (так называемым «mapped users») распределенных сред прав доступа к ОС расчетного узла, которые определяют, в свою очередь, возможность работы внешнего задания с локальной файловой системой, другими приложениями, исполняемыми модулями и утилитами. Для проведения такого анализа был самостоятельно разработан ряд оригинальных тестовых примеров, испытания которых позволили определить порядок запуска поступающих от брокера ресурсов на ресурсные узлы заданий, в том числе:

- присваиваемые заданиям имена пользователей и их права;
- создаваемые временные директории и требуемые файловые иерархии;
- доступность различных системных средств исполнения заданий (параллельные среды, доступ к очередям PBS и т.п.).

За 10 лет работы вычислительного центра ИПХФ РАН был накоплен большой опыт использования различных систем параллельного программирования – MPI, Linda, OpenMP и др. Наиболее широко использовались различные версии свободно распространяемого (Open Source) пакета Mpich, разработанного Argonne National Laboratories.

На основе версии Mpich-2 в вычислительном центре ИПХФ РАН в 2007–2008 гг. для кластера, работающего под ОС Scientific Linux, из исходных текстов была скомпилирована (после соответствующей доработки авторами) модифицированная библиотека MPI.

Основная причина использования менее распространенной версии стандарта MPI-2 заключается в том, что, как показали проведенные тесты, стандарт MPI-1 не позволяет создать полностью однородную среду исполнения задания на узлах кластера, несмотря на ряд дополнительно разработанных сторонних программных пакетов. Стандартом MPI-2 однородная среда исполнения задания на всех процессорах всегда рассматривается как базовая. Поэтому в качестве базового пакета для разработки виртуального образа среды исполнения параллельного приложения был выбран Mpich-2.

При создании виртуального образа среды исполнения параллельного приложения было принято решение ввести (на нынешней стадии разработки) ряд ограничений/допущений для ресурсных узлов:

- использована аппаратная архитектура x86, как наиболее распространенная на ресурсных узлах российского сегмента GRID;
- на расчетных узлах GRID ресурса используется операционная система на базе клонов RedHat (Scientific Linux, Fedora, CentOS и т.п.);
- согласно стандарту настройки ресурсных узлов GRID для коммуникации между узлами используется интерфейс TCP/IP и беспарольный доступ по ssh;
- некоторые версии пакетов с целью повышения производительности вычислений имеют привязку к сетевым продуктам конкретных производителей и используют поставляемые этими производителями драйверы. На этом этапе работ такие версии, несмотря на их высокую эффективность, не были использованы.

Заметим, что принципиальных ограничений на работу в более «расширенных» условиях распределенных сред нет, включая переход на 64-битную среду.

В процессе тестирования было выбрано два потенциальных статических места инсталляции библиотек – по месту загрузки исполняемого приложения и использование общедоступной директории /tmp. Разработка системы динамического компилирования и инсталляции библиотек на данном этапе не рассматривалась.

В соответствии с указанными выше требованиями был сформирован перемещаемый программный пакет MPI-2, тестирование которого в локальных условиях на GRID кластере ИПХФ РАН с использованием тестовых примеров показало его работоспособность.

Полученный пакет в дальнейшем использовался в качестве базового прототипа для разработки виртуального образа среды исполнения конкретных параллельных приложений.

В качестве первичного тестового приложения была использована программа вычисления числа π ('`spi.c`') из пакета Mpich-2, правильность работы которой легко проверяется в параллельной среде с различным количеством узлов. Исходная тестовая программа была доработана с учетом особенностей запуска прикладных приложений, был получен ее исполняемый модуль и скрипты запуска с использованием библиотек Mpich-2.

Тестовый модуль и перемещаемый пакет Mpich-2 были собраны и упакованы в единый пакет, для запуска которого в среде GRID (gLite) были разработаны низкоуровневые скрипты. Отметим, что нет принципиальных препятствий для формирования такого же пакета

для работы в условиях других распределенных сред. Сейчас авторами тестируется среда Unicore.

С учетом возможного дальнейшего развития исследований была принята следующая схема запуска: на удаленный ресурсный узел сети GRID через брокер ресурсов передается главный скрипт и упакованный модуль, содержащий как исполняемые файлы, так и необходимые MPI библиотеки, т.е. динамически сформированный виртуальный «контейнер». После доставки «контейнера» на ресурсный узел проводится следующая последовательность шагов:

- 1) сбор начальной информации о текущем ресурсном узле GRID (имена доступных хостов);
- 2) распаковка модуля в рабочей директории и перемещение библиотек в локальную директорию /tmp на текущем локальном узле (ТЛУ);
- 3) подготовка файла mpd.conf на ТЛУ для запуска MPI сервера mpd;
- 4) переопределение на ТЛУ текущего значения ряда переменных среды окружения для GRID пользователя;
- 5) запуск сервера mpd (с правами пользователя) на стартовом узле и проведение его runtime тестирования;
- 6) сбор информации о доступных узлах и их текущем состоянии. Список свободных узлов собирается в файл mpd.hosts, необходимый для запуска «кольца» серверов mpd;
- 7) распределение необходимых библиотек по списку свободных узлов (используется беспарольный доступ по протоколу ssh);
- 8) запуск «кольца» серверов mpd на ресурсном узле GRID и проведение его тестирования;
- 9) запуск параллельного приложения и его работа как обычного распределенного задания с последующей передачей результатов на брокер ресурсов и затем – пользователю;
- 10) удаление всех библиотек и созданных временных файлов со всех узлов.

Работа тестового варианта созданного «контейнера» была отлажена локально на ресурсном узле GRID ИПХФ РАН. Дальнейшее успешное тестирование было проведено на удаленных ресурсах полигона EGEE-RDIG (<http://www.egee-rdig.ru>) в рамках BO RGSTEST (узлы НИИЯФ МГУ и ИПХФ – используемый в роли удаленного узла) с запуском задания через брокер ресурсов RDIG.

1.3. Запуск реального параллельного приложения (GAMESS-US) в составе виртуального «контейнера»

Широко используемые в настоящее время в вычислительной химии пакеты прикладных программ (например, GAMESS, Gaussian, CPMD, NAMD и др.) требуют обязательной настройки большого количества переменных окружения операционной системы до запуска параллельного приложения на каждом из использующихся процессоров. Такая настройка обычно осуществляется в два этапа:

- 1) при установке прикладного ПО системным администратором на каждом расчетном узле ресурсного центра на уровне операционной системы;
- 2) при настройке соответствующих скриптов запуска задания для каждого пользователя согласно «Руководству пользователя» как приложения, так и системы параллельного программирования.

Такой традиционный подход со статическим линкованием необходимых библиотек к исполняемому модулю не способен создать полностью работоспособное перемещаемое сложно сконфигурированное параллельное задание на произвольном ресурсе среды GRID.

Выбранный выше подход по созданию виртуального образа среды исполнения на основе

перемещаемого пакета MPI-2 был применен для компиляции модифицированного пакета исходных кодов GAMESS и показал свою продуктивность.

GAMESS-US (<http://www.msg.ameslab.gov/GAMESS>) – одна из наиболее популярных программ для теоретического исследования свойств химических систем, уступает по известности лишь комплексу Gaussian, позволяет рассчитывать энергию, структуры молекул, частоты их колебаний, а также разнообразные свойства молекул в газовой фазе и в растворе, как в основном, так и в возбужденных состояниях. Основное направление – развитие методов расчета сверхбольших молекулярных систем.

Основные программные модули GAMESS поддерживают параллельный режим вычислений как на многопроцессорных компьютерах, так и на кластерах рабочих станций UNIX.

Работы по распараллеливанию GAMESS начались еще в 1991 году. Однако использование методов передачи сообщений MPI получило применение только с 1999 г., когда в пакете GAMESS была реализована модель интерфейса с распределенным размещением данных (DDI – Data Distributed Interface). Последняя версия интерфейса DDI, которая была оптимизирована для многопроцессорных SMP-архитектур общего вида, особенно работающих с памятью в стиле System V, была выпущена только в мае 2004 г.

В настоящее время практически все *ab initio* методы, включенные в пакет GAMESS, могут использовать параллельные вычисления.

Интерфейс DDI использует в качестве базовой сокетную TCP/IP модель межпроцессорных коммуникаций. Использование такого метода распараллеливания для работы на локальном кластере достаточно эффективно и довольно просто в конфигурации, но при работе в GRID средах возникает ряд принципиальных проблем: а) необходимо заранее явно указывать используемые расчетные узлы (что обычно нереально); б) неправильно оценивается загруженность расчетных узлов (учитывается только первый расчетный узел); в) отсутствует возможность контроля выполнения удаленной задачи средствами распределенного middleware.

Конфигурации же GAMESS с использованием библиотеки MPI авторами пакета разработаны только для ряда мейнфреймов известных производителей (Cray, IBM, SGI). В общем случае конфигурации с MPI не рекомендуются, и желающим предлагается экспериментировать с такими конфигурациями самостоятельно.

В ИПХФ РАН с целью расширения функциональности применения пакета GAMESS в сети GRID была поставлена задача разработки оригинальной конфигурации и сборки из исходных текстов исполняемого файла пакета GAMESS с использованием библиотеки MPI.

MPI (Message-Passing Interface, т.е. интерфейс для передачи сообщений) представляет стандартные спецификации для библиотек передачи сообщений. В ИПХФ РАН длительное время используется реализация Mpich, разработанная в Argonne National Laboratory (<http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpich2>).

Mpich представляет собой переносимую реализацию полных спецификаций MPI для широкого класса параллельных вычислительных средств, включающих кластеры рабочих станций и массивно-параллельных процессоров (MPPs). Mpich содержит, наряду с самими библиотеками MPI, программные средства для работы с программами MPI. Программные средства включают в себя переносимый стартовый механизм, несколько профилирующих библиотек для изучения производительности программ MPI.

Для работы с пакетом GAMESS в среде GRID на ресурсных узлах ИПХФ РАН первоначально была установлена последняя наиболее широко распространенная версия 1.2.7, которая является реализацией стандарта MPI-1. Достоинством данной версии является то, что она явно включает интерфейс Globus2, основанный на Globus Runtime System, что было бы эффективно для запуска Globus заданий. Однако получить работоспособную конфигурацию пакета GAMESS для MPI-1 не удалось по двум основным причинам:

- во-первых – особенности запуска исполняемого задания GAMESS, которая осуществляется скриптом, активизирующем более 150 переменных окружения. На главном узле среда создается правильно, но механизм передачи переменных окружения на подчиненные узлы в библиотеке Mpich стандартно отсутствует. В пакет Mpich был включен безопасный сервер (secure server), одной из задач которого являлась ликвидация этого недостатка. Но из-за неполной совместимости с операционной системой Scientific Linux эту функцию безопасного сервера использовать не удалось. При запуске задания на локальном узле пакет Mpich использует команды оболочки типа '!', eval, exes и др., которые не наследуют среду окружения запускающего процесса.
- во-вторых – особенности реализации команды запуска параллельных заданий mpirun пакета Mpich-1. Запуск заданий на главном и подчиненном узлах существенно различаются – строки команды удаленного запуска (rsh или ssh) на подчиненных узлах дополняются служебными переменными. В результате стандартное расположение строчных аргументов задания GAMESS нарушается и не распознается, что ведет к краху запуска.

С 2002 года стандарт MPI-1 больше не поддерживается Argonne National Laboratory, и выпущена новая версия пакета Mpich, соответствующая стандарту MPI-2, в котором коренным образом изменена система запуска параллельных заданий, и устранены указанные недостатки. Перед запуском задания осуществляется запуск кольца серверов mpd (`<mpd ring>`), одна из задач которых состоит в выравнивании среды окружения на главном и подчиненных узлах. В более общем случае, кольцо серверов может запускаться пользователем root, а остальные пользователи могут использовать это глобальное кольцо. Обычно на узлах GRID пользователю root запрещен любой удаленный доступ между узлами, и, следовательно, каждый псевдопользователь GRID должен запускать собственное локальное кольцо серверов (основанное на использовании непривилегированных портов).

После установки библиотек MPI стандарта 2.0 (версия 1.0.3 пакета Mpich2) была проведена соответствующая модификация конфигурационных скриптов пакета GAMESS (compddi, comp, compall, lked), а также программных модулей ddi_init.c и ddi_base.h. Был полностью переписан соответствующий раздел в запускающем скрипте rungms, который сначала запускает кольцо серверов mpd, а затем уже и само задание. После сборки исполняемого файла было проведено его тестирование на включенных в пакет GAMESS примерах файлов данных, и получено совпадение результатов. Запуск параллельных заданий осуществляется командой mpiexes, которая не имеет указанных выше недостатков команды mpirun.

После компиляции GAMESS был сформирован виртуальный «контейнер» (аналогичный описанному выше) из модифицированного GAMESS, бинарных библиотек, исполняемых файлов Mpich-2, скриптов развертывания и запуска на создаваемой параллельной среде. Серия первичных запусков (с использованием собственных тестовых примеров пакета GAMESS) вплоть до получения положительного результата была проведена на ресурсном узле GRID ИПХФ РАН, использованном как удаленный через брокер ресурсов RDIG. Дальнейшее успешное тестирование было проведено на удаленном ресурсном узле НИИЯФ МГУ. Были проведены успешные запуски пакета GAMESS с применением данной технологии. Рассчитаны тестовые примеры различного уровня сложности из дистрибутива GAMESS, подтвердившие полную работоспособность разработанной технологии.

В перспективе более общим вариантом данной технологии является использование (по аналогии с описанным «контейнером») виртуальных машин как исходящих распределенных заданий, что позволит гарантировать пользователю необходимое качество обслуживания, не затрагивающее при этом работу основных служб ресурсных узлов. Таким образом, пользо-

вателю распределенной среды может быть предоставлена полностью изолированная виртуальная вычислительная среда, по своим свойствам не уступающая физическому серверу, в которой может быть предоставлен любой его собственный вычислительный сервис. Приложения, реализованные в ВМ, в этом случае абсолютно не зависят от операционной системы и окружения, в котором ВМ выполняется. Еще одним преимуществом такой виртуализации является полное отделение как конкретной службы или программы от внешней среды, так и внешней среды от нее. Это возможно благодаря использованию дополнительного слоя программного обеспечения – виртуального оборудования, позволяющего выполнять обычное приложение, как если бы оно было запущено на отдельном компьютере. В чем смысл данной технологии в условиях GRID среды? Пользователь получает возможность создать образ виртуальной машины с предустановленной операционной системой и полностью сконфигурированными приложениями, нацеленной на решение конкретной задачи. Этот образ затем передается на распределенный ресурс и исполняется там как GRID приложение, не требуя настройки данного узла под конкретные задачи. Это существенно облегчает адаптацию прикладного ПО для работы в распределенных средах. Дополнительным плюсом служит то, что данные технологии в принципе позволяют запускать образы виртуальных машин с операционными системами, отличными от установленных на ресурсах (например, Windows ВМ на Linux кластере). Следует отметить потенциальные недостатки данного метода. Прежде всего – это размер передаваемых заданий, задание может достигать нескольких гигабайтов. «Накладные расходы» на виртуализацию могут забирать до 15-20% от мощности ресурса (при неудачном конфигурировании).

2. Заключение

Таким образом, на реальных примерах показана широкая степень применимости различных методов виртуализации для работы с приложениями вычислительной химии в условиях распределенных и параллельных сред. Авторами были сформированы несколько виртуальных вычислительных ресурсов и создана методика формирования виртуальных программных «контейнеров» для запуска сложно сконфигурированных и требующих особых настроек параллельной среды выполнения прикладных пакетов вычислительной химии.

Применение указанных методов виртуализации позволит существенно облегчить создание проблемно-ориентированных виртуальных вычислительных организаций, поскольку позволит объединять в их составе весьма разнородные вычислительные ресурсы, избегая при этом значительной реконфигурации этих ресурсов под нужды распределенной среды.

Работа проводилась при финансовой поддержке программы Союзного Государства «СКИФ-GRID» и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №15 на 2007–2008 годы «Разработка фундаментальных основ создания научной распределенной информационно-вычислительной среды на основе технологий GRID». Статья рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2009», <http://agora.guru.ru/pavt>.

Литература

1. Вычислительная химия в среде GRID: параллельные и распределенные вычисления / С.М. Алдошин, В.М. Волохов, Д.А. Варламов, А.В. Пивушков // Труды Второй международной конференции «Суперкомпьютерные системы и их применение» SSA'2008, Минск, октябрь 2008. – Минск, 2008. – С. 114 – 118.
2. Волохов, В.М. Крупномасштабные задачи химии на параллельных и распределенных

- вычислительных полигонах: современное состояние и перспективы / В.М. Волохов, Д.А. Варламов, А.В. Пивушков, // Научный сервис в сети Интернет: решение больших задач: тр. Всерос. науч. конф. (22 – 27 сент. 2008 г., г. Новороссийск). – М., 2008. – С. 210 – 212.
3. Варламов, Д.А. Распределенные и параллельные вычисления в области химии на ресурсном узле ГРИД ИПХФ РАН / Д.А. Варламов, В.М. Волохов, А.В. Пивушков, Н.Ф. Сурков, Г.А. Покатович // Distributed Computing and Grid-Technologies in Science and Education: Extended Proceedings of the III Intern.Conf.: сб. науч. тр. – Дубна, 2008. – С. 127 – 130.
4. Создание ресурсного узла вычислительного полигона СКИФ-ГРИД на базе middleware UNICORE / Д.Е. Баргатин, А.В. Пивушков, Д.А. Варламов, В.М. Волохов, // Современные информационные технологии в науке, образовании и практике: материалы VII Всерос. науч.-практ. конф. (27 – 28 нояб. 2008 г., г. Оренбург). – Оренбург, 2008. – С. 102 – 104.

Отдел вычислительных и информационных ресурсов
Институт проблем химической физик РАН
dima@iem.ac.ru

Поступила в редакцию 2 марта 2009 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В.Л. Дильман

RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODELS OF THE STRESS CONDITION OF THE THIN-WALLED HETEROGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS BASED ON ANALYTICAL METHODS

V.L. Dil'man

Строятся и исследуются аналитическими методами математические модели напряженных состояний тонкостенных цилиндрических оболочек, продольных, поперечных и спиральных менее прочных слоев (прослоек) в них, в том числе содержащих дефекты, более прочных слоев с дефектами, при нагружении оболочек внутренним давлением и осевой силой. Подробно исследуются состояния деформационного, контактного и конструкционного упрочнения этих слоев. На этой основе получены явные аналитические зависимости для вычисления критических напряженных состояний в стенке неоднородной оболочки и критического внутреннего давления.

Ключевые слова: тонкостенная цилиндрическая оболочка, менее прочный слой, пластическое деформирование, контактное упрочнение, система уравнений в частных производных гиперболического типа

Using analytical methods the author creates and researches mathematical models of the stress conditions of the thin-walled cylindrical shells, linear, cross and less solid helical layers (interlayers) in them including those ones with defects, as well as more solid layers with defects while loading the shells with internal pressure and axial force. The author minutely researches the state of the deformative, contact and structural hardening of these layers. On this basis the author obtains evident analytical dependences for calculating the extreme stress state in the wall of the heterogeneous shell and extreme internal pressure.

Keywords: thin-walled cylindrical shell, less solid layer, plastic deformation, local strengthening, partial differential system of the hyperbolic type

Введение

Обозначения и соглашения

В работе используются обычные, принятые в механике твердого тела, обозначения, а также:

κ – относительная толщина слоя;

m – коэффициент двухосности нагружения стенки оболочки или листового образца;

n – показатель упрочнения материала;

индекс «0» внизу – значение величины в начальный момент нагружения;

индекс «*» вверху – значение величины в критический момент;
индекс «БП» («МП») вверху указывает на отношение данной величины к более прочной (менее прочной) части соединения (для снижения громоздкости формул индекс «МП» в некоторых случаях не ставится).

В работе приняты следующие сокращения.

ТБД – труба большого диаметра; МТП – магистральный трубопровод; ЗТВ – зона термического влияния; ОМ – основной металл; ТЦО – тонкостенная цилиндрическая оболочка; МНС – механически неоднородное соединение; СвС – сварное соединение;

ММ – математическая модель (математические модели); НС – напряженное состояние; НДС – напряженно-деформированное состояние;

МП – менее прочный; БП – более прочный;

ОПУПД – общая потеря устойчивости (процесса) пластического деформирования; ЛПД – локализация пластических деформаций; НСп – несущая способность.

ГППС – гипотеза плоских поперечных сечений; ГПрС – гипотеза продольных сечений; ГРП – гипотеза разделения переменных; МГ – мультипликативная гипотеза;

НПТ – напряжение пластического течения; НПН – напряжение пластической неустойчивости; СПН – среднее предельное напряжение; ТРТ – точка раздела течения;

КСМ – критерий Свифта – Марциньяка.

Объект изучения

Рассматривается НС ТЦО из упрочняемого материала, подверженных монотонному статическому нагружению внутренним давлением, а также осевой силой, в процессе их пластического деформирования. Оболочки могут быть однородными либо содержать слои (прослойки) из МП материала и расположенные вдоль, поперек или под углом к образующей. Примером таких оболочек являются ТБД, содержащие продольные, спиральные или поперечные (монтажные) СвС. В работе изучается НС МП слоев при их нагружении вплоть до момента начала их пластического течения вследствие *потери устойчивости процесса пластического деформирования* материалом слоя. Внутри МП или БП слоя, на границе между слоем и ОМ или в ОМ соединения могут располагаться дефекты (моделируемые как разрезы нулевой или конечной толщины).

Оболочка считается *тонкостенной*, если выполняются условия: 1) НС предполагается постоянным по толщине оболочки (в ее однородном участке); 2) в частности, напряжения, направленные по нормали к поверхности оболочки, всюду внутри оболочки считаются равными разности внешних давлений (при их равенстве или отсутствии – равными нулю); 3) при исследовании локального участка оболочки, по площади сравнимого с ее толщиной (например, участка, содержащего МП прослойку), кривизной оболочки можно пренебречь; 4) отношение толщины стенки к ее радиусу мало: $t \ll r$, что позволяет пренебрегать по сравнению с единицей слагаемыми, имеющими порядок t^2/r^2 .

В инженерных расчетах обычно оболочку принимают тонкостенной, если у нее отношение толщины стенки к ее радиусу составляет величину около 0,05 и менее.

В работе рассматриваются

ММ критических НДС однородных ТЦО из упрочняемых материалов, при их двухосном нагружении; ММ критических НДС МП слоев, содержащихся в ТЦО, при их двухосном нагружении;

ММ НС МП тонких слоев в тонкостенных листовых и трубчатых образцах и влияние МП слоев на НСп содержащих их ТЦО;

ММ НС соединений, содержащих дефекты в МП или БП участках.

1. Математические модели критических НДС однородных ТЦО из упрочняемых материалов

Интенсивность напряжений в критический момент нагружения является критериальной величиной, на основе которой можно получать силовые и деформационные критерии несущей способности конструкций в виде явных аналитических выражений, зависящих от их прочностных и геометрических параметров и условий нагружения. Построение и исследование ММ критических НДС ТЦО из упрочняемых материалов основывается на двух принципах: 1) гипотезе П. Людвига (P. Ludwik) о «единой кривой», то есть гипотезе о независимости диаграммы деформирования от вида напряженного состояния при сложном нагружении; 2) критерии Свифта – Марциньяка ОПУПД либо ЛПД оболочки (H.W. Swift, Z. Marciniak, кратко: КСМ).

При использовании деформационной теории диаграмма деформирования имеет вид

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad (1)$$

где σ_i и ε_i – интенсивности напряжений и деформаций. В случае использования теории течения закон деформирования имеет вид $\sigma_i = f(\bar{\varepsilon}_i)$, где $\bar{\varepsilon}_i$ – параметр Одквиста. Среди большого количества известных аппроксимаций зависимости (1) выделяется простотой в использовании степенная функция

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n, \quad (2)$$

где A и n – константы материала. К числу наиболее серьезных недостатков аппроксимации диаграммы деформирования (2) можно отнести нелинейность реальных зависимостей для ряда материалов в логарифмических координатах. В работах [1, 2, и др.] предложен ряд уточнений формулы (2), свободных от этого недостатка:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \exp(a\varepsilon_i), \quad (3)$$

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \exp(a\varepsilon_i + b\varepsilon_i^2), \quad (4)$$

$$\sigma_i = A(\varepsilon_i + B)^n \exp(a(\varepsilon_i + B)), \quad \sigma_i = A(\varepsilon_i + B)^n \exp(a(\varepsilon_i + B) + b(\varepsilon_i + B)^2).$$

Здесь A , B , n , a , b – постоянные, характеризующие свойства материала.

Всюду в работе потеря оболочечной конструкцией несущей способности определяется на основе КСМ ОПУПД или ЛПД оболочки. Суть КСМ заключается в следующем [3]. Изменение размеров (во всех направлениях) участка стенки конструкции при возрастании внешних нагрузок приводит к приращению напряжений на этом участке, которые компенсируются за счет упрочнения материала стенки, и в этом случае пластическое деформирование протекает устойчиво. Однако упрочнение происходит по закону, который на стадии развитых пластических деформаций можно аппроксимировать функцией вида (1), где график f – монотонно возрастающая выпуклая вверх гладкая кривая, а рост напряжений за счет изменения геометрии конструкции в зависимости от деформаций происходит по экспоненте, скорость роста которой выше скорости роста выпуклой вверх функции. Поэтому в какой-то момент упрочнения материала оказывается недостаточно для нейтрализации роста напряжений, связанного с изменением формы. В этот момент, определяемый равенством дифференциалов двух указанных зависимостей, начинается деформирование материала с неконтролируемой скоростью при постоянных или уменьшающихся внешних нагрузках, т. е. начинается ОПУПД данного участка.

Известно, что при действии нескольких независимых внешних нагрузок, критерий экстремума одной из внешних нагрузок для определения неустойчивого состояния может оказаться ошибочным – потеря устойчивости может произойти, когда одна из внешних нагрузок

прошла свой максимум. Можно показать, что если все эффективные силы, действующие на тело, зависят от одного параметра и монотонно изменяются вместе с ним, критерий СМ равносильно критерию экстремума внешней нагрузки.

Рассмотрим ММ НДС ТЦО на основе теории малых деформаций. Этот вопрос подробно изучался в работе [4]. Там предполагалось, что коэффициент m двухосности нагружения стенки трубы, $m = \sigma_z / \sigma_\varphi$, σ_z и σ_φ – главные напряжения в стенке трубы, осевое и кольцевое соответственно, при постоянном отношении внешних нагрузок ($N/p = \text{const}$) остается постоянным. Вследствие изменения размеров оболочки в процессе деформирования простое нагружение стенки по внешним нагрузкам приводит к сложному по напряжениям. Действительно, из известных соотношений

$$\sigma_z = \frac{Rp}{2t} + \frac{N}{2\pi Rt}; \quad \sigma_\varphi = \frac{Rp}{t}; \quad \sigma_r = 0,$$

где R и t – внутренний радиус и толщина стенки оболочки, p – внутреннее давление, N – осевая сила, из условия несжимаемости и подобия девиаторов напряжений и деформаций следует

$$(2 - m)\varepsilon_z = (2m - 1)\varepsilon_\varphi, \quad 2m - 1 = (2m_0 - 1) \exp(-2\varepsilon_\varphi) \quad (5)$$

(индекс 0 указывает на начальный момент нагружения, ε_z , ε_φ – осевые и кольцевые деформации стенки оболочки). Вторая формула (5) определяет изменение коэффициента m в зависимости от кольцевой деформации. Из (5) видно, что m меняется в процессе пластического деформирования трубы, за исключением случая $m_0 = 0,5$, когда осевое усилие $N = 0$, и случая $m_0 = 2$, при котором R не меняется в процессе деформирования трубы. С учетом непостоянства m НДС ТЦО на основе теории малых деформаций рассматривалось в [1] и других работах автора. Для вычисления интенсивности напряжений σ_i как функции от интенсивности деформаций ε_i понадобятся приведенные ниже приближенные формулы. Они выводятся из формул (5). В работе [1] получены зависимости

$$\sigma_i = \frac{s_0 R_0 p}{t_0} \exp(\alpha \varepsilon_i + \beta \varepsilon_i^2), \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{3}{2s_0} - \frac{(2m_0 - 1)^2(2 - m_0)}{4s_0^3}; \quad \beta = \frac{3(2m_0 - 1)(2 - m_0)(4m_0^3 - 9m_0^2 + 11m_0 - 3)}{16s_0^6}.$$

Из равенства дифференциалов функций (4) и (6), в соответствии с КСМ, следует уравнение для нахождения критического значения интенсивности деформаций ε_i^* , соответствующего моменту ОПУЦД, откуда выводится критическое значение интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_i^* = \frac{2n}{\sqrt{(\alpha - a)^2 + 8(\beta - b)n + \alpha - a}}. \quad (7)$$

Это позволяет вычислить критическое значение интенсивности напряжений σ_i^* и критическое давление p^* , при котором происходит исчерпание несущей способности однородной ТЦО вследствие ОПУЦД. В [1] и других работах автора выводится и анализируется ряд приближенных формул для вычисления критических значений ε_i^* , σ_i^* и p^* , в том числе при различных аппроксимациях закона упрочнения. Например, при условии (2) или (3) и нагружении ТЦО внутренним давлением получены соответственно формулы

$$p^* = \frac{2}{\sqrt{3}^{n+1}} \frac{t_0}{R_0} \sigma_B \quad \text{или} \quad p^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1 - a}{\sqrt{3} - a} \right)^n \exp \left(\frac{an}{\sqrt{3} - a} \right) \frac{t_0}{R_0} \sigma_B. \quad (8)$$

Анализируя условия, определяющие рабочее давление в действующем трубопроводе по СНиП [5], можно отметить, что отсутствие коэффициента двухосности m и параметров,

определяющих упрочнение материала, свидетельствуют о том, что принятая в [5] вычислительная схема может быть усовершенствована.

Наряду с ОПУПД неустойчивость пластического деформирования может наступить в форме ЛПД. В работе [1], на основании теории малых деформаций, с использованием КСМ и методики работы [4], но при условии непостоянства параметра m , вычислены значения критических деформаций, соответствующих моменту ЛПД, в зависимости от параметров m_0 и n , и установлены условия возникновения осевой или кольцевой шейки в зависимости от тех же величин (под осевой шейкой имеется в виду локальная выпучина с утонением стенки оболочки) получены формулы:

$$\varepsilon_{iz}^{\text{III}} = \frac{2n}{\sqrt{(\alpha_1 - a)^2 + 8(\beta_1 - b)n + \alpha_1 - a}}; \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \frac{2m_0 - 1}{2s_0} \left(\frac{2}{m_0} - \frac{(2m_0 - 1)(2 - m_0)}{2s_0^2} \right);$$

$$\beta_1 = \frac{(2m_0 - 1)(2 - m_0)(8m_0^5 - 29m_0^4 + 35m_0^3 - 19m_0^2 + 4m_0 - 4)}{16s_0^6 m_0^2}.$$

$$\varepsilon_{i\varphi}^{\text{III}} = \frac{2n}{\sqrt{(\alpha_2 - a)^2 + 8(\beta_2 - b)n + \alpha_2 - a}}; \quad (10)$$

$$\alpha_2 = -\frac{(2 - m_0)(2m_0^2 - 2m_0 - 1)}{4s_0^3}; \quad \beta_2 = \frac{(2 - m_0)(2m_0 - 1)(2m_0^3 - 5m_0^2 + 7m_0 - 1)}{16s_0^6}.$$

В ряде частных случаев полученные формулы сводятся к известным. Анализ формул показывает, что в случаях, когда $0 \leq m \leq 2$, локализация пластической деформации (появление шейки или выпучины) наступает позже ОПУПД; если $2 \leq m \leq \infty$, то этап ОПУПД перед возникновением шейки отсутствует. Формулы (9) и (10) позволяют установить, каким должно быть исходное отношение главных напряжений m_0 , чтобы возникла продольная либо, наоборот, кольцевая шейка. Обозначим пограничное значение m_0 через m_0^* . Когда $\varepsilon_{iz}^{\text{III}} < \varepsilon_{i\varphi}^{\text{III}}$, следует ожидать появления кольцевой шейки, в противном случае – осевой. Показано, что пограничное значение m_0^* , при котором направление шейки не имеет предпочтений, зависит от показателя упрочнения n (при упрочнении по формуле (2)). Так, при $n = 0, 1$ $m_0^* \approx 0, 90$; при $n = 0, 15$ $m_0^* \approx 0, 98$; при $n = 0, 20$ и $m_0 \approx 1, 06$; при $n = 0, 25$ $m_0^* \approx 1, 12$. Отсюда следует, что величина m_0^* не всегда равна единице («парадокс» Е.А. Девиса [6, с. 336 – 363]) и зависит от параметров упрочняемого материала (рис. 1).

Рассмотрим ММ НДС ТЦО на основе теории течения [2]. Отличие этой модели от предыдущей в том, что вместо (5) используется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varepsilon_z}{2m - 1} = \frac{d\varepsilon_\varphi}{2 - m} = \frac{d\varepsilon_r}{-(m + 1)} = \frac{\overline{d\varepsilon}_i}{2s}, \quad (11)$$

где $\overline{d\varepsilon}_i$ – интенсивность приращений деформаций. Система (11) приводит к уравнению

$$(2m_0 - 1) \exp(-2\varepsilon_\varphi) + 2(2 - m_0) \exp \varepsilon_z = 3. \quad (12)$$

Раскладывая экспоненты в степенные ряды, в первом приближении можно получить из (12) первое равенство (5) при $m = m_0$. Следовательно, для «очень малых» деформаций теория течения приводит в данном случае к одинаковым результатам с теорией малых деформаций. На основе КСМ, когда упрочнение описывается по закону (3), имеет место рекуррентное соотношение

$$\varepsilon_i^* = \frac{2sn}{(2m - 1)^2(m - 2)/2s^2 + 3 - 2as}, \quad s = \sqrt{m^2 - m + 1}. \quad (13)$$

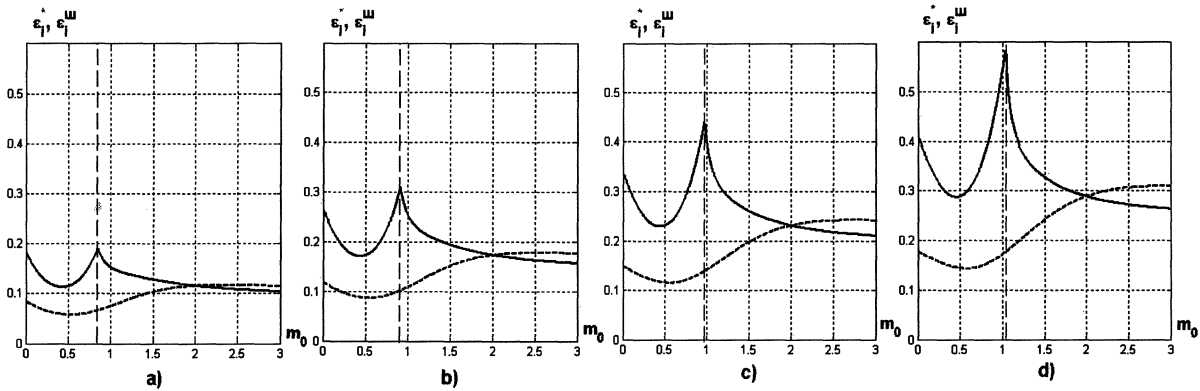


Рис. 1. Зависимость от параметра двухосности нагружения m_0 величины критической интенсивности деформаций ε_i^* , при которой происходит ОПУПД (пунктирная), и $\varepsilon_i^{\text{III}}$, при которой возникает шейка (сплошная): а) $n = 0, 10$; б) $n = 0, 15$; в) $n = 0, 20$; д) $n = 0, 25$

В общем случае при $b \neq 0$ ε_i^* находится из соответствующего квадратного уравнения. Рекуррентность формулы (13) заключается в том, что параметры m и s зависят от ε_i . Для параметра m в важном для приложений диапазоне $0,5 \leq m \leq 2,5$ получена оценка (приводим вариант с ошибкой порядка 1%)

$$m \approx m_0 - 0,3(2 - m_0)(2m_0 - 1)\varepsilon_i,$$

что позволяет получить явную приближенную формулу для вычисления ε_i^* .

В работе [2] получены, на основе теории течения, аналитические рекуррентные выражения для вычисления деформаций, при которых наступает ЛПД. Например, при $a = 0$, $\tilde{m}_0^* = 1 + 0,4n + 0,24n^2$ (поправка при втором приближении – от нескольких тысячных до двух сотых). Ограничиваясь первым приближением, можем заметить, что смена направления разрушения происходит при $m_0 = 1,1 \dots 1,2$. Полученные результаты объясняют не только эффект Дэвиса, но и различие экспериментальных результатов его работы и работы [7]: значение m_0^* существенно зависит от деформационных свойств материала – параметров n и a , причем, как видно из полученного при $m = 1$ выражения $\tilde{\varepsilon}_i^* = n(0,75 - a)^{-1}$, параметр a может оказать существенное влияние на пограничную величину интенсивности деформации. Это указывает на необходимость как можно более точной аппроксимации зависимости (1). В частности, замена (2) на (3) может оказаться заметной при определении свойств материалов и конструкций.

В работах [8, 9] автором проводится сравнительный анализ понятий ОПУПД и НПТ («flow stress») σ^* , в другой терминологии – НПН [6], на котором основаны критерии допустимости дефектов, входящие в стандарт В31G (США). В литературе [6, 10, и др.] приводятся более десятка различных формул для вычисления НПТ (НПН), дающие существенно различные оценки σ^* , полученные аппроксимацией экспериментальных данных (табл. 1 и 2). НПТ является характеристикой упрочняемого материала, однако в упомянутых зависимостях не участвуют параметры, характеризующие особенности деформирования материала в пластической зоне. Другой важный недостаток оценок σ^* – предположение, что трубопровод нагружен только внутренним давлением: ($m_0 = 0,5$), в то время как наличие осевых нагрузок заметно сказывается на НПТ. Анализируя приведенные выше результаты, можно предположить, используя чисто степенную аппроксимацию, что НПТ (НПН) характеризует

момент ОПУПД и что, следовательно,

$$\sigma^* = \left((2/3) \sqrt{m_0^2 - m_0 + 1} \right)^n \sigma_B. \quad (14)$$

При отсутствии осевых нагрузок формула (14) имеет вид: $\sigma^* = (\sqrt{3})^{-n} \sigma_B$. Формула (14) учитывает прочностные (σ_B), деформационные (n) характеристики материала и условия нагружения (m_0) трубопровода. Из таблиц 1 и 2 видно, что вычисленные по последней формуле значения σ^* хорошо согласуются с экспериментально полученными зависимостями в работах [6, 10].

Таблица 1

Величина σ^* по формулам работы [6] и по формуле (14)

[6], (13.8a)	[6], (13.8б)	[6], (13.8в)	[6], (13.8г)	(14), $n = 0, 10$	(14), $n = 0, 12$	(14), $n = 0, 15$	(14), $n = 0, 20$
444	444	422	422	442	437	430	418

Таблица 2

Величина σ^* по формулам работы [10] и по формуле (14)

[10], (1)	[10], (2)	[10], (3)	[10], (4)	[10], (5)	[10], (6)	(14), $n = 0, 10$	(14), $n = 0, 12$	(14), $n = 0, 15$	(14), $n = 0, 20$
533	558	554	513	527	513	539	534	525	511

2. Математические модели НДС слоя, расположенного вдоль образующей, из МП, чем ОМ, материала ТЦО

Так как оболочка тонкостенная, можно в качестве модельного изучать НДС растягиваемой неоднородной полосы, содержащей поперечный МП слой, в условиях плоской деформации. Распределение прочности по длине полосы может быть кусочно-постоянным, с постоянным пределом прочности $\sigma_B^{БП}$ в ОМ, и постоянным пределом прочности σ_B в слое, причем $\sigma_B < \sigma_B^{БП}$. Другой модельный вариант распределения прочности по длине полосы – предел прочности постоянен в ОМ и не постоянен внутри слоя. Один из подходов к решению возникающих при этом недоопределенных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа можно применить по схеме: 1) находится решение, определенное в некоторой окрестности поперечной оси симметрии слоя с использованием краевых условий на этой оси и ограничений на класс решений; 2) находится решение в окрестности свободной границы в зоне, где оно однозначно определяется граничными условиями (здесь естественно применять метод характеристик); при исследовании соединений с небольшой степенью механической неоднородности необходимо находить напряженное состояние не только в слое, но и в прилегающих к нему участках, вследствие вовлечения этих участков в пластическое деформирование; 3) эти решения «склеиваются» в некоторой точке; в зависимости от выбора точки «стыковки» определяется последняя неизвестная постоянная в решении, полученном в пункте 1 данной схемы.

Заметим, что многообразие вариантов при деформировании слоя связано с наличием нескольких видов критического состояния слоя при растягивающей внешней нагрузке.

1. Достижение критического состояния слоя (прослойки), при условии, что максимальные нормальные напряжения в слое, действующие в его поперечном направлении, не достигают значений максимальных напряжений в БП ОМ, причем приконтактные БП участки соединения не вовлекаются в пластическое деформирование.

2. То же, но с вовлечением в какой-то момент в пластическое деформирование приконтактных участков БП части соединения (рис. 2, а).

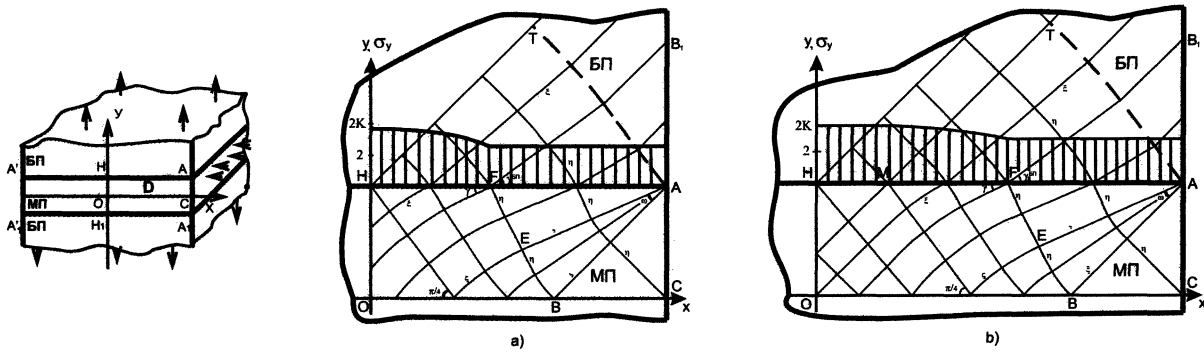


Рис. 2. Фрагмент неоднородной полосы, содержащей МП слой. Поле характеристик в МП слое и прилежащем БП участке и эпюры нормальных напряжений σ_y по контактной поверхности: а) не достигающих, б) достигающих значений максимальных напряжений σ_y в БП ОМ. АСОН – четверть сечения МП слоя

3. Достижение критического состояния слоя (прослойки), при условии, что максимальные нормальные напряжения в слое, действующие в его поперечном направлении, достигают значений максимальных напряжений в БП ОМ, причем приконтактные БП участки соединения не вовлекаются в пластическое деформирование.

4. То же, но с вовлечением в какой-то момент в пластическое деформирование приконтактных участков БП части соединения (рис. 2, б).

НДС пластической среды (МП слоя) при плоской деформации определяется системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (16)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\partial v_x / \partial x - \partial v_y / \partial y}{\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

Здесь σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора напряжений, v_x и v_y – (условные) скорости перемещения точек среды в направлениях OX и OY соответственно, (15) – уравнения равновесия; (16) – условие пластичности Мизеса, k – постоянная пластичности; (17) – ассоциированный закон течения Леви – Сен-Венана (закон пропорциональности девиаторов скорости деформаций и напряжений); (18) – условие сохранения объема пластического тела в процессе деформирования (условие несжимаемости).

Уравнения (15) – (18) заданы в области координатной плоскости (см. рис. 2, область $AA_1H_1A'_1A'H$), интерпретируемой как сечение слоя из МП материала. Из соображений

симметрии достаточно рассматривать четверть указанной области – область D . Краевые условия (в силу симметрии относятся к четверти сечения прослойки $АСОН$ (см. рис. 2)):

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0.$$

Условие на «свободной» границе (p – давление) $\sigma_x(1, y) = -p$. Ограничения на касательные напряжения на контактной границе

$$\max_{x \in [0;1]} \tau_{xy}(x, \varkappa) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь α – параметр, зависящий от достигнутых нагрузок. В критическом состоянии слоя его можно найти, исходя из внешних параметров задачи. Моделирование картины полей характеристик в окрестности точки A выхода контактной границы на свободную границу в случае вовлечения в пластическое деформирование приконтактных участков БП части соединения позволяет записать систему трансцендентных уравнений для нахождения $\omega = \omega^{**}$ и $\omega^{БП}$ – углов поворота характеристик при движении по ним между свободной и контактной поверхностями в момент начала течения БП участков, прилегающих к МП слою (ω^{**} – угол веерно-центрированного поля в МП части в указанный момент). Приближенное решение этой системы методом разложения по параметру $\lambda = K - 1$ имеет вид:

$$\omega^{БП} = \frac{K-1}{2K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{4} + \dots \right), \quad \omega^{**} = K\omega^{БП}. \quad (19)$$

Отсюда получено условие, при котором БП часть соединения не вовлекается в пластическую деформацию: $\varkappa > 4/(K+1)^2$. Формулы (19) позволяют вычислить касательные напряжения на контактной поверхности (участок FA) в критический момент нагружения:

$$\tau_{xy}(x, \varkappa) = (K-1) \left(1 + (K-1)^2/4 + \dots \right). \quad (20)$$

В работах [12, 13, 14, 15, 16, 9, и др.] применялись различные подходы для нахождения напряжений в МП слое на основании уравнений системы (15) – (18), основанные на «частичном предугадывании» внутреннего состояния МП слоя и всего соединения. Использовались гипотезы:

1. Гипотеза Прандтля о постоянстве касательных напряжений вдоль пластической полосы:

$$\partial\tau/\partial x = 0.$$

При таком допущении система уравнений (15), (16) принципиально упрощается и допускает точное решение, которое легко находится. Поле характеристик образовано двумя ортогональными друг другу семействами циклоид. Решение Прандтля, являясь точным для бесконечной МП полосы, может быть использовано, при значительной механической неоднородности соединения, для моделирования НС тонкой ($\varkappa < 0,10 \dots 0,15$) полосы (прослойки), за исключением участков вблизи ее свободных поверхностей и поперечной оси симметрии. При малой ($K < 1,5$) механической неоднородности картина полей характеристик (линий скольжения) значительно сложнее прандтлевской. В некоторой окрестности свободной поверхности она напоминает «лоскутное одеяло» из участков простого равномерного, веерно-центрированного и приближенно прандтлевского полей. Размеры этой окрестности можно оценить расстоянием от свободной поверхности в 2 – 3 толщины слоя. Еще сложней поля характеристик устроены в окрестности поперечной оси симметрии пластической полосы. При этом эпюры касательных и нормальных напряжений по любому продольному сечению полосы (кроме осевого) не являются монотонными функциями. В инженерных

решениях замену реальных полей характеристик прандтлевскими можно трактовать как «сглаживание» и осреднение этих функций, что объясняет применимость для вычисления критических напряжений подхода на основе решения Прандтля при удачном подборе коэффициентов. В таком ключе гипотезу Прандтля применяли О.А. Бакши, М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев и их соавторы в работах [13, 15, 14, и др.], и другие авторы.

2. Гипотеза о линейной зависимости касательных напряжений от одной из переменных:

$$\tau = xY(y) \quad \text{или} \quad \tau = X(x)y.$$

Вторая из этих гипотез применялась в работах Л.М. Качанова и его соавторов [12, и др.], и в работах автора. Первая гипотеза, позволяющая детально исследовать НДС вблизи поперечной оси симметрии пластической полосы, автору в литературе не встречалась. Она применялась автором в работах [16, 9, и др.].

3. Гипотеза разделения переменных для τ (ГРП):

$$\tau = X(x)Y(y).$$

Эта гипотеза как обобщение предыдущих, автору в литературе также не встречалась. Она применялась автором в работах [9, 17] и многих других.

4. Гипотеза плоских поперечных сечений (ГППС):

$$\partial u_y / \partial x = 0 \quad \text{или} \quad \partial v_y / \partial x = 0.$$

Она использовалась в работах Л.М. Качанова и его соавторов [12, и др.], а также применялась автором в работе [19] и ряде других работ.

5. Гипотезы продольных сечений (ГПрС):

$$u_x = f(x)g(y) \quad \text{или} \quad v_x = f(x)g(y).$$

Эта гипотеза автору в литературе не встречалась. Она применялась автором в работах [16, 9, и др.], где предполагалось $g(y) = -\cos \lambda y$. Такой вид функции $b(y)$ не только является правдоподобной, не противоречащей известным экспериментам аппроксимацией, но позволяет свести уравнение для нахождения τ_{xy} к разделению переменных и, в конечном счете, к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

В указанных работах автора получены приближенные аналитические выражения для вычисления компонент тензора напряжений и показано, что гипотеза 2 о линейной зависимости τ от одной из переменных приводит к результатам, являющимся первым приближением результатов на основе гипотез 4 и 5. Использование различных моделей, основанных на применении гипотез 2, 3, 4 и 5, приводит к близким результатам. Для вычисления напряжений наиболее удобными оказались зависимости, полученные на основе ГППС и формулы (19).

$$\tau_{xy} = 0,5Ax \operatorname{th}(Ay); \quad \sigma_y = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}(A\kappa)}{\operatorname{ch}(Ay)} + \frac{A^2}{4}(x_F^2 - x^2) + \frac{(K-1)(3-K)}{2} + 2 + \frac{p}{2},$$

причем

$$A = \frac{1}{\kappa} \operatorname{athd} \frac{2(K-1)\kappa}{x_F}, \quad \text{где} \quad y = \operatorname{athd} x \Leftrightarrow x = y \operatorname{th} y; \quad x_F = 1 - \frac{4\kappa}{K+1}. \quad (21)$$

Критическая нагрузка (среднее критическое напряжение $\sigma_{y \text{ ср}}$) может быть вычислена по следующим формулам. При условии $\kappa_0 \leq \kappa \leq \kappa_1 = (K+1)/4$, где $\kappa_0 = (K+1)/((K+1)^2 + 4)$,

$$\sigma_{y \text{ ср}} = 2 + \sigma_{\text{упр}}, \quad \sigma_{\text{упр}} = \frac{(K-1)(3-K)}{2} + \frac{(K-1)(K+1-4\kappa)(K+1-4\kappa)}{3\kappa(K+1)^2}, \quad (22)$$

а при условии $0 < \varkappa \leq \varkappa_0$,

$$\sigma_{\text{упр}} = (K - 1)(2 - 2\varkappa - (1/6)\sqrt{\varkappa(K + 1)}\sqrt{K + 1 - 4\varkappa}). \quad (23)$$

В работе [16] вычислены скорости смещений точек слоя в продольном и поперечном направлениях

$$v_x = -Cx(\text{ch}(Ay))^{-1}, \quad v_y = (C/A) \text{arctg}(\text{sh}(Ay)),$$

где C – произвольная постоянная, $C > 0$. Там же, на основе анализа формул для вычисления нормальных напряжений при условии достижения всеми точками слоя критического состояния, дается описание возможной картины развития напряжений в слое и поэтапного вовлечения в пластическое деформирование различных участков. Отмечается, что в средней части слоя (т. е. вдали от свободных поверхностей) переход в пластическое состояние и затем в состояние пластической неустойчивости сначала происходит вблизи БП частей соединения, около контактной границы, приводятся ссылки на эксперименты, проводится параллель с известными явлениями, возникающими при растяжении полосы, ослабленной неглубокими вырезами.

В работах [15, 14, 17, 18, и др.] изучалось НС МП прямоугольного слоя, прочность которого переменна по толщине: $k = k_0 Z(y)$, где $k_0 = k|_{y=0}$. Условие пластичности имело вид $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4Z^2(y)$, где $Z(0) = 0$; $Z(\varkappa) = K_{\text{сл}}$, $K_{\text{сл}}$ – параметр слоя, характеризующий его неоднородность. В работах [15, 14, и др.] построение теории основывалось на гипотезе Прандтля. В работе [17] замена условия пластичности на приближенное позволила автору применить гипотезу 3 (ГРП) и свести ее к одной из гипотез вида 2. В случае $\tau = xY(y)$ предложен обратный метод: функция $Y(y)$ выбирается как нечетный полином подходящей степени, коэффициенты которого некоторым образом определяются так, чтобы вычисляемая по $Y(y)$ функция неоднородности удовлетворяла нужным, полученным из эксперимента параметрам. В случае $\tau = X(x)y$ естественно возникают два подслучая: когда прочность минимальна на продольной оси симметрии слоя,

$$\tau_{xy} = \lambda^{-1} \text{sh}(\lambda y) \cdot X(x), \quad \text{при } Z(y) = 0,5(\text{ch}(\lambda y) + 1), \quad y \in [0; \varkappa],$$

а когда максимальна,

$$\tau_{xy} = \lambda^{-1} \sin(\lambda y) \cdot X(x), \quad \text{при } Z(y) = 0,5(\cos(\lambda y) + 1), \quad y \in [0; \varkappa],$$

где функция $X(x)$ – решение краевой задачи (24) (плюс во втором подслучае):

$$\begin{aligned} X''(x) - 4X'(x)X(x) \pm \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) = 0, \quad \max_{x \in [0; x_F]} X(x) &= b, \quad b = 0,5\alpha\lambda \text{cth}(0,5\lambda\varkappa), \quad x_F \in (0; 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Для модельных уравнений вида

$$T'' - T'T \pm T = 0 \quad (25)$$

имеют место утверждения.

Лемма 1. *Решение задачи Коши для уравнения из (25) (с минусом) и начальных условий $T(0) = 0$, $T'(0) = a$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Решение той же задачи, когда в уравнении (25) плюс, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ при $a \geq 1$. Если $0 < a < 1$, то это решение возрастает на $[0; c)$, где $c = \sqrt{-2 \ln(1 - a)/a} = \sqrt{2(1 + a/2 + a^2/3 + \dots)}$.*

На основе разложения решений этих начальных задач в степенные ряды, с учетом монотонности решений и применения аппроксимаций Паде, предложены приближенные решения

этих задач в форме: когда прочность минимальна на продольной оси симметрии слоя,

$$X(x) = \frac{ax}{1 - \left(\frac{2}{3}a + \frac{\lambda^2}{6}\right)x^2}, \quad \text{где } a = b \left(1 - \frac{\lambda^2 x_F^2}{6}\right) \left(1 + \frac{2bx_F}{3}\right)^{-1} x_F^{-1};$$

когда прочность максимальна на продольной оси симметрии слоя,

$$X(x) = \frac{ax}{1 - \left(\frac{2}{3}a - \frac{\lambda^2}{6}\right)x^2}, \quad \text{где } a = b \left(1 + \frac{\lambda^2 x_F^2}{6}\right) \left(1 + \frac{2bx_F}{3}\right)^{-1} x_F^{-1}.$$

Трудность исследования НС неоднородного слоя усугубляется отсутствием теории, аналогичной теоремам Хенки о свойствах характеристик (линий скольжения) при плоской деформации для однородного материала. В работе [18] система уравнений пластического равновесия рассматривается в инвариантной форме; записываются уравнения характеристик; система интегрируется вдоль характеристик.

Лемма 2. *На характеристике*

$$\sigma_x + \sqrt{Z^2 - \tau_{xy}^2} \pm Z \arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} - Z(1 + \Delta) = \text{const}$$

(плюс для ξ -характеристик с положительным к оси OX углом наклона, минус для η -характеристик с отрицательным углом наклона), где

$$|\Delta| \leq \frac{|K_c - 1|\alpha^2}{2K_c(1 - K_c\alpha)}, \quad \text{если } K_c < 1; \quad |\Delta| \leq \frac{|K_c - 1|\alpha^2}{2K_c(1 - K_c\alpha)}, \quad \text{если } K_c > 1.$$

Лемма 2 позволяет при небольших α получить простые приближенные инварианты Римана на характеристиках: на η -характеристиках

$$\sigma_x = Z \left(\arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} - \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} + 1 \right), \quad \sigma_y = Z \left(\arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} + \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} + 1 \right);$$

на ξ -характеристиках

$$\sigma_x = Z \left(-\arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} - \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} + 1 \right), \quad \sigma_y = Z \left(-\arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} + \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} + 1 \right).$$

Эти формулы позволяют вычислить касательные и нормальные напряжения на контактной поверхности (участок FA) в критический момент нагружения, обобщающие формулы (20):

$$\tau_{xy}(x, \varkappa) = K_{\text{сл}}(K - 1) \left(1 + (K - 1)^2 / (4K)\right);$$

$$\sigma_y(x, \varkappa) = 2K_{\text{сл}} + \sigma_{\text{упр}}, \quad \sigma_{\text{упр}} = K_{\text{сл}}(K - 1)(3 - K)/2.$$

Эти результаты с точностью, определяемой леммой 2, позволяют получить зависимости между γ – углом наклона ξ -характеристики к оси OX , и напряжениями σ_x и σ_y :

$$\sigma_x = Z \left(\pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right) - \sin 2\gamma + 1 \right) + C; \quad \sigma_y = Z \left(\pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right) + \sin 2\gamma + 1 \right) + C; \quad (26)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = Z \left(\pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma \right) + 1 \right) + C \quad (27)$$

(плюс на η -, минус на ξ -характеристиках), которые при $Z \equiv 1$ обращаются в хорошо известные соотношения в теории плоской деформации. Из формул (26), (27) следует теорема.

Теорема 1. Пусть $\nu = \gamma - \frac{\pi}{4}$, точки A, B, C и D образуют (криволинейный) прямоугольник из характеристик: AB и DC – ξ -характеристики, DA и CB – η -характеристики. Тогда, с точностью, определяемой леммой 2,

$$Z(A)\nu(A) - Z(B)\nu(B) = Z(D)\nu(D) - Z(C)\nu(C).$$

$$\sigma(A) - Z(A) - (\sigma(B) - Z(B)) = \sigma(D) - Z(D) - (\sigma(C) - Z(C)).$$

При постоянной функции Z последнее равенство приводит к (первой) теореме Генки [6, с. 80 – 101]. Отсюда следует, что при переходе от одной характеристики к другой одного семейства вдоль характеристики другого семейства изменение величин $Z \cdot (\gamma - \pi/4)$ и $\sigma - Z$ не зависит от того, по какой характеристике другого семейства совершается переход. Нормальные напряжения в окрестности оси OX сечения прослойки (при $0 \leq x \leq x_F$) имеют вид:

$$\sigma_y = \lambda^{-2} (\operatorname{ch}(\lambda\kappa)X'(x_F) - \operatorname{ch}(\lambda y)X'(x)) + 2\lambda^{-2} (X^2(x) - X^2(x_F)) + 2K_{\text{сл}} + K_{\text{сл}}(K - 1)(3 - K)/2.$$

Постоянная интегрирования получена сопряжением решений в точке x_F (приближенное выражение для x_F найдено в форме

$$x_F \approx 1 - 4\kappa/(K + K_{\text{сл}});$$

при $K_{\text{сл}} = 1$ оно совпадает с (21).

3. Математическое моделирование НС пластического кольца (ортогонального оси ТЦО МП слоя) при осевом растяжении

Рассматривается система уравнений относительно напряжений и скоростей деформаций для осесимметричного случая:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (28)$$

$$(\sigma_r - \nu_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6; \quad (29)$$

$$\frac{\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}}{\sigma_r - \sigma_\varphi} = \frac{\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r}}{\sigma_z - \sigma_r} = \frac{\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}}{2\tau_{rz}}; \quad (30)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad r \neq 0. \quad (31)$$

Здесь σ_r – радиальное, σ_φ – кольцевое, σ_z – осевое нормальные, τ_{rz} – радиально-осевое касательное напряжения (безразмерные); v_z , v_φ и v_r – соответствующие (условные) скорости перемещений; (28) – уравнения равновесия (касательные напряжения $\tau_{\varphi r}$ и $\tau_{\varphi z}$ тождественно равны нулю, так как изгиб и кручение отсутствуют); (29) – условие пластичности Мизеса, (30) – ассоциированный закон течения Леви – Сен-Венана по теории течения (закон пропорциональности девиаторов скоростей деформаций и напряжений); (31) – условие сохранения

объема пластического тела в процессе деформирования (условие несжимаемости). Граничные условия $\tau_{rz}(r, 0) = 0$, $\tau_{rz}(0, z) = 0$. Обозначения: t – толщина оболочки, r_{cp} – радиус оболочки, r_0 – радиус срединной поверхности поверхности раздела течения (нормировкой по $t/2$ эти величины приводятся к безразмерным).

При исследовании НС осесимметричных тел с МП поперечным слоем при осевой нагрузке можно использовать ту же схему из трех этапов, что в плоском случае, но его реализация заметно сложнее по ряду причин. В задачах п. 1 указанной схемы больше уравнений и неизвестных; сложнее уравнения; система уравнений в напряжениях не замкнута. В задачах п. 2 приведенной схемы система уравнений не имеет гиперболического типа. Ситуацию удается улучшить введением гипотезы ГППС, вследствие чего система несколько упрощается и становится гиперболической. НДС кольцевого слоя (за исключением заведомо ошибочных работ) рассматривалось только в работах автора (с соавторами) [19, и др.].

Запишем ГППС в виде $v_z = W(z)$, где $W(z)$ – функция одной переменной z , требующая определения. Из ГППС и уравнения (31) следует, что

$$v_r = 0,5W'(z)(r_0^2 - r^2)r^{-1}.$$

Эта формула существенно отличает данную задачу от соответствующей задач при плоской деформации и для сплошного стержня. Из этих уравнений и системы (28) – (31) выводятся приближенные формулы для вычисления касательных напряжений. При решении при сделанных предположениях системы (28) – (31) получена, после упрощений и отбрасывания слагаемых, имеющих относительно $(r - r_0)r_0^{-1}$ порядок выше первого, приближенная формула

$$\tau = -\frac{Z(z)P(r)}{\sqrt{4 + Z^2(z)P^2(r)}}, \quad \text{причем} \quad -\frac{Z''}{Z} + \frac{P''}{P} + 2Z' + \left(\frac{P}{r}\right)' \frac{1}{P} = 0, \quad (32)$$

где $Z(z) = W''(z)/W'(z)$. Разделение переменных при решении уравнения из (32) дает $P = (r^2 - r_0^2)/(2r)$, $Z(z) = -A \operatorname{th}(Az)$, где постоянная A вычисляется, как в (21) (с заменой x_F на $r_F - r_0$). В [19] отмечается, что уравнение (29) можно записать в виде $(1 + \rho)(\sigma_z - \sigma_r)^2 = 4(1 - \tau^2)$, где малая величина ρ имеет порядок t^2/r_{cp}^2 и потому может быть исключена. Тогда система (28), (29) может быть записана в виде (15), (16) с заменой переменных x на $r - r_0$ и y на z . Поэтому в приближенном варианте применимы результаты п. 3 относительно свойств характеристик и, как следствие, вычисляются как в плоском случае координаты r_F , значения напряжений в критическом состоянии на участке контактной границы AF и постоянная A . Нормальные напряжения

$$\sigma_z = -\frac{2r - r_0}{2r} \ln \operatorname{ch}(Az) - \frac{A^2(r - r_0)^2}{4} + \ln \frac{r}{r_0} + 2 + C, \quad (33)$$

$$C = \frac{(K - 1)(3 - K)}{2} + \frac{\ln \operatorname{ch}(A\kappa)}{2} + \frac{A^2}{4} \left(1 - \frac{4\kappa}{K + 1}\right)^2.$$

Показано, что цилиндрическая поверхность раздела течения в критическом состоянии оболочки расположена ближе к внутренней поверхности трубы. Этот вывод подтверждается экспериментами и согласуется с аналогичным явлением, которое происходит при растяжении однородной трубы, ослабленной кольцевым утонением стенки под действием растягивающей осевой нагрузки. Однако указанное смещение невелико – например, при $K = 1, 2$; $\kappa = 0, 2$ $r_0 - r_{cp} = 0, 56/r_{cp}$. При исследовании распределения нормальных напряжений по сечению слоя отмечено, как и в случае плоской задачи, что прилегающие к контактным поверхностям участки МП слоя раньше достигают состояния пластической неустойчивости.

Контактное упрочнение МП поперечного слоя в трубе несколько меньше, чем в полосе (на 1...2% в зависимости от r_0 , K и κ); если этим различием пренебречь, в данном случае оказываются верными формулы для вычисления $\sigma_{упр}$ (22) и (23). Сохраняются также формулы для вычисления скоростей смещений и скоростей деформаций (при соответствующей замене в обозначениях переменных).

4. Математическое моделирование НС неоднородных соединений, содержащих трещиноподобные дефекты различного расположения, в условиях плоской деформации

Большой цикл работ о влиянии дефектов в МП и БП прослойках на несущую способность неоднородных соединений (см. монографию [20] и литературу в ней) основан на решении Прандтля задачи о напряженном состоянии бесконечной пластической полосы, либо использовании в методе линий скольжения в качестве характеристик (линий скольжения) циклоид, что восходит к решению Прандтля. Однако касательные напряжения в решении Прандтля постоянны по длине слоя, в то время как на практике они могут изменяться по толщине оболочки в широком диапазоне. Другим важным недостатком этих работ и работы [21] является использование непрерывных ММ НС в БП части соединения. В работе [23] показано, что в БП части существует лишь обобщенное решение системы (15), (16). Разрывность решений в БП части возникает в силу того, что в БП части, вследствие ослабляющего влияния примыкающей МП части, поля характеристик, определяемые контактной и свободной границами, накладываются друг на друга. Уравнения равновесия, разумеется, выполняются на линии разрыва, но нормальные напряжения, действующие в направлении этой линии, терпят скачок. Углы наклона характеристик к линии разрыва, расположенные с разных сторон от нее и имеющие эту линию в качестве общей стороны, равны друг другу, что позволяет в каждом конкретном случае находить обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее эту линию.

В работе [23] исследовано НС механически неоднородного соединения, имеющего в сечении форму полосы с распределением прочности по схеме МП – БП, и содержащего трещиноподобный дефект на границе между МП и БП участками либо в БП части, внутри или на свободной поверхности (рис. 3). Расположение вблизи дефекта МП участка снижает

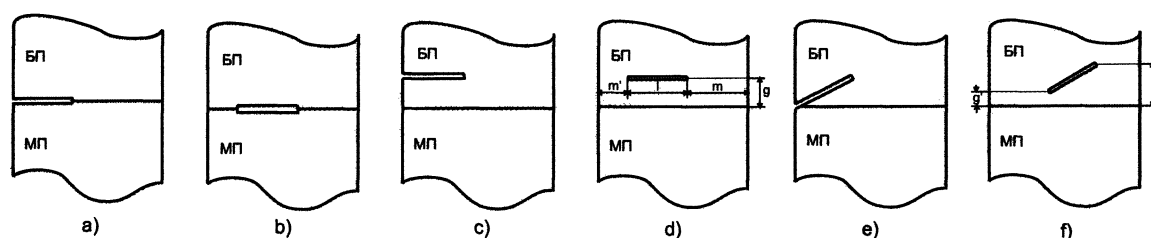


Рис. 3. Варианты расположения трещиноподобного дефекта в окрестности контактной границы между БП и МП частями соединения в БП части

прочность соединения. Например, при наружном дефекте в БП части соединения (см. рис. 3, с) среднее критическое напряжение

$$\sigma_{укр}^{БП} = (K + 1) \left(1 - \frac{l}{t} + \frac{3(K - 1)g}{2t} \right), \quad 0 \leq \zeta \leq 1/3;$$

$$\sigma_{укр}^{БП} = 2K(1 - l/t), \quad \zeta \geq 1/3,$$

где $\zeta = g/(t - l)$. Общая тенденция – при приближении дефекта к контактной или свободной поверхности величина критического напряжения снижается, причем, если дефект расположен достаточно далеко от контактной поверхности, влияние МП части соединения отсутствует.

Более сложные задачи возникают при исследовании НС БП слоев, содержащих дефекты, т. е. при схеме распределения прочности по полосе МП – БП – МП. Наличие второй контактной границы оказывает значительное усложняющее влияние на НС БП участка. Рассматриваемая ситуация распадается на большое количество случаев с существенно различными полями характеристик, приводящих к различным формулам для вычисления $\sigma_{ср}$. Эти случаи определяются размерами и расположением относительно друг друга «зон влияния МП участков» (один из простых вариантов показан на рис. 4, а) – области FQ_1QA и $F'Q'_1Q'A'$), а «зоны влияния» зависят от механических и геометрических параметров. Если нетто-сечение пересекает только одну «зону влияния» (см. рис. 4, а и б), методика вычисления $\sigma_{ср}$ не отличается от случая схемы МП – БП. Наиболее сложный вид линия

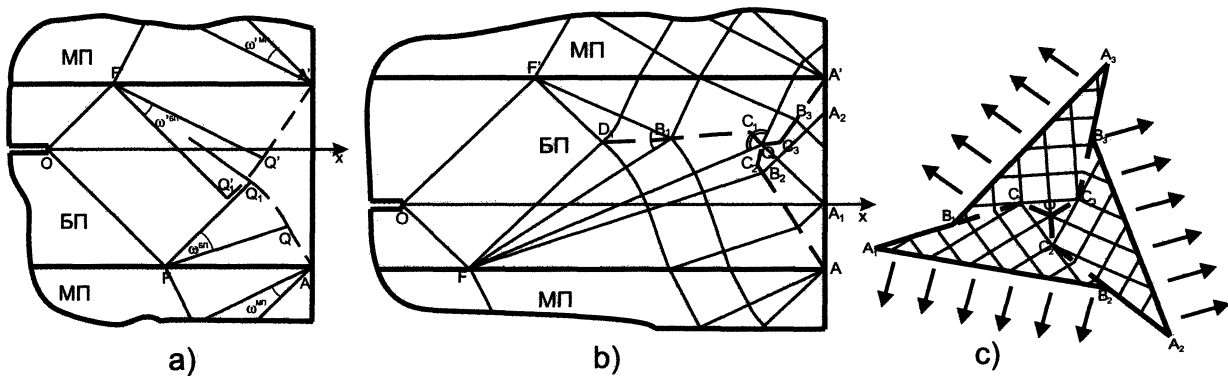


Рис. 4. Поле характеристик и линии разрыва напряжений в соединении типа МП – БП – МП с дефектом в БП слое: а) зоны влияния МП участков не пересекаются; б) зоны влияния МП участков накладываются друг на друга; в) поле характеристик и линии разрыва напряжений в области с тремя различными направлениями действия внешней нагрузки

разрыва напряжений имеет в области пересечения трех «зон влияния» – МП участков и свободной поверхности. На рис. 4, в) изображена «модельная» ситуация (внешняя нагрузка действует на образец, как показано на рис.). В любой точке линии разрыва напряжений (пунктирной на рис. 4, в) подходящие к ней характеристики образуют с ней равные углы с разных ее сторон.

Исследование НС МНС, имеющего в сечении форму полосы с распределением прочности вида МП – БП, и содержащего трещиноподобный дефект в МП части, внутри или на свободной поверхности, проводится аналогично. Наличие БП участка вблизи дефекта повышает прочность соединения. Количественные оценки этого повышения в зависимости от механических и геометрических параметров находятся по той же схеме.

Вопросам, связанным с исследованием НС МНС, главным образом СвС, содержащих дефекты в МП прослойке (распределение прочности вида МП – БП – МП), посвящена обширная литература (см. работу [20] и литературу в ней). В основе теоретических рассуждений этих работ явно или неявно лежит идея сведения задачи к изучению НС модельной прослойки, не содержащей дефекта. Ниже будет рассмотрена в качестве примера такая задача в более общей постановке (дефект в спиральном МП слое).

5. Математическое моделирование и исследование НДС спиральных МП слоев в ТЦО

5.1. ММ НДС спиральных МП слоев прямоугольного сечения

В работах [24, 26, и др.] разрабатывались и изучались ММ НДС МП слоя, расположенного под углом к направлению внешней нагрузки. Несмотря на важность этой проблематики в приложениях к исследованию несущей способности ТЦО со спиральными МП прослойками, в т. ч. спиральношовных ТВД, работы других авторов на эту тему отсутствуют. Рассмотрим сначала НДС наклонного к направлению внешней нагрузки МП слоя в листовом образце. Напряжения в ОМ и на контактных поверхностях между ОМ и МП слоем можно записать в виде (направления координатных осей представлены на рис. 5, ν – угол между направлением σ_1 и направлением слоя):

$$\sigma_y = B\sigma_2, \tau_{yz} = 0,5C\sigma_2, B = \cos^2 \nu + m \sin^2 \nu, C = (1 - m) \sin 2\nu, m = \sigma_1/\sigma_2. \quad (34)$$

В действительности с увеличением нагрузки и переходе МП слоя в пластическое состояние

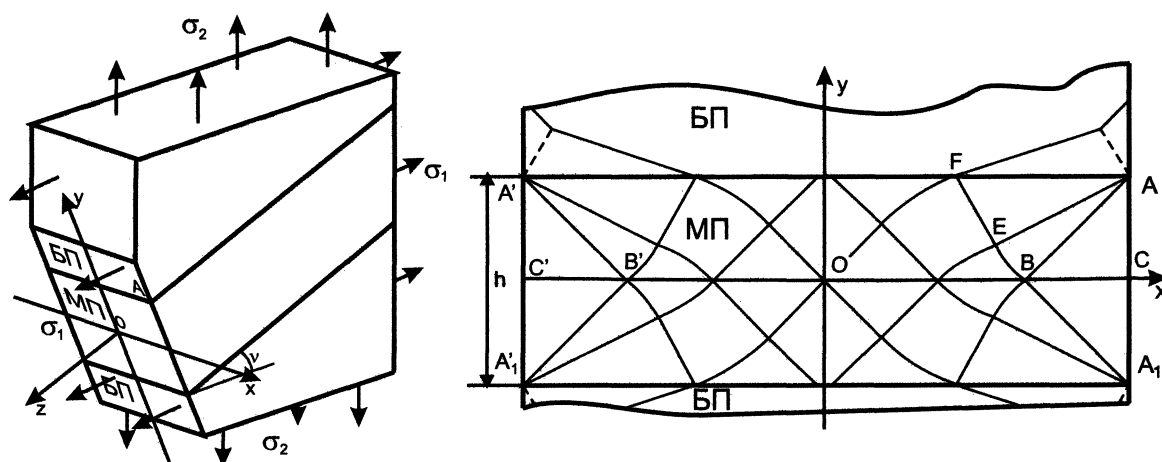


Рис. 5. Наклонный МП слой в плоском листовом образце и его поперечное сечение с сеткой характеристик

напряжения σ_y в МП слое на контактной поверхности становятся переменными по толщине образца. Тогда первое уравнение (34) следует записать в виде $\sigma_{уср} = B\sigma_2$, где $\sigma_{уср}$ – среднеинтегральное значение σ_y по толщине образца. Так как в направлении слоя НДС в нем не изменяется, все компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций не зависят от z . Поэтому уравнение несжимаемости запишется в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

а из условия пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций следует, что

$$2\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y.$$

Так как толщина слоя (по y) мала по сравнению с длиной (измеряемой в направлении оси Oz), касательные напряжения τ_{yz} можно считать постоянными по толщине слоя, т. е. предполагать, что второе равенство в (34) выполняется для внутренних точек слоя. Однородность

НС в направлении длины слоя влечет равенство нулю касательных напряжений в плоскостях, параллельных плоскости Oxz : $\tau_{xz} = 0$. В силу допущений условие пластичности Мизеса принимает вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 - 4\tau^2,$$

где $\tau = \tau_{yz}$ одинакова для всех точек слоя, $\tau = 0,5C\sigma_2$, k – пластическая постоянная, $k = \sigma_i/\sqrt{3}$. В момент ОПУПД $k = k^* = \sigma_i^*/\sqrt{3}$, σ_i^* – интенсивность напряжений при ОПУПД.

Несущая способность листового образца определяется критической величиной напряжений σ_1^* и σ_2^* , а при их фиксированном отношении m , предельной величиной σ_2^* . Пусть g^* – значение g при $\alpha = \alpha^*$. Из соотношений (34) и формулы

$$\sigma_{усп} = (2 + \sigma_{усп}(\alpha, \kappa)) \sqrt{k^2 - \tau^2} = 2g\sqrt{k^2 - \tau^2}, \text{ где } g = 1 + 0,5\sigma_{усп}(\alpha, \kappa), \quad (35)$$

получим для критических значений σ_2 и τ выражения:

$$\sigma_2^* = \frac{2g^*k^*}{\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}; \quad \tau^* = \frac{Cg^*k^*}{\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}, \quad (36)$$

причем функция $\sigma_{усп}(\alpha, \kappa)$ из (35) определена по одной из формул (22) или (23) в зависимости от κ .

При наклонном, по отношению к направлению наибольшего главного напряжения, направлении слоя, наличие касательных напряжений τ , действующих вдоль слоя, уменьшает несущую способность соединения. В этом случае аналогом коэффициента механической неоднородности является величина

$$K_{\text{нак}} = \sqrt{\frac{(k^{\text{БП}})^2 - \tau^2}{k^2 - \tau^2}} = K\sqrt{1 + \frac{K^2 - 1}{K^2} \frac{g^2 C^2}{B^2}}.$$

Всегда при $\nu \neq 0$ $K^{\text{нак}} > K$, поэтому можно сказать, что переход к наклонному слою равносильно увеличению механической неоднородности соединения, т. е. уменьшению прочности слоя. Зависимость величины $K^{\text{нак}}$ от ν на отрезке $\nu \in [0; \pi/2]$ при $m \neq 1$ имеет единственный экстремум в точке

$$\nu^* = 0,5 \arccos[(m - 1)/(1 + m)]. \quad (37)$$

Рассмотрим ММ НДС ТЦО со спиральным МП слоем. Можно показать, что зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций в слое имеет вид

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g} \frac{pR_0}{t_0} \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2} B}{\sqrt{B^2 + g^2 C^2}} \varepsilon_i\right). \quad (38)$$

Используя КСМ, можно вычислить критические деформации в МП слое, соответствующие моменту ОПУПД, при задании упрочнения зависимостями (3) или (4) при $b = 0$ (соответственно):

$$\varepsilon_i^* = \frac{2n\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}{\sqrt{3}\sqrt{1 - \alpha^{*2}B}} \quad \text{или} \quad \varepsilon_i^* = \frac{2n\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}{\sqrt{3}\sqrt{1 - \alpha^{*2}B - 2a\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}}.$$

На этой основе вычисляется критическое давление. Сначала, с использованием последних формул, можно найти критические напряжения в МП слое. Для случая (3)

$$\sigma_i^* = \beta\sigma_B, \quad \beta = \left(\frac{2e}{\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{B^2 + C^2(g^*)^2}}{B\sqrt{1 - (\alpha^*)^2}}\right)^n. \quad (39)$$

Если $\nu = 0$ (слой направлен по образующей), $\beta = (2e/\sqrt{3(1-\alpha^{*2})})^n$. Эта формула не зависит от m , т. к. здесь ОМ, по предположению, не достигает состояния неустойчивого пластического деформирования. Подстановкой формулы (39) в формулу (38) определяются критическое давление p^* и условное расчетное кольцевое напряжение $\sigma_\varphi^{усл}$:

$$p^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{\sigma_B t_0}{R_0} S, \quad \sigma_\varphi^{усл} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} S \sigma_B, \quad S = \frac{g^* \left(\sqrt{B^2 + C^2(g^*)^2}\right)^{n-1}}{B^n \left(\sqrt{1 - (\alpha^*)^2}\right)^n}. \quad (40)$$

График зависимости коэффициента S от угла ν представлен на рис. 6. Видно, что на отрезке $[0; 0,5]$ коэффициента S , а с ним критическое давление p^* не возрастают. Следовательно, наклонное расположение МП слоя выгодно лишь при углах наклона больше 30° .

График зависимости отношения критических давлений в спиральношовной ($\nu = \pi/4$) и прямошовной трубах $p_{сп}/p_{пр}$ от m построен на рис. 7 для $g = 1, 0; 1, 1; 1, 2$, $n = 0, 15$. Видно, что при отсутствии внешних осевых нагрузок ($m = 0, 5$) в спиральношовных трубах допустимо более высокое давление (на 5% ... 15%). С ростом контактного упрочнения (фактически – параметра механической неоднородности K) преимущество спиральношовных труб уменьшается. Более высокий показатель упрочнения металла прослойки свидетельствует в пользу спиральношовных труб. Прямошовные трубы имеют преимущество при существенных осевых нагрузках, особенно при сжимающих нагрузках.

Если относительная толщина продольного слоя велика, $\kappa \approx 1$ или больше (но мала по сравнению с диаметром), то контактное упрочнение в прослойке отсутствует, и формулу (40) можно записать в виде: $p^* = (2/\sqrt{3})^{n+1} \sigma_B t_0 / R_0$. Сравнение ее с формулой (8) свидетельствует о наличии упрочнения ТЦО, содержащей МП слой, отличного от деформационного и контактного. Назовем его *конструкционным упрочнением*, так как его появление связано с особенностями работы всей конструкции (трубы в данном случае). Коэффициент этого

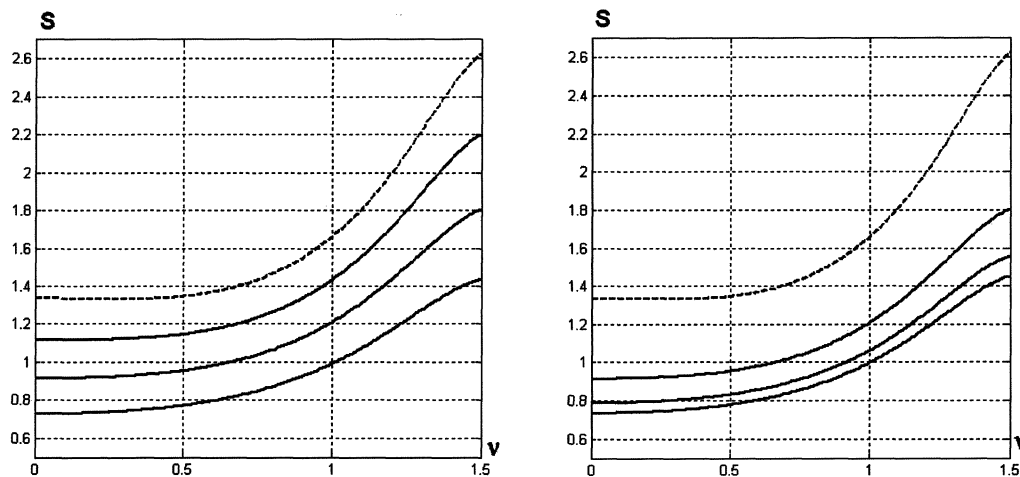


Рис. 6. Зависимость коэффициента S в формуле критического давления при $m = 0, 5$ от угла наклона ν МП слоя с поверхностным дефектом и без, когда: а) $\kappa = 0, 2; l/t = 0$ – формула (40), пунктирная линия; $l/t = 0, 1; 0, 2; 0, 3$ – формула (43), сплошные линии, сверху вниз соответственно; б) $\kappa = 0, 2; l/t = 0$ – формула (40), пунктирная линия; $\kappa = 0, 2; 0, 3; 0, 4; l/t = 0, 2$ – формула (43), сплошные линии, сверху вниз соответственно

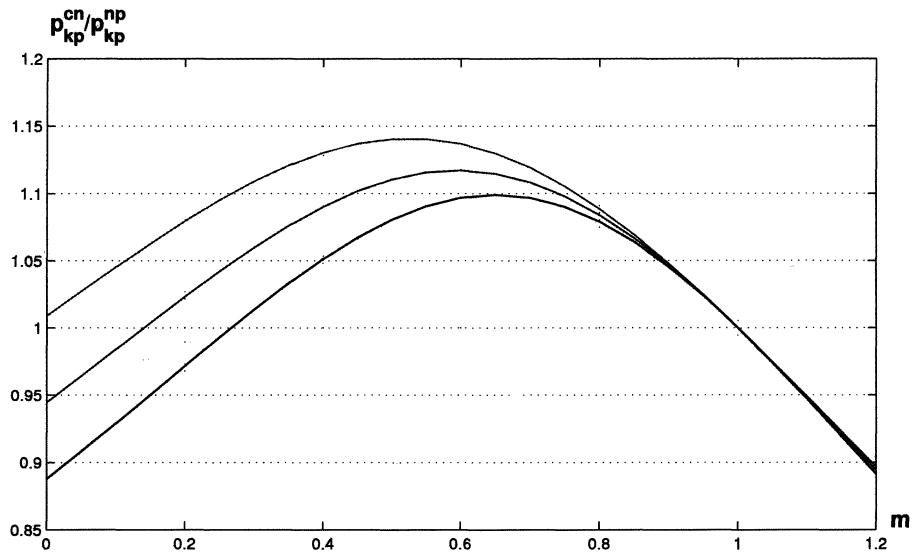


Рис. 7. Зависимость отношения критических давлений в спиральношовной и прямошовной трубах от коэффициента двухосности нагружения m

упрочнения при упругом деформировании основного металла, отсутствии осевых напряжений и упрочнении МП материала по степенному закону $\sigma_i = A\epsilon_i^n$ равен числу 2^n . Например, при $n = 0,10$ это 1,072.

5.2. ММ НДС спиральных МП слоев с поверхностными дефектами

В работах [25, и др.] разрабатывались и изучались ММ НДС МП слоя, расположенного под углом к направлению внешней нагрузки и содержащего поверхностные дефекты. В этих работах были вычислены критические напряжения в слое и критическое давление в ТЦО в зависимости от соотношений между внешними нагрузками, механическими и геометрическими параметрами ТЦО, МП слоя и дефекта. Моделирование НДС МП слоя, содержащего на своей срединной поверхности наружный дефект, основано на сведении задачи к исследованию НДС некоторого бездефектного слоя с условной относительной толщиной κ_D , и применении к этому изложенной выше методики.

Тонкостенность оболочки позволяет рассматривать, в качестве модельного, плоский листовый образец, содержащий слой из МП, чем основной, металла, вдоль которого с одной стороны образца, посередине слоя, имеется протяженный надрез прямоугольной формы, моделирующий наружный дефект (рис. 8). Ширина дефекта постоянна, но может быть произвольной – от нуля и до толщины слоя, глубина – произвольной, но тоже постоянной. Предполагается, что на образец в двух ортогональных направлениях действуют равномерно распределенные нагрузки σ_1 и σ_2 (см. рис. 8). Для определения НДС материала слоя необходимо знать координаты точки раздела пластического течения (точки O на рис. 8), которая находится в центре поперечного сечения слоя при неглубоких дефектах, и сдвигается при глубоких. Положив $d = \Delta/2 + l - h/2$ (см. рис. 8), $\kappa_D = h/(2t_1)$, получим два варианта решения. Отсюда

$$\sigma_{ср}^* = 2g_D^* \sqrt{k^2 - \tau^2},$$

$$g_D^* = 1 - l/t + 0,5 (\kappa/\kappa_D) \sigma_{упр}^D \quad \text{при } d \geq 0, \tag{41}$$

$$g_D^* = 1 - l/t + 0,5 \sigma_{упр}^D \quad \text{при } d \leq 0. \tag{42}$$

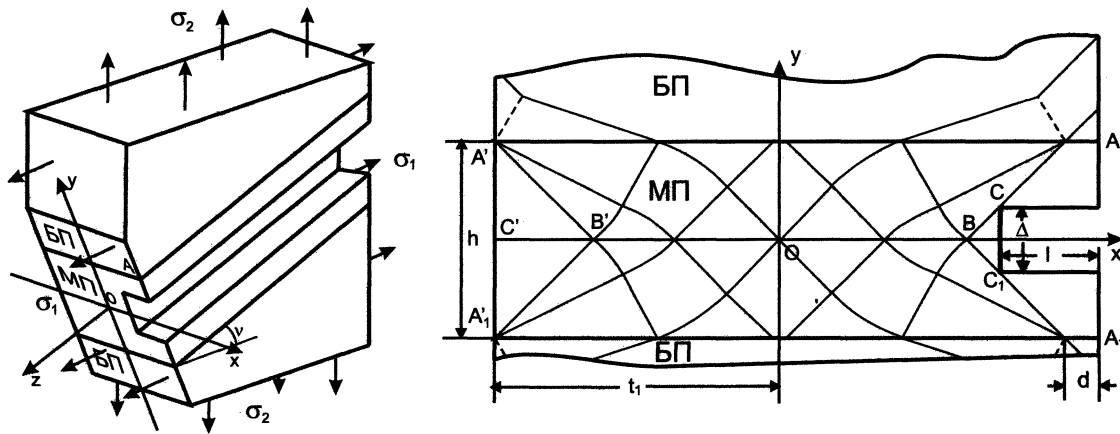


Рис. 8. Наклонный МП слой с поверхностным дефектом в плоском листовом образце и его поперечное сечение с сеткой характеристик. Координатные оси – линии раздела течения

Положительная величина $\sigma_{\text{упр}}^D$ зависит от α и κ_D и характеризует контактное упрочнение слоя, содержащего дефект, и может быть вычислена по одной из формул (22) или (23) с заменой в них κ на κ_D . σ_2^* и τ^* вычисляются по формулам (36). При наличии дефекта формула для вычисления критической интенсивности деформаций имеет такую же структуру, как и без дефекта; надо лишь в формуле для вычисления β (39) заменить g^* на g_D^* . Отсюда следует, что на величину пластической постоянной МП слоя $k^* = \beta\sigma_B/\sqrt{3}$ при наличии контактного упрочнения влияют:

- 1) механические свойства материала слоя, характеризующиеся пределом прочности σ_B и показателем упрочнения n ;
- 2) коэффициент механической неоднородности соединения K ;
- 3) относительная толщина слоя κ ;
- 4) угол наклона слоя ν ;
- 5) коэффициент двухосности нагружения стенки трубы m ;
- 6) относительные размеры дефекта l/t и Δ/t при его наличии.

Коэффициент механической неоднородности K многие авторы [15, 20, 14, и др.] оценивают величиной

$$K = K_B = \sigma_B^{\text{БП}}/\sigma_B.$$

В действительности K зависит от многих величин, прежде всего от параметров упрочнения МП и БП материалов ТЦО, однако можно показать, что приведенная оценка для сварных соединений дает ошибку всего в 1%...4%.

Формула для вычисления критического давления p^* в трубопроводе с МП спиральным слоем, содержащем поверхностный дефект, аналогична формуле (40):

$$p^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{S(t_0 - l)}{R_0} \sigma_B;$$

$$S = g_D^* B^{-n} ((B/g_D^*)^2 + C^2)^{0,5(n-1)} ((1 - (\alpha^*)^2)^{-0,5n}), \quad (43)$$

где g_D^* вычисляется, в зависимости от знака d , по (41) или (42).

Параметр S в формуле (43) определяет, в какой степени коэффициент двухосности нагружения, наклон МП слоя, его относительная толщина, а также размеры содержащегося в нем поверхностного дефекта влияют на критическое давление. График зависимости коэффициента S от ν для различной глубины дефекта и толщины прослойки приведен на

рис. 6. Наибольшей величины p^* при $\nu = \pi/4$ достигает при m , близком к числу 0,5, но не совпадающем, как правило, с ним.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ – проекты 01-01-96427-р2001урал, 05-08-18179-а.

Литература

1. Дильман, В.Л. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистральных газонефтепроводов / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 179 – 185.
2. Дильман, В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 165 – 175.
3. Swift, H. Plastic instability under plane stress / H. Swift // J. Mech. and Phys. Solids. – 1952. – № 1. – Р. 1 – 18.
4. Ковальчук, Г.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11 – 16.
5. СНиП 2.05.06-85*. Магистральные трубопроводы. – М.: Госстрой России, 2003. – 59 с.
6. Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению: сб.: пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 439 с.
7. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – Киев: Наук. думка, 1976. – 416 с.
8. Дильман, В.Л. Об одной новой формуле для вычисления напряжения пластического течения при оценке допустимости коррозионных дефектов / В.Л. Дильман // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11, вып. 2. – С. 327 – 328.
9. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 38 – 48.
10. Денис, Р.М. Оценка допустимости коррозионных дефектов / Р.М. Денис // Трубопроводный транспорт нефти. – 1997. – № 4. – С. 28 – 34.
11. Дильман, В.Л. Анализ пластической устойчивости осевых и спиральных мягких прослоек в цилиндрической тонкостенной оболочке / В.Л. Дильман // Обзорные приклад. и пром. математики. – 2007. – Т. 14, вып. 4. – С. 704 – 705.
12. Качанов, Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 63 – 67.
13. О влиянии степени механической неоднородности на статическую прочность сварных соединений / О.А. Бакши, В.В. Ерофеев, М.В. Шахматов и др. // Сварочное производство. – 1983. – № 4. – С. 1 – 4.
14. Шахматов, М.В. Инженерные расчеты сварных оболочковых конструкций / М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Челябинск: ЧГТУ, 1995. – 229 с.
15. Когут, Н.С. Несущая способность сварных соединений / Н.С. Когут, М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Львов.: Свит, 1991. – 184 с.
16. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв.РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 115 – 124.

17. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв.РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 141 – 148.
18. Дильман, В.Л. Исследование системы уравнений напряженного состояния неоднородного пластического слоя / В.Л. Дильман // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Ильи Нестеровича Векуа (Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г.): тез. докл. – Новосибирск, 2007. – С. 136 – 137.
19. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии пластического кольца при растяжении / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 2. – С. 109 – 120.
20. Шахматов, М.В. Работоспособность и неразрушающий контроль сварных соединений с дефектами / М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев, В.В. Коваленко. – Челябинск: ЦНТИ, 2000. – 227 с.
21. Дильман, В.Л. Влияние дефекта более прочного участка сварного соединения на несущую способность прямошовной трубы большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2003. – № 6. – С. 107 – 115.
22. Дильман, В.Л. Анализ напряженного состояния неоднородной полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Обзорение приклад. и пром. математики. – 2008. – Т. 15, вып. 3. – С. 463 – 464.
23. Дильман, В.Л. Разрывные решения краевой задачи системы уравнений пластического равновесия для неоднородной полосы с дефектами / В.Л. Дильман // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: тр. междунар. конф. (г. Стерлитамак, 24 – 28 июня 2008 г.): – Уфа, 2008. – Т. III. – С. 197 – 200.
24. Дильман, В.Л. Несущая способность спиральношовных труб большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2002. – № 6. – С. 11 – 15.
25. Дильман, В.Л. Влияние поверхностных дефектов на статическую прочность сварных швов спиральношовных труб / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2004. – № 2. – С. 16 – 19.
26. Дильман, В.Л. Анализ пластической устойчивости осевых и спиральных мягких прослоек в цилиндрической тонкостенной оболочке / В.Л. Дильман // Обзорение приклад. и пром. математики. – 2007. – Т. 14, вып. 4. – С. 704 – 705.

Кафедра общей математики,
Южно-Уральский государственный университет
dilman49@mail.ru

Поступила в редакцию 24 февраля 2009 г.

**РАЗРАБОТКА, ВЕРИФИКАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВАННОГО
НА МНОГОБЛОЧНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ
РАСПАРАЛЛЕЛЕННОГО ПАКЕТА ОТКРЫТОГО ТИПА VP2/3
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ, ПРИКЛАДНЫХ
И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ЗАДАЧ АЭРОМЕХАНИКИ И ТЕПЛОФИЗИКИ**

*С.А. Исаев, А.Г. Судаков, П.А. Баранов, А.Е. Усачов, С.В. Стрижак,
Я.К. Лоханский, С.В. Гувернюк*

**DEVELOPMENT, VERIFICATION AND APPLICATION
OF THE PARALLELED PACKAGE OF THE OPEN TYPE VP2/3 BASED
ON MULTIBANK COMPUTING TECHNOLOGIES FOR SOLVING
FUNDAMENTAL, APPLIED AND OPERATIONAL PROBLEMS
IN AEROMECHANICS AND THERMAL PHYSICS**

*S.A. Isaev, A.G. Sudakov, P.A. Baranov, A.Eu. Usachov, S.V. Strizhak,
Ja.K. Lokhansky, S.V. Guvernjuk*

Дан генезис развития многоблочных вычислительных технологий (МБТ) и пакета VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D-версии) для решения задач вихревой гидромеханики и теплообмена в рамках подхода, основанного на уравнениях NS-RANS&URANS. Особое внимание уделяется апробации модели переноса сдвиговых напряжений Ментера (MSST) применительно к расчету отрывных течений. Верификация МБТ и VP2/3 проводится на тестовых задачах, имеющих экспериментальные аналоги. Пакет применен для решения фундаментальных проблем смерчевой интенсификации теплообмена около луночных рельефов и управления обтеканием тел с вихревыми ячейками. Также прогнозируется задымление залов метрополитена при пожаре в вагоне поезда, предупреждение опасного сдвига ветра в аэропортах, обоснование решения задач строительной аэродинамики.

Ключевые слова: многоблочные вычислительные технологии, уравнения Навье – Стокса, модели турбулентности, пакет VP2/3, тестирование

The authors provide genesis of development of the multibank computing technologies (MCT) and package VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D-versions) for solving the problems of vortical hydrodynamics and heat exchange within the framework of the approach based on the equations NS-RANS&URANS. They pay special attention to the approbation of the Menter shearing stress translation model (MSST) applying to the calculation of the detached flows. The MCT and VP2/3 verifications are carried out on the basis of the test problems which have experimental analogs. The package is applied to solving the fundamental problems of tornadic heat transfer enhancement near the alveolar relief as well as to the control of flow around bodies with vortical cells. The authors also forecast fumigation of the subway halls in case of fire in the carriage, prevent of dangerous wind shift in the airports, and verify solving of building aerodynamics problems.

Keywords: multibank calculating technologies, Navier – Stokes equations, turbulence models, package VP2/3, testing

1. Введение

В области применения вычислительной техники определенно наметился ренессанс, связанный с восстановлением в научно-технических и учебных организациях крупных вычислительных центров подобно тем, которые существовали в них полтора-два десятка лет назад и были расформированы, поскольку оказались неспособными выдержать конкуренцию со стороны персональных компьютеров. В рамках национальных проектов РФ осуществляется поставка высокопроизводительных систем в ряд университетов (МГУ, ТГУ, НГУ и др.). Их стоимость составляет десятки миллионов долларов. Они ориентированы, прежде всего, на решение проблем нефтяной и газовой отрасли, нанотехнологий, производства новых лекарств, астрофизики, аэрокосмической отрасли, анализа финансовых рынков, киноиндустрии и т.д.

Современное состояние численного моделирования в актуальных областях аэромеханики и теплофизики характеризуется широким распространением коммерческих многофункциональных *CFD* – пакетов прикладных программ, которые являются продуктами эволюции первоначально исследовательских комплексов (написанных, как правило, на ФОРТРАНе) и объектно-ориентированных систем программирования. Разработка универсальных коммерческих пакетов типа *PHOENICS*, *STAR-CD*, *ANSYS*, *FLUENT*, *CFX* во многом связывается с прогрессом в персональных компьютерах и их широким использованием, в том числе в распараллеленных версиях. На определенном этапе развития вычислительной гидродинамики указанные пакеты, безусловно, сыграли положительную роль. Однако сейчас все заметнее их тормозящее влияние на развитие численных исследований особенно в научной и учебной сферах. Причины лежат не только в сложившемся монополизме производителей пакетов и закрытости их «ядра». Главное – «несвободность» пакетных технологий. Это признают даже основатели *CFD* и классики пакетных технологий, такие как Д. Сполдинг.

Альтернатива коммерческим пакетам заключается в развитии системы открытых пакетов, подобных *OPEN FOAM (Field Operation and Manipulation)*. Разработчиком указанного пакета является ученик А. Госмена Н. Jasak. Очевидно, что сохраняются общими структура пакета, его наполнение каталогами математических моделей. Однако методические элементы имеют особенности. Тем более важно обеспечить свободный доступ к ним и осознанный подход пользователя к решению стоящих перед ним проблем. Последнее может осуществляться через интернет-сайты, однако важную роль также играют семинары и конференции по проблемам открытых пакетов, где возможны прямые контакты с разработчиками. Представляется актуальным, в дополнение к текущим национальным проектам по поставке оборудования, не упустить вопросы создания отечественного программного обеспечения.

За последние десятилетия в РФ созданы и успешно развиваются специализированные программные комплексы, не уступающие по ряду характеристик зарубежным аналогам. Это известные пакеты *FlowVision*, *SINF*, *VP2/3*, *GDT* и многие другие. Имеются успешные разработки в области создания эффективных математических моделей, например, *DES* М.Х. Стрельца, модели многофазных сред Л.И. Зайчика и А.Н. Осипцова. Также значительны продвижения в сфере создания новых численных схем. В работе сделан акцент на оригинальных многоблочных вычислительных технологиях (*VP2/3*).

2. Расчетная методология

Вычислительная гидродинамика (*CFD*) – наука, рожденная в результате соединения вычислительных методов (прикладной математики) и математических моделей гидромеханики, претерпела стремительное развитие в 20 веке, прежде всего, благодаря бурному прогрессу вычислительной техники (компьютеров), и практически сформировалась при

жизни одного поколения исследователей. В своей лекции на школе А.И. Леонтьева один из родоначальников *CFD* Б. Сполдинг отметил важность разработки метода контрольного объема для решения исходных уравнений для описания гидродинамических процессов – упрощенных и полных уравнений Навье – Стокса. Причем, на начальном этапе развития, который характеризовался использованием ЭВМ с очень ограниченными вычислительными ресурсами (БЭСМ4-6, М220), для их экономии управляющие уравнения записывались в преобразованных переменных: завихренность – функция тока. Использование грубых схем дискретизации членов уравнений – противопоточных схем с односторонними разностями – обуславливалось необходимостью обеспечить сходимость итерационного процесса решения задачи. Однако при моделировании циркуляционных течений с замкнутыми линиями тока обнаружилось, что такие схемы приводят к большим погрешностям, и для уточнения результатов требуется применять схемы высокого порядка аппроксимации, например, схемы Акаравы второго и четвертого порядка. Возникшая проблема, известная в *CFD* как проблема численной диффузии, также имела место при рассмотрении уравнений в естественных переменных: декартовых составляющих скорости – давления и была решена с помощью дискретизации конвективных членов уравнений противопоточной схемы с квадратичной интерполяцией Леонарда, а также за счет адаптации сетки под сдвиговые слои на границе отрывной зоны.

В 70 – 90-е гг. широко использовался подход, когда осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса замыкались с помощью двухпараметрической диссипативной модели турбулентности – $k - \epsilon$ – модели Лаундера – Сполдинга. При расчете течений с крупномасштабными вихрями для уточнения влияния кривизны линий тока на характеристики турбулентности применялись различные поправки, одна из которых, следуя Роди – Лещинеру, представляла собой функцию f_c от турбулентного числа Ричардсона Ri_t с дополнительной полуэмпирической константой C_c [$f_c=1/(1+Ri_t)$], на которую умножался коэффициент турбулентной вязкости μ_t . При решении тестовых задач о течении в квадратной каверне, обтекания диска и композиции диска и цилиндра показано, что выбор величины $C_c=0,1$ обеспечивает наилучшее согласование расчетных и экспериментальных данных. Также была обоснована применимость метода пристеночных функций в зонах отрывного течения.

На рубеже 90-х гг, в целом, сформировалась методология конечно-объемного решения задач, в дальнейшем (на индустриальном этапе развития *CFD*) нашедшая отражение в пакетных технологиях [1]. Ее основные черты следующие.

- Дискретизация исходных уравнений, записанных в приращениях зависимых переменных (включающих декартовы составляющие скорости – давление) в криволинейных неортогональных координатах, на центрированном шаблоне с расположением величин зависимых переменных в центре расчетной ячейки моноблочной сетки.
- Решение системы уравнений глобальными итерациями в рамках концепции расщепления по физическим процессам с использованием процедуры согласованной коррекции давления (*SIMPLEC*) с регуляризацией Рхи – Чоу на центрированной сетке при выборе параметра релаксации равным 0,1.
- Дискретизация конвективных членов уравнений переноса в неявной части по противопоточным односторонним разностям и в явной части по одномерной версии схемы Леонарда.
- Увеличение коэффициента диффузионного переноса в неявной части уравнений позволяет избежать высокочастотных осцилляций в решении.

- Повысить скорость сходимости глобальных итераций позволяет решение разностных уравнений методом неполной матричной факторизации (*SIP* – сильно неявная процедура Стоуна).

Расчетная методология прошла тестирование на двумерных задачах с фиксированной и нефиксированной точкой отрыва: о циркуляционном течении в квадратной каверне с подвижной крышкой, об отрывном течении в ступенчатом канале, о симметричном обтекании диска и цилиндра, поперечного кругового цилиндра. Особо следует отметить проведенное детальное исследование существенного (на порядок величины) снижения сопротивления тел при их тандемном расположении (тел с передней срывной зоной – ПСЗ) по сравнению с одиночными плохообтекаемыми телами.

3. Генезис MBT

Индустриальный этап развития *CFD* связан с разработкой продуктов – пакетов прикладных программ, коммерческих, универсальных и некоммерческих, как правило, специализированных. Среди первых из них, прежде всего, следует отметить зарубежные разработки, начало которым положил сполдингский *PHOENICS*, а наибольшую известность snискали *FLUENT*, *CFX*, *FIDAP*. Из отечественных пакетов, в основном ориентированных на решение конкретных задач, можно указать *FlowVision* Аксенова, *GasDynamics Tools* Зибарова и *SINF* Смирнова. Конечно, по объемам продаж пакеты первой волны не идут ни в какое сравнение со вторыми. Однако все пакеты объединяет общность структуры, включающей препроцессор, решатель и постпроцессор. Много общего можно найти в реализации расчетных процедур, хотя они, как правило, входят в закрытое для пользователя ядро решателя. До недавнего времени пакеты разделялись по использованию структурированных и неструктурированных сеток, причем проблема построения расчетных сеток позиционировалась как одна из важнейших в *CFD*. В принципе и сейчас, когда алгоритмы расчета на сетках различного типа унифицировались, и различия между пакетами сгладились, в суммарном времени решения задачи построение сетки занимает по-прежнему достаточно значительную долю. Во многом это связано с тем, что концептуально решение современных задач не намного продвинулось по сравнению со временем, когда господствовали моноблочные сетки. И даже то, что сегодня в расчетную практику вводятся многоблочные разномасштабные сетки, они несут на себе отпечаток не снятых ранее трудностей, т.к. основываются на компонентно-адаптивных по Катлеру поверхностях раздела, т.е. имеют общие границы подобластей. Неструктурированные сетки хороши тогда, когда они адаптированы к гидродинамическим особенностям течения, однако при этом такие сетки используют чрезмерный вычислительный ресурс даже с учетом возможностей современных компьютеров.

В известной степени, альтернативный подход, не требующий повышенного внимания к построению криволинейных согласованных сеток, базируется на применении структурированных многоблочных сеток с их частичным пересечением. Сам по себе такой подход давно известен (с 70-х гг). *Overlapping grids* (сетки с перекрытием) использовались, прежде всего, для дискретизации многосвязных областей. В монографии [2] такие сетки применены для расчета течения и теплообмена в пакете труб, причем в зоне пересечения сеток параметры определяются с помощью линейной интерполяции.

Проблематика обтекания толстых профилей с вихревыми ячейками десять лет назад инициировала разработку MBT, реализованных в специализированном пакете прикладных программ *VP2/3* [3]. Их несомненное достоинство состоит в улавливании разномасштабных элементов структуры отрывного течения на совокупности сеток простой топологии соответствующего масштаба, накладываемых друг на друга. В результате достигается не только значительная экономия сеточных ресурсов, но и повышение точности решения за счет раз-

мещения сеток только в желательных местах (определяемых интерактивно) с настройкой на рассчитываемую картину течения. Так, например, хорошее разрешение пристеночной области течения за счет введения отдельной мелкой сетки позволило без существенных затруднений перейти на современные низкорейнольдсовы модели турбулентности, такие как модель переноса сдвиговых напряжений Менгера (*MSST*) и модель вихревой вязкости Спаларта – Аллмареса (*SA*). Наложённая мелкая сетка в ближнем следе за круговым цилиндром способствовала надлежащему разрешению нестационарной вихревой дорожки Кармана. Особое внимание уделяется воспроизводству мелкомасштабного течения около скругленной острой кромки (например, в канале с круговой каверной), в окрестности которой вводится специальная сетка соответствующего масштаба. Также с помощью отдельной сетки выделяется зона расположения развивающегося сдвигового слоя. Вообще говоря, количество вводимых сеток неограниченно, и в пакете *VP2/3* средствами объектно-ориентированного программирования осуществляется их автоматическое соединение и установление связей между ними. Безусловно, введение дополнительной сетки, связанной с той или иной гидродинамической (или физической) особенностью течения (поля характеристик), настройка ее на соответствующий масштаб осуществляются в ходе получения предварительного решения. Важная роль при этом отводится интерполяции данных с сетки на сетку, и не только на этапе подготовки к решению задачи. Вообще рассматриваемый подход, связанный с необходимостью определения параметров в области пересечения сеток, представляется дискуссионным, поскольку существует опасение, что нарушается консервативность. Представляется оправданным, что используется та или иная интерполяционная процедура. В [3] численно доказана эквивалентность консервативной и линейной интерполяции. Также разработаны процедуры коррекции, обеспечивающие сохранение массы на пересекающихся многоблочных сетках.

Постепенно многоблочный подход был обобщен для анализа пространственных отрывных течений; для интерпретации нестационарных, в основном циклических режимов, в том числе при использовании скользящих сеток; для расчета конвективного теплообмена около луночных рельефов, в пакетах труб со струйными и вихревыми генераторами, в том числе при движении неоднородных сред (с переменными физическими свойствами типа масел). При этом развиты оригинальные подходы к интерпретации периодических граничных условий. Особо следует отметить развитие МВТ для расчета до-, транс-, сверх- и гиперзвуковых отрывных течений со скачками уплотнения. Краткий список решенных на основе МВТ задач:

- *Vortex Cell RANS* для кругового цилиндра, канала и толстого профиля с вихревыми ячейками (с 1996); $2D + k - \epsilon$, затем *MSST*, $3D$ -канал;
- сферическая лунка и пакет лунок на плоской стенке, в том числе на стенке канала (с 1999);
- прогнозирование задымленности залов метрополитена (1999);
- система прогнозирования опасного сдвига ветра (2000);
- теплообменники: пакет труб – удаленный цилиндр с периодическими граничными условиями (2003); труба с выступами (2004);
- вихревая и температурная дорожка за уединенным круговым цилиндром (с 1998), моделирование движения неоднородных сред типа масел;
- циклонный анализатор паров ртути (2002);
- расчеты на скользящих сетках: вращение мешалки в стакане и колебания маятника в вязкой жидкости (с 2003);

- сжимаемые течения со скачками уплотнения и теплообмен при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем, при обтекании угла сжатия, кругового цилиндра, шара и каплевидного тела (с 2004);
- вентиляция автомобильных тоннелей (с 2001);
- проектирование ветродвигателей (с 2003);
- циклические процессы вихреобразования за установленными на стенке кубом и параллелепипедом, а также при движении потока в узком канале с конической лункой (с 2006);
- строительная аэродинамика.

4. Особенности МВТ, верификация и применение *VP2/3*

Десятилетнее развитие оригинальной расчетной методологии, реализованной в пакетной среде, можно подытожить в следующем перечне отличительных особенностей:

- обобщенная (на несжимаемые и сжимаемые течения) процедура коррекции давления *SIMPLEC* в приращениях зависимых переменных на согласованных центрированных сетках; трактовка подхода Рхи – Чоу с константой 0,1;
- моделирование турбулентности в рамках *MSST* (2003) с учетом влияния кривизны линий тока на вихревую вязкость с дополнительной константой 0,02 в подходе Роди – Лещинера;
- оригинальные процедуры коррекции градиента давления и среднemasсовой температуры при использовании периодических граничных условий (*2D* и *3D*);
- сочетание пристеночных функций с граничными условиями для низкорейнольдсовых моделей (по Ментеру);
- оригинальный подход к заданию согласованных входных граничных условий на основе предварительного решения погранслошной задачи, позволяющий избежать типичных скачков в решениях, характерных для фиксированных профилей скорости типа $1/7$;
- оригинальный подход к трактовке циклических процессов на основе осреднения полей, рассчитанных на периоде колебаний поперечной интегральной нагрузки;
- автоматизированная интерактивная процедура согласования простых по топологии накладываемых с пересечением структурированных сеток, в том числе подвижных, настроенных на отображение многосвязных областей и разномасштабных характерных особенностей течения. Данный подход эквивалентен использованию адаптивных неструктурированных сеток, но отличается от него существенно меньшими вычислительными ресурсами, т.е. более экономичен. Он также обеспечивает надлежащую точность без измельчения сеток, т.к. автоматически разрешает масштабы уловленных гидродинамических особенностей;
- повышение вычислительной эффективности при перезаписи из *DELPHY* в *C++*;
- распараллеливание МВТ в рамках систем с распределенной памятью (*MPI*) под *WINDOWS* и *LINUX*.

История *CFD* демонстрирует развитие двух тенденций в области создания новых вычислительных платформ. С одной стороны, прогресс идет в направлении роста производительности процессоров, что выражается в появлении однопроцессорных супер-компьютеров (ранее супер-ЭВМ) на новой элементной базе. А с другой стороны, развивается концепция распараллеливания вычислений, которая сегодня нашла отражение в двух-четырёх-восьми ядерных процессорах, а также ранее в транспьютерных, а сейчас в многопроцессорных вычислительных комплексах. Каждая из тенденций имеет свои преимущества. Однако, если раньше параллельные комплексы были не слишком доступными, а решением задач на них занимался очень узкий круг исследователей, то в настоящее время параллельные вычисления становятся массовыми благодаря широкому распространению «комнатных» кластеров. В этой связи параллельное программное обеспечение становится необходимым. Следует отметить, что рост вычислительной эффективности при этом позволяет перейти к расчету трехмерных нестационарных течений, моделирование которых на однопроцессорных машинах занимало порядка нескольких месяцев, а сейчас требует несколько дней.

Тестирование многопрофильного пакета *VP2/3* проведено на комплексе задач, имеющих физические аналоги. При этом численные прогнозы сопоставляются не только с данными имеющихся экспериментов, но и с результатами специально выполненных испытаний на лабораторных установках ИМ МГУ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, СПбГПУ, ФТИ им. А.Ф. Иоффе, ИТФ СО РАН и др. Отдельно следует отметить сравнительный анализ результатов, полученных с помощью различных пакетов (*VP2/3* и *Fluent*).

Традиционно большое внимание уделяется решению классической тестовой задачи о циркуляционном ламинарном течении в квадратной каверне с подвижной крышкой при высоких числах Рейнольдса. Расчеты стационарных вихревых структур проведены до $Re=5 \times 10^4$, причем показано, что гипотеза Бэтчелора о формировании в каверне крупномасштабного вихря, окруженного тонким пограничным слоем, не вполне справедлива, хотя интенсивность вихря с ростом Re стремится к асимптотическому значению. В угловых зонах каверны возникают множественные вторичные вихри, играющие роль направляющих, причем их развитие происходит даже при $Re > 10^4$. Решение трехмерной задачи о движении в траншее квадратного сечения с подвижной крышкой позволило обнаружить существование кластеризованных по поперечной координате вихревых структур, начиная с $Re=1500$.

Развитие течения в ближнем следе за цилиндром при его внезапном старте давно представляет тестовую задачу для расчетчиков. К тому же это нашло отражение в атласе фотографий Ван-Дайка, представляющем большой методический интерес и часто используемым для сравнения. В [4] вихревая дорожка за круговым цилиндром рассчитывается при $Re=140$, причем детально сопоставляются результаты решения с использованием пакетов *VP2/3* и *Fluent*, а также картины из атласа Ван-Дайка. Показана эквивалентность развития полей завихренности и концентраций дыма, а также поля температуры. Применение МВТ – *VP2/3* для моделирования ламинарных отрывных течений неоднородных жидкостей протестировано на задачах двумерного обтекания маслом пакета труб (сравнение с экспериментами Жукаускаса) и пространственного обтекания сферической лунки на плоской стенке (эксперимент Рабиновича в гидротрубе).

Следующий крупный верификационный блок посвящен обоснованию выбора, апробации и верификации модели переноса сдвиговых напряжений (*MSST*). В исследовании [4] циркуляционного стационарного турбулентного течения в квадратной каверне при $Re=5 \times 10^4$ детально анализируются различные полуэмпирические модели турбулентности, сеточные структуры и пакеты (*VP2/3* и *Fluent*). Результаты численных прогнозов сравниваются с экспериментальными данными Майлза. Показано существенное преимущество моделей *MSST* (образца 1993 г.) и *SA* (модифицированная версия) над моделями семейства $k - \epsilon$ и моделью *V2F*. Также в [4] рассматривается нестационарное турбулентное обтекание кругового

цилиндра в до- и закритическом режимах. В целом, на основе сравнения с многочисленными экспериментальными и расчетными данными по интегральным и локальным силовым нагрузкам (Игараша, Рошко, Бычков и др.) подтверждаются выводы об адекватности моделей *MSST* и *SA*, а также приемлемость двумерного подхода к интерпретации вихревых процессов. Апробирована предложенная процедура анализа характеристик автоколебательного режима при их осреднении на периоде колебаний подъемной силы. В дальнейшем он был успешно применен для интерпретации пространственных циклических процессов.

Адекватность *MSST* была также подтверждена при решении задач конвективного теплообмена при автоколебательном режиме обтекания кругового цилиндра (сравнение с экспериментами Накамура, Сапожникова) и стационарном обтекании неглубокой лунки на плоской стенке (эксперимент Сапожникова).

Широкий круг тестовых расчетов с использованием *MSST* (версия 1993 г.) был выполнен для задач турбулентного обтекания траншей и лунок на плоской стенке, круговой каверны на стенке плоскопараллельного и расширяющегося канала [2]. Продемонстрировано хорошее согласие численных прогнозов с экспериментальными данными Леонтьева, Чудновского, Кикнадзе, Дрейцера, Чоу, Готовского, Гувернюка, Зубина и др. В [4] сравниваются результаты расчетов течения и теплообмена около глубокой сферической лунки, полученные с помощью МВТ – *VP2/3* и использования адаптивных сеток (*Fluent*). Показано их хорошее согласие, но при этом вычислительная эффективность МВТ оказывается гораздо выше.

Новая модель *MSST* прошла детальное тестирование в докторской диссертации Харченко В.Б. [5]. На многочисленных примерах турбулентных отрывных течений в квадратных и круговых кавернах с подвижной крышкой и на стенке каналов (как рассмотренных ранее, так и взятых из монографии Чжена) была доказана необходимость коррекции этой модели с учетом влияния кривизны линий тока на характеристики турбулентности, поскольку в ядре крупномасштабного вихря накапливается ложная турбулентная вязкость. В отличие от моделей типа $k - \epsilon$, для которых величина дополнительной константы C_c принята равной 0,1, показано, что для *MSST* эта величина должна быть меньше ($C_c=0,02$).

Применение луночных технологий для обеспечения теплозащиты поверхности фонаря самолета-носителя при транспортировке искусственного спутника Земли на околоземную орбиту стимулировало разработку новой версии *VP2/3* для моделирования сверхзвукового обтекания сжимаемым вязким газом поверхности с нанесенным луночным рельефом [6]. Обобщенная процедура коррекции давления и модель *MSST* были оттестированы на классических задачах о взаимодействии падающей ударной волны с пограничным слоем и обтекания угла сжатия (сравнение с экспериментами Хорстмена), сверхзвукового обтекания шара, цилиндра, затупленного конуса, каплевидного тела (эксперименты ЦАГИ, ИМ МГУ, ФТИ им.А.Ф. Иоффе).

Сравнение на рис. 1 рассчитанных и экспериментальных ударно-волновых картин обтекания шара при различных числах Маха и Рейнольдса демонстрирует приемлемое прогнозирование расположения скачков, в том числе слабых, висячих и хвостовых, отрывных зон, причем турбулентность проявляется только в следе за шаром, а ударные волны распространяются в невязкой области течения.

Обтекание кубика на стенке – это тестовая задача, входящая во все каталоги (например, в *ECCOMAS*). Данные по его нестационарному турбулентному обтеканию служат для анализа адекватности численных подходов *RANS*, *URANS*, *LES*, *DES*. Однако многообразие экспериментов, выполненных в разных условиях, не всегда учитывается расчетчиками. В данной работе выполнен численный тест по классическому физическому эксперименту Тропеа и Мартинуцци [5] (диссертация последнего 1992). Куб находится в узком канале между параллельными стенками. На основе параллельного решателя *VP2/3* рассчитывается выход

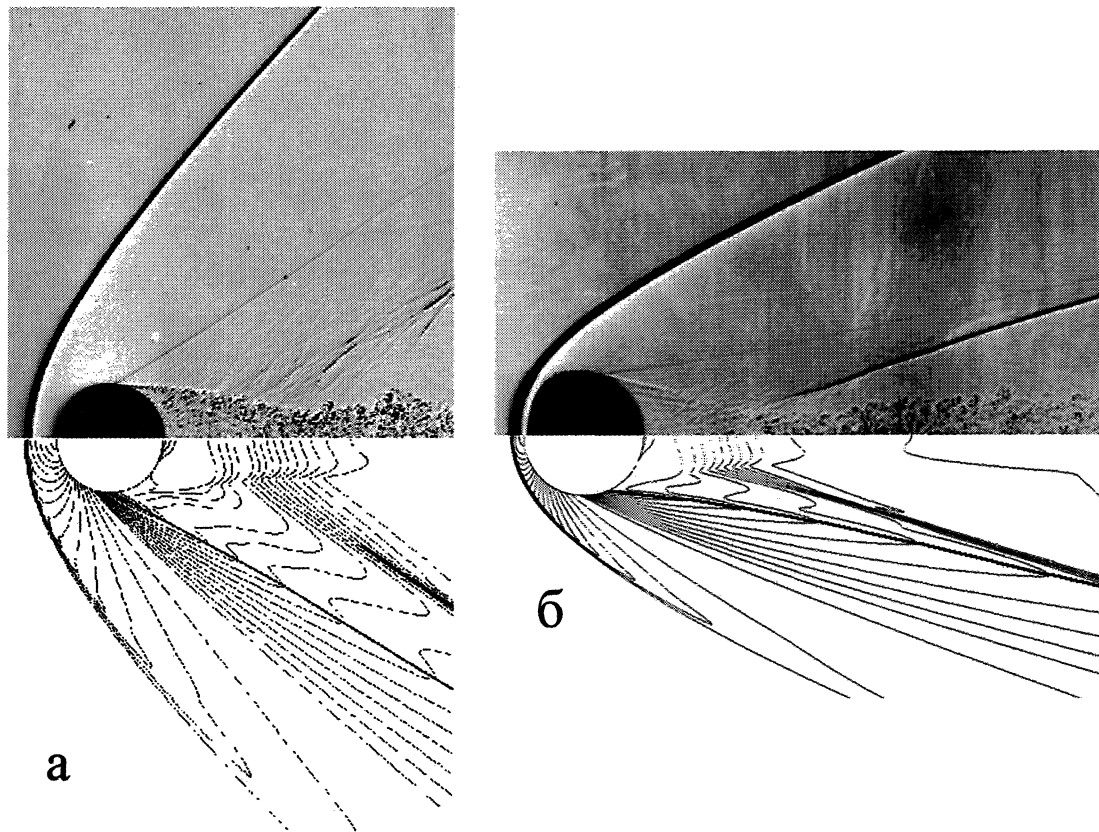


Рис. 1. Сравнение расчетных и экспериментальных (из атласа Ван-Дайка) ударно-волновых картин обтекания шара при $M=1,53$; $Re=10^5$ (а) и $M=3$; $Re=10^6$ (б)

течения в канале на автоколебательный режим при $Re=10^5$. Возникает сложный циклический процесс вихреобразования, аналогичный вихревой дорожке Кармана за цилиндром. Осредняя по периоду колебаний поперечной силы, действующей на кубик ($St=0,108$), получаем симметричные картины распределений давления спереди и сзади кубика. Профили продольной составляющей скорости удовлетворительно согласуются с данными экспериментов (рис. 2).

Расчитанные и измеренные по сажемазляным картинам положения точек отрыва и присоединения потока хорошо согласуются между собой. Над кубом и за ним имеет место разрежение, вызывающее сильное возвратное течение. Интенсивная турбулизация происходит в вихревых структурах перед кубом и в сдвиговом слое над ним. Рассчитанное давление неплохо согласуется с экспериментами величинами (рис. 3).

Два перспективных научных направления современной аэрогидромеханики и теплообмена тесно связаны с развитием МВТ и пакета *VP2/3*. Один из них, берущий свое начало в 1992 г., посвящен численному исследованию физического механизма смерчевой интенсификации теплообмена при обтекании траншейных и луночных рельефов [4].

Здесь анализируются только «ударные» результаты, которые могли быть получены в основном методами численного моделирования.

- *Струйно-вихревая природа интенсификации теплообмена.* Идентификация струйно-вихревых структур пространственных отрывных течений, проведенная методами компьютерной визуализации в пристеночном слое около сферической лунки, выявила самоорганизацию на ее боковых склонах смерчеобразных струй, взаимодействующих с образованием симметричной картины с двумя вихревыми ячейками или несиммет-

ричной структуры с формированием моносмерчевого режима течения в лунке. Смерчеобразные закрученные струйные потоки начинаются в особых точках типа фокус на картине растекания жидкости по криволинейной стенке.

- *Карты режимов.* Формирующиеся режимы обтекания лунки и совокупности лунок определяются большим количеством геометрических и режимных параметров, основными из которых в случае сферической лунки являются ее глубина, радиус скругления кромки, радиус кривизны образующей контура (в долях диаметра «пятна»), высота и ширина канала, число Рейнольдса, степень и масштаб турбулентности внешнего потока. Таким образом, задача проектирования рационального по теплоотдаче и гидравлическому сопротивлению рельефа является многопараметрической. В [4] анализируется влияние вязкости и глубины сферической лунки на структуру ее обтекания.

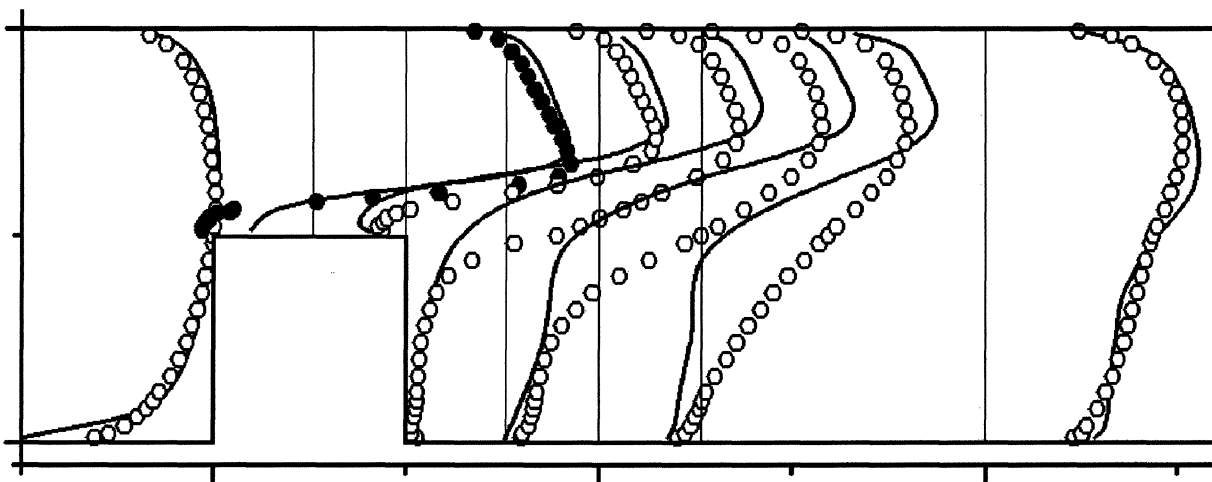


Рис. 2. Сопоставление расчетных и экспериментальных профилей продольной составляющей скорости в срединном сечении канала

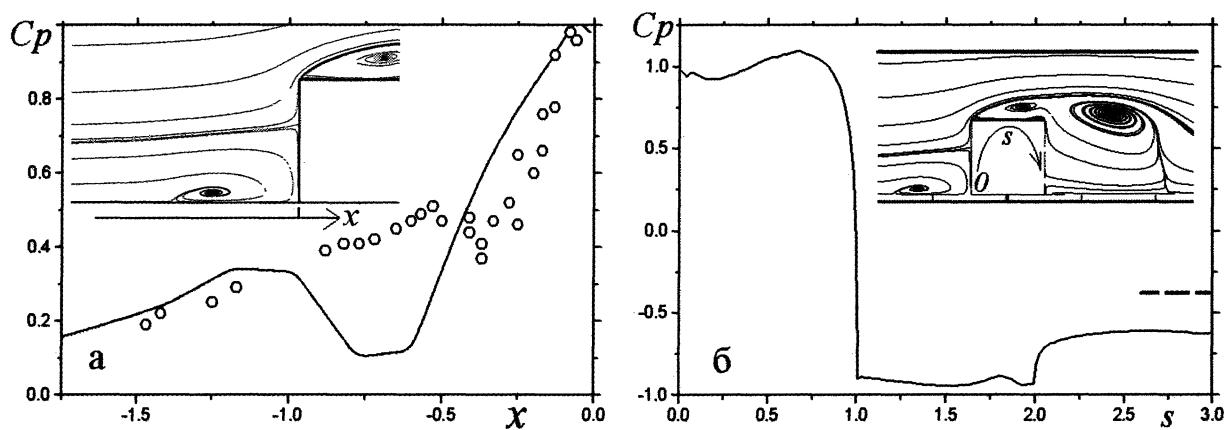


Рис. 3. Сравнение экспериментальных и расчетных, осредненных по периоду колебаний поперечной силы, распределений коэффициента давления перед кубиком (а) и по его контуру (б) в срединной плоскости канала

- *Бифуркация вихревой структуры течения и скачкообразный прирост теплоотдачи в ареале глубокой сферической лунки.* Один из замечательных результатов численного моделирования связан с обнаружением перестройки картины отрывного течения от симметричной к моносмерчевой при увеличении глубины сферической лунки, обуславливающей скачкообразный рост теплоотдачи внутри лунки и в следе за ней.
- *Преимущество лунок над траншеями.* Пространственный характер течения в следе за лункой определяет более высокие темпы роста теплоотдачи по сравнению с траншеей.
- *Обоснование теплогидравлической эффективности сферической лунки на стенке узкого канала.* Особенность лунок как вихревых интенсификаторов теплообмена состоит в том, что они не приводят к заметному росту гидравлических потерь. Для узкого канала показано, что теплоотдача от ареала со сферической лункой возрастает темпом, опережающим увеличение гидравлических потерь, т.е. их теплогидравлическая эффективность больше единицы (на 16%).
- *Эффект синхронизации вихрей в пристеночном слое около рельефа из упорядоченных лунок.* Анализ картин растекания жидкости по стенке с пакетом упорядоченных лунок указывает на согласованность вихревых структур в пристеночном слое, причем по мере увеличения луночных рядов наблюдается мультипликационный эффект нарастания теплоотдачи.
- *Конструирование траншейных лунок, обладающих повышенной теплоотдачей по сравнению со сферическими аналогами.* Поскольку моносмерчевые режимы обтекания глубоких сферических лунок оказываются предпочтительными по теплоотдаче от стенки, сконструированы формы лунок, генерирующих такие вихревые структуры. В [4] предлагаются траншейные лунки, представляющие две разнесенные половинки сферической лунки, соединенные цилиндрической вставкой. Помимо длины вставки L вводится еще один геометрический параметр – угол наклона продольной оси лунки по отношению к набегающему потоку ϕ . Таким образом, расширяется набор параметров для оптимизации луночных рельефов. В [5] показано, что траншейные лунки имеют значительные преимущества перед сферическими аналогами по тепловой и теплогидравлической эффективности.
- *Эффективное скругление кромки лунки.* Кикнадзе, говоря о лунках с двойной кривизной, имел в виду радиус скругления кромки. В численных исследованиях [5] показано, что при сохранении неизменным радиуса кривизны центральной части сферической лунки увеличение скругления кромки приводит к возрастанию теплоотдачи при одновременном снижении гидравлических потерь. Таким образом, лунки со скругленной кромкой обладают большей тепловой и теплогидравлической эффективностью по сравнению с острокромочными.
- *Тепловое проектирование луночных рельефов. Их предельные характеристики.* Тепловое проектирование луночных рельефов предлагается проводить на основе использования зигзагообразных траншейных лунок со сглаженными краями. Анализируются предельные теплогидравлические характеристики при рассмотрении периодического расчетного модуля, на границах которого задаются периодические граничные условия [4].

Второй десятилетний фундаментальный проект, связанный с управлением обтеканием тел с помощью вихревых ячеек [3], получил развитие в проекте Еврокомиссии (*VortexCell2050*).

- *Идея вихревой ячейки (ВЯ).* Под ВЯ в рамках обобщенной концепции понимаются каверны, траншеи, лунки, зазоры между разновеликими телами, в том числе с вмонтированными в них центральными телами. Рассматриваются как пассивные, так и активные ВЯ, в последних из которых на циркулирующий в ячейках поток оказывается энергетическое воздействие (с помощью отсоса или движения части омываемого контура, в том числе вращения центрального тела).
- *Способы интенсификации возвратного течения в ВЯ.* Топологически формализована конфигурация ВЯ с заданным эллиптическим контуром и вписанным в него центральным телом (ЦТ), форма которого может быть согласованной и несогласованной с выбранным контуром ячейки. Центральное тело служит для реализации механизма интенсификации циркулирующего в ячейке потока, при этом используется либо хорошо известный способ распределенного по поверхности отсоса, либо в случае цилиндрического тела его закрутка с постоянной угловой скоростью. Центральное тело может быть изъято, и тогда интенсификация потока в ячейке производится за счет сосредоточенного (щелевого) отсоса или теоретически с помощью движения участка контура. В качестве параметра воздействия на циркулирующий поток выбирается скорость отсоса или при вращении ЦТ касательная скорость на поверхности цилиндра в долях скорости набегающего потока, а в качестве интегрального управляющего фактора выступает коэффициент расхода C_q , обезразмеренный по характерным масштабам скорости и длины.
- *Учет энергетического воздействия.* Эффективность энергос затратного метода управления обтеканием тел с помощью ВЯ оценивается с помощью введения дополнительного сопротивления, определяемого мощностью, потребной для реализации распределенного или сосредоточенного отсоса, а также вращения ЦТ.
- *Размещение ВЯ на объекте.* ВЯ монтируется в выбранном объекте (в качестве теста рассмотрен цилиндр при симметричном режиме обтекания). ВЯ может быть несколько. Их размеры подбираются эмпирически, хотя они составляют малые доли от характерных масштабов тел. К геометрическим параметрам ВЯ добавляются размеры окна и координаты его центра на контуре тела, а также радиусы скругления переходов от контура ячейки к образующей тела. Таким образом, формируется омываемая поверхность тела с криволинейными пазами – ВЯ. ВЯ целесообразно располагать в окрестности мест отрыва на контуре тела. Цель функционирования системы ВЯ – изменение картины обтекания тела и, как следствие, улучшение его аэродинамических характеристик.
- *Физический механизм управления с помощью ВЯ.* Пассивные ВЯ неэффективны. Максимальная скорость возвратного потока в них не превышает 50% от скорости невозмущенного потока. В активных ВЯ скорость циркулирующего потока одного порядка и выше скорости внешнего течения.
- *Снижение лобового сопротивления тел с ВЯ.* Расположение активных ВЯ на контуре кругового цилиндра позволяет уменьшить длину отрывной зоны в следе и снизить лобовое сопротивление вдвое. Скругление задней острой кромки контура ВЯ способно уменьшить его величину примерно на 10%.
- *Увеличение подъемной силы и повышение аэродинамического качества.* Для толстых профилей, характерных для летательных аппаратов интегральной компоновки

(ЭКИП), расположение на тыльной стороне системы активных ВЯ приводит к практически безотрывному их обтеканию. Су достигает величин порядка 2,5, а аэродинамическое качество превышает 20. Обнаружен эффект суперциркуляции, т.е. создания дополнительной подъемной силы непосредственно в ВЯ.

- *Сравнение толстых профилей.* Обнаружена эквивалентность по аэродинамическому качеству (порядка 20) толстого профиля аппарата ЭКИП и равного по толщине геттингеновского профиля при одинаковом коэффициенте расхода отсасываемого в вихревых ячейках воздуха (C_q порядка 0,02).
- *Влияние угла атаки.* Для толстого профиля с вихревыми ячейками достигнут высокий уровень коэффициента подъемной силы – $C_y > 1$ в широком диапазоне углов атаки от -30° до 25° .
- *Влияние сжимаемости.* Показано существование критических чисел Маха набегающего потока, при которых наблюдаются кризисные явления при обтекании тел с вихревыми ячейками. Их величины имеют порядок 0,4 – 0,5 при умеренных (0,02 – 0,03) коэффициентах C_q .

Несколько примеров иллюстрируют использование пакета *VP2/3* для решения практических задач.

- *Автоматизированный прогностический комплекс, позволяющий моделировать орografiю местности в районе аэродрома и анализировать ее влияние на формирование режимов ветра, опасных и сложных для авиации явлений условий погоды в приземном слое атмосферы.* Такой комплекс может стать основой эксплуатационной системы оперативной оценки критических по сдвигу ветра условий выполнения взлета – посадки воздушных судов в аэропортах, в особенности расположенных в районах со сложным рельефом. В [7] 1) выполнено компьютерное картографирование местности на примере а/п Нальчик; 2) разработан вычислительный комплекс анализа воздушной обстановки в районе аэродрома; 3) осуществлена круговая обдувка местности а/п с учетом влияния толщины атмосферного пограничного слоя; 4) сформирован банк данных о состоянии воздушной среды в каждой точке глиссады; 5) синтезирована система предупреждения опасного влияния сдвига ветра.
- *Система прогнозирования задымленности помещений метрополитена при пожаре в вагоне поезда.* 3-х мерная *CFD* модель для предсказания заполнения дымом подземного зала метрополитена была развита для одно- и трехсводчатого залов со стоящим поездом при пожаре в одном из вагонов. Главной целью моделирования являлась оценка времени эвакуации пассажиров на основе анализа расчетных нестационарных полей температуры, скорости газовой среды, концентраций продуктов сгорания, оптической плотности дыма и видимости. В [9] предложенная расходная модель продуцирования и распространения дыма была верифицирована.
- *Расчеты аэродинамики высоток строительного комплекса «ЭКО».* Нестационарные аэродинамические нагрузки и поле скорости при ветровом воздействии на спроектированные сооружения определены на основе решения нестационарных уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью модифицированной MSST [9]. Тестирование пакета для решения задач строительной аэродинамики проведено при моделировании циклических процессов вихреобразования за установленным на стенке кубом. Расчеты обтекания комплекса зданий «ЭКО» показывают отсутствие крупных устойчивых по направлениям ветра застойных зон с большой степенью заторможенности, что свидетельствует об удовлетворительной «проветриваемости» комплекса.

5. Заключение

Представленная разработка МВТ и пакета *VP2/3* иллюстрирует наличие большого ресурса *CFD* для решения фундаментальных и прикладных проблем аэрогидромеханики и теплофизики. По-прежнему, значительное внимание уделяется методическим, тестовым экспериментам, причем акцент переносится на объединение подходов численного и физического моделирования. Перспективы дальнейшего развития видятся в сфере увеличения вычислительной эффективности пакетов, что позволит выйти на решение сложных задач, в частности сопряженных задач и задач аэроакустики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № № 08-01-00059, 08-08-00065 и 08-08-90001) и Евросоюза по программе Framework-6 (проект VortexCell2050). Статья рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2009».

Литература

1. Белов, И.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости / И.А. Белов, С.А. Исаев, В.А. Коробков. – Л.: Судостроение, 1989. – 256 с.
2. Белов, И.А. Теплопередача и сопротивление пакетов труб несжимаемой жидкости / И.А. Белов, Н.А. Кудрявцев. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 223 с.
3. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование). – М.: МГУ, 2003. – 360 с.
4. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб несжимаемой жидкости / Ю.А. Быстров, С.А. Исаев, Н.А. Кудрявцев, А.И. Леонтьев. – СПб., Судостроение, 2005. – 398 с.
5. Харченко, В.Б. Численное моделирование отрывных течений с вихревыми и струйными генераторами на основе многоблочных вычислительных технологий: автореф. дис.... д-ра...техн. наук / В.Б. Харченко. – СПб.: СПбМГТУ, 2006. – 33 с.
6. Numerical simulation of sub-, trans- and supersonic flow around bodies with vortex cells in the framework of multiblock computational technologies / S.A. Isaev, A.G. Sudakov, A.E. Usachov, P.A. Baranov // Proceedings of West – East High Speed Flow Field Conf. – Moscow, 2007. – 6 p.
7. Сдвиг ветра в летной эксплуатации (система оповещения) / В.В. Бабаскин, С.А. Исаев, Х.Т. Метов, и др. – СПб.: Акад. гражд. авиации, 2002. – 146 с.
8. Численное и физическое моделирование температурного режима в путевом тоннеле метрополитена при пожаре в движущемся вагоне поезда / П.А. Баранов, А.Д. Голиков, С.А. Исаев, А.Ю. Снегирев // Инженер.-физ. журнал. – 2000. Т.73, № 5. – С. 918 – 921.
9. 10-летний опыт развития многоблочных вычислительных технологий в пакете *VP2/3* применительно к решению задач аэрогидромеханики и теплообмена / С.А. Исаев, П.А. Баранов, Н.А. Кудрявцев, и др. // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. – Киев: Наук. Думка, 2007. – С.116 – 134.

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Институт механики Московского государственного университета, Московский государственный индустриальный университет, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Центральный аэрогидродинамический институт (Московский комплекс)
lohsky@msiu.ru

Поступила в редакцию 2 марта 2009 г.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Е.Д. Карпова, В.В. Шайдуров, М.С. Вдовенко

PARALLEL IMPLEMENTATION OF THE FEM FOR BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE SHALLOW WATER EQUATIONS

E.D. Karepova, V.V. Shaidurov, M.S. Vdovenko

Проведено исследование эффективности двух параллельных реализаций алгоритма численного решения краевой задачи для уравнений мелкой воды, выполненных с помощью библиотеки MPI для языка Си. Представлены результаты численных экспериментов на модельной сетке и неструктурированной сетке для акватории Охотского моря. Приведены сравнительные результаты ускорения вычислений в зависимости от количества процессов, способа реализации коммуникаций, способа декомпозиции вычислительной области.

Ключевые слова: модели мелкой воды, декомпозиция согласованной триангуляции, метод конечных элементов, блокирующие/неблокирующие передачи, ускорение вычислений

The authors carry out the efficiency research of two parallel realizations of the algorithm of the numerical solution of a boundary-value problem for the shallow water equations solved with the help of the MPI library for C. They set out the results of the numerical experiments on the model grid and on the unstructured grid for the Sea of Okhotsk water area. The authors provide the comparative outputs of the computations speedup in relation to the number of processes, the mode of communication realization, the mode of decomposing of the calculating area.

Keywords: shallow water model, decomposition of the coordinated triangulation, FEM, blocking/nonblocking transmissions, computational speedup

Введение

Модели мелкой воды хорошо описывают большой круг природных явлений, таких как крупномасштабные поверхностные волны, возникающие в морях и океанах, цунами, приливные течения, поверхностный и русловой сток, гравитационные колебания поверхности океанов [1, 2]. В работах [2, 3, 4] рассмотрено численное моделирование поверхностных волн в больших акваториях с учетом сферичности Земли и ускорения Кориолиса на основе уравнений мелкой воды. В работе [2] для дифференциальной постановки задачи выведены полезные априорные оценки, обеспечивающие устойчивость решения и однозначную разрешимость задачи. В [3, 4] для этой же задачи построен метод конечных элементов, для которого получены необходимые априорные оценки. Там же приведены результаты численных экспериментов на модельных сетках, для акваторий Охотского моря и Мирового океана.

В настоящей работе проведено исследование эффективности двух параллельных реализаций алгоритма численного решения краевой задачи для уравнений мелкой воды, выполненных с помощью библиотеки MPI для языка Си. Первая из них основана на декомпозиции области с перекрытием, ширина которого диктуется шаблоном дискретного аналога. Вторая параллельная реализация явно использует проведение вычислений в методе конечных элементов по треугольникам с декомпозицией без использования теневых граней.

Численные эксперименты проводились на модельной сетке и сетке для акватории Охотского моря. Приведены сравнительные результаты ускорения вычислений в зависимости от количества процессов, способа реализации коммуникаций (блокирующие, неблокирующие передачи), способа декомпозиции вычислительной области.

Статья рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2009» (<http://agora.guru.ru/pavt>).

1. Моделирование поверхностных волн в водоемах методом конечных элементов

Для стандартной сферической системы координат (r, λ, θ) с началом в центре земного шара будем использовать вместо угла θ географическую широту $\varphi = \pi - \theta$, так что $0 \leq \varphi < \pi$. Через λ обозначена географическая долгота $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Полагаем всюду $r = R_E$, где R_E — радиус Земли, который считается постоянным.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть Ω — заданная область на сфере с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — часть границы, проходящая вдоль берега, а $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ — часть границы, проходящая по морю. Обозначим через m_1 и m_2 — характеристические функции соответствующих участков границы. Для простоты считается, что точки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (полюса) не входят в Ω . Относительно неизвестных функций $u = u(t, \lambda, \varphi)$, $v = v(t, \lambda, \varphi)$ и $\xi = \xi(t, \lambda, \varphi)$ запишем в $\Omega \times (0, T)$ уравнения баланса импульсов и уравнение неразрывности [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= lv + mg \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} - R_f u + f_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -lu + ng \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - R_f v + f_2, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= m \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} (Hu) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{n}{m} Hv \right) \right) + f_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v — компоненты вектора скорости \mathbf{U} по осям λ и φ соответственно; ξ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня; $H(\lambda, \varphi) > 0$ — глубина водоема в точке (λ, φ) ; функция $R_f = r_* |\mathbf{U}| / H$ учитывает силу трения о дно, r_* — коэффициент трения; $l = -2\omega \cos \varphi$ — параметр Кориолиса; $m = 1 / (R_E \sin \varphi)$; $n = 1 / R_E$; g — ускорение силы тяжести; $f_1 = f_1(t, \lambda, \varphi)$, $f_2 = f_2(t, \lambda, \varphi)$ и $f_3 = f_3(t, \lambda, \varphi)$ — заданные функции внешних воздействий.

Граничные условия рассмотрим в следующем виде [2]:

$$HU_n + \beta m_2 \sqrt{gH} \xi = m_2 \sqrt{gH} d \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (2)$$

где $U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = (n_1, \frac{n}{m} n_2)$ — вектор внешней нормали к границе; $\beta \in [0, 1]$ — заданный параметр, $d = d(t, \lambda, \varphi)$ — заданная граничная функция, определенная на границе Γ_2 .

Зададим также начальные условия

$$u(0, \lambda, \varphi) = u_0(\lambda, \varphi), \quad v(0, \lambda, \varphi) = v_0(\lambda, \varphi), \quad \xi(0, \lambda, \varphi) = \xi_0(\lambda, \varphi). \quad (3)$$

Для дискретизации по времени разобьем временной отрезок $[0, T]$ на K интервалов: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$ с шагом $\tau = T/K$. Аппроксимируем производные по времени левыми разностями и рассмотрим систему (1)–(2) на временном интервале (t_k, t_{k+1}) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau} + R_f\right) u - lv - mg \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} &= f_1 + \frac{1}{\tau} u^k & \text{в } \Omega, \\ \left(\frac{1}{\tau} + R_f\right) v + lu - ng \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} &= f_2 + \frac{1}{\tau} v^k & \text{в } \Omega, \\ \frac{1}{\tau} \xi - m \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} (Hu) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{n}{m} Hv \right) \right) &= f_3 + \frac{1}{\tau} \xi^k & \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

$$HU_n + \beta m_2 \sqrt{gH} \xi = m_2 \sqrt{gH} d \quad \text{на } \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (5)$$

где $f(t_k, \lambda, \varphi) = f^k$, $f(t_{k+1}, \lambda, \varphi) = f^{k+1} = f$. Индекс $k+1$ в разностных выражениях далее будем опускать там, где это не вызывает двойного толкования. Донное трение задается в виде $R_f = r_* |\mathbf{U}^k|/H$. Заметим, что граничные условия (5) являются естественными для задачи (4).

Для построения метода Бубнова – Галеркина рассмотрим некоторую согласованную триангуляцию $\mathcal{T} = \{\omega_i\}_{i=1}^{N_{el}}$ области Ω , состоящую из невырожденных треугольников с прямолинейными сторонами в координатах λ и φ и содержащую область Ω . Согласованность означает, что каждое ребро треугольника либо является граничным и принадлежит лишь одному треугольнику, либо является общим для двух соседних треугольников, внутренность которых попарно не пересекается. Сетка в общем случае может быть неструктурированной (рис. 1). Пусть $\bar{\Omega}_h$ – множество узлов (т.е. вершин треугольных элементов) общим числом N_{nd} , Ω_h – множество внутренних узлов.

Для каждого узла $z_j \in \bar{\Omega}_h$ введем базисную функцию $\Psi_j(\lambda, \varphi)$, которая равна единице в z_j , равна нулю во всех остальных узлах $\bar{\Omega}_h$ и линейна в каждом треугольнике. Обозначим линейную оболочку этих функций через $H_h(\Omega_h) = \text{span}\{\Psi_j\}_{j=1}^{N_{nd}}$.

Для действительных вектор-функций $\Phi_h = (u^h, v^h, \xi^h)$, $\hat{\Phi}_h = (\hat{u}^h, \hat{v}^h, \hat{\xi}^h) \in \mathbf{H}_h(\Omega_h) \equiv (H_h(\Omega_h))^3$ рассмотрим [2, 3, 4] дискретный аналог скалярного произведения

$$(\Phi_h, \hat{\Phi}_h)_h = \sum_{i=1}^{N_{el}} \frac{1}{3} S_i \sum_{j=0}^2 R_E^2 \sin(\varphi_{ij}) \left(H_{ij} (u_{ij} \hat{u}_{ij} + v_{ij} \hat{v}_{ij}) + g \xi_{ij} \hat{\xi}_{ij} \right). \quad (6)$$

Здесь через S_i обозначена площадь i -го треугольного элемента, вершины которого занумерованы через 0, 1, 2, следовательно $f_{ij} = f(\lambda_{ij}, \varphi_{ij})$ – значение функции в j -й вершине i -го элемента.

В терминах скалярного произведения (6) сформулируем метод Бубнова – Галеркина [3, 4] следующим образом: для фиксированного момента времени найти вектор-функцию $\Phi_h = (u^h(\lambda, \varphi), v^h(\lambda, \varphi), \xi^h(\lambda, \varphi))$, где

$$u^h(\lambda, \varphi) = \sum_{j=1}^{N_{nd}} \alpha_j^u \Psi_j(\lambda, \varphi), \quad v^h(\lambda, \varphi) = \sum_{j=1}^{N_{nd}} \alpha_j^v \Psi_j(\lambda, \varphi), \quad \xi^h(\lambda, \varphi) = \sum_{j=1}^{N_{nd}} \alpha_j^\xi \Psi_j(\lambda, \varphi)$$

такую, что тождество

$$a^h(\Phi_h, \mathbf{W}_h) = f^h(\mathbf{W}_h) + b^h(d^h, \mathbf{W}_h) \quad (7)$$

справедливо $\forall \mathbf{W}_h = (w_u^h, w_v^h, w_\xi^h) \in \mathbf{H}_h$. Для аппроксимации интегралов при получении билинейной $a^h(\cdot, \cdot)$ и линейных $f^h(\cdot)$, $b^h(\cdot)$ форм использовалась формула трапеций и ее двумерный аналог.

Занумеровав узлы $\bar{\Omega}_h$ от 1 до N_{nd} , задачу (7) можно записать в векторно-матричной форме: для фиксированного момента времени t^{k+1} найти вектор $\mathbf{V}^{k+1} = (u_1, \dots, u_{N_{nd}}, v_1, \dots, v_{N_{nd}}, \xi_1, \dots, \xi_{N_{nd}})$, удовлетворяющий системе линейных алгебраических уравнений

$$A^{k+1} \mathbf{V}^{k+1} = \mathbf{F}^{k+1}. \quad (8)$$

В работе [3] показан второй порядок сходимости решений в норме, порождаемой скалярным произведением (6) на равномерной сетке.

Для решения системы (8) использовался итерационный метод Якоби, который обладает хорошим параллелизмом, а диагональное преобладание для его сходимости легко обеспечивается выбором шага по времени τ . В векторно-матричной форме метод Якоби запишется в следующем виде:

$$\Phi^{(\nu+1)} = \Phi^{(\nu)} - D^{-1} (A\Phi^{(\nu)} - \mathbf{F}). \quad (9)$$

Здесь ν — номер итерации, индексы $(k+1)$ для шага по времени опущены, однако компоненты глобальной матрицы жесткости и вектора правой части зависят от времени и должны пересчитываться в начале каждого временного шага.

Отметим некоторые особенности реализации, диктуемые методом конечных элементов. Глобальная матрица жесткости A зависит от времени и должна пересчитываться на каждом временном шаге. Однако для реализации метода Якоби на конечных элементах не требуется явного хранения глобальной матрицы жесткости. В программе насчитываются только элементы локальных матриц жесткости (причем только их диагональные элементы зависят от времени и переисчисляются на каждом временном шаге). Вычисление невязки $A\Phi^{(\nu)} - \mathbf{F}$ в (9) производится по треугольникам с использованием элементов локальных матриц.

Сходимость метода определялась малостью разности $\Phi^{(\nu)}$ для двух соседних итераций в дискретном аналоге равномерной нормы:

$$\max_{1 \leq i \leq N_{nd}} |\Phi_i^{(\nu+1)} - \Phi_i^{(\nu)}| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

2. Параллельный алгоритм

2.1. Декомпозиция области

Метод конечных элементов для задачи (7) дает семиточечный шаблон, поэтому в методе Якоби для вычисления значения $\Phi_i^{(\nu+1)}$ на $(\nu+1)$ -й итерации требуются значения в семи точках $\Phi_i^{(\nu)}$ ν -й итерации (рис. 2).

Используя явный параллелизм по данным, исходную расчетную область можно разбить на несколько пересекающихся только по границе разбиения подобластей. Расчеты в каждой подобласти можно проводить независимо друг от друга в рамках итерации. Однако, после каждой итерации Якоби необходимо проводить согласование данных на границах подобластей. Имеет место, по крайней мере, два варианта разбиения.

1. *Декомпозиция без перекрытий.* Исходная область разрезается на взаимно неперекрывающиеся полосы (рис. 3). На границах каждой подобласти невязка насчитывается только по части треугольников, принадлежащих области влияния точки, лежащей в подобласти. При обмене данными после каждой итерации Якоби требуется дополнительное суммирование для значений невязки в граничных в подобласти точках.
2. *Декомпозиция с теньвыми гранями.* Исходная область включает взаимно перекрывающиеся подобласти, определяемые шаблоном (см. рис. 2). В этом случае невязка

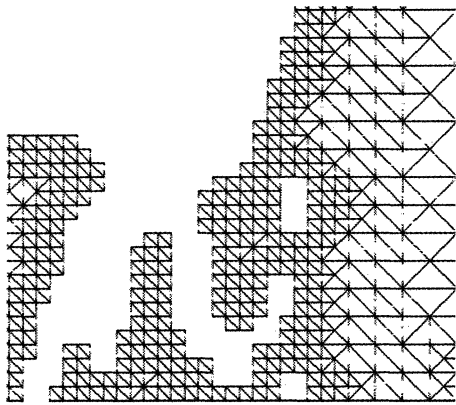


Рис. 1. Фрагмент триангуляции

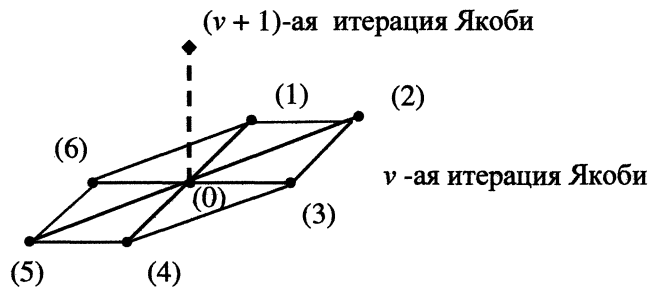


Рис. 2. Зависимость в итерациях Якоби

в граничных точках для подобласти i -го процесса насчитываются в подобласти соседнего процесса. С учетом семиточечного шаблона и согласованности триангуляции достаточно перекрытия областей в два слоя расчетных точек (рис. 4). При обмене данными после каждой итерации Якоби дополнительная обработка не требуется, однако для каждого процесса необходимо хранить больше данных (теньевые грани шириной в две расчетные точки).

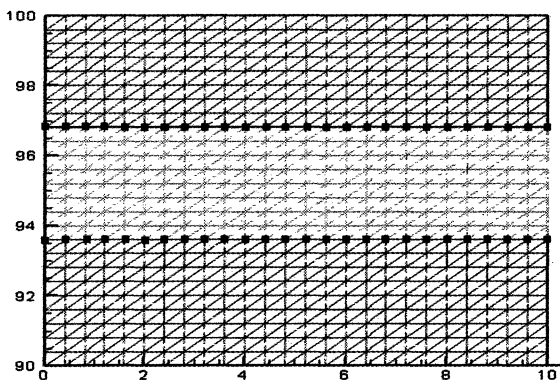


Рис. 3. Декомпозиция без перекрытий

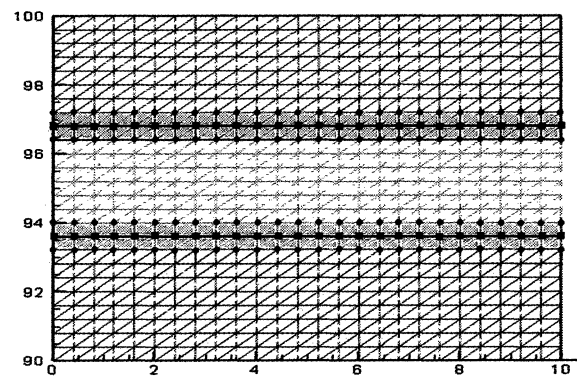


Рис. 4. Декомпозиция с теньевыми границами

Таким образом, первый способ декомпозиции области более экономичен по памяти, прост в программировании, однако предполагает дополнительное суммирование на каждой итерации Якоби. Можно предположить, что его преимущества проявятся только на больших сетках с протяженными границами подобластей. Кроме того, очевидно его достоинство для неструктурированных сеток, когда границы подобластей не являются последовательным множеством точек.

2.2. Ускорение и масштабируемость

В рамках выбранной схемы распределения данных все процессы осуществляют одни и те же вычисления, но только над разными подобластями. Структура обменов также является однородной, за исключением первого и последнего процессов.

На рис. 5 приведен псевдокод параллельной программы на одном шаге по времени для случая декомпозиции области без перекрытий. При использовании декомпозиции с теньевыми гранями на Этапе 3 необходимо сначала вычислить новое приближение решения, а затем произвести обмены без дополнительного суммирования.

Реализация параллельной программы осуществлялась на языке программирования Си с применением функций библиотеки передачи сообщений MPI.

Выполним теоретические оценки возможного ускорения каждого из параллельных алгоритмов, следуя [7].

```
|{ начало цикла по времени
Этап 1: Подготовка данных для временного шага
  Локальные вычисления в своей двумерной подобласти:
  | Расчет трения, внешних воздействий, коэффициентов локальных
  | матриц жесткости и правых частей, зависящих от времени;
Этап 2: Подготовка диагонали глобальной матрицы жесткости
  | Вычисление диагонали глобальной матрицы жесткости;
  *****
  Обмен с соседями граничными значениями
  для диагонали глобальной матрицы жесткости
  *****
Этап 3: Определение решения для текущего шага по времени
  Локальные вычисления в своей двумерной подобласти:
  | Пока не достигнута точность метода Якоби выполнять
  | { (начало цикла по итерациям метода Якоби)
  |   { (начало цикла по треугольникам)
  |     Вычисление невязки  $A\Phi - F$ ;
  |   } (конец цикла по треугольникам)
  *****
  Обмен с соседями граничными значениями невязки.
  Для декомпозиции без перекрытия подобластей -
  суммирование по границам подобластей
  *****
  Локальные вычисления в своей двумерной подобласти:
  |   Вычисление нового приближения решения,
  |   Вычисление локальной ошибки в норме  $C_h$ ;
  *****
  Глобальная операция MPI_Reduce(... MPI_MAX ...)
  для вычисления нормы ошибки
  *****
  Локальные вычисления в своей двумерной подобласти:
  | } (конец цикла по итерациям метода Якоби)
}| (конец цикла по времени)
```

Рис. 5. Псевдокод фрагмента программы

Предположим, что все операции, в том числе и обмены, имеют одинаковое время исполнения t . Пусть N_{nd} – общее количество точек сетки расчетной области, k – количество операций, выполняемых в одной расчетной точке, s – количество шагов по времени. Тогда

общий объем вычислений V_{calc} в алгоритме определяется соотношением $V_{calc} = skN_{nd}$, а время выполнения алгоритма на одном процессоре соответственно можно оценить следующим образом: $T_1 \sim skN_{nd}t$. Тогда средняя степень параллелизма r данного алгоритма согласно [7] равна

$$r \sim \frac{skN_{nd}}{sk} = N_{nd}.$$

Потенциальное ускорение алгоритма оценивается как отношение времени вычисления на одном процессоре T_1 к времени вычислений на p процессорах T_p : $S_p = \frac{T_1}{T_p}$. Выполним теоретические оценки возможного ускорения каждого из параллельных алгоритмов, по возможности учитывая время, затрачиваемое при выполнении алгоритма на обмены и возможные накладные расходы на вычисления в перекрывающихся подобластях:

$$S_p = \frac{T_1}{T_1/p + T_{over} + T_{comm}}. \quad (11)$$

Здесь T_1 – время вычислений на одном процессоре, T_{over} – время на дополнительные вычисления, связанные с декомпозицией области, T_{comm} – время, требуемое для обменов.

Как следует из принятой нами схемы распределения данных, на каждой итерации метода Якоби требуется обмен граничными элементами вектора решений и порождаемые распределенностью данных дополнительные вычисления. В обоих случаях декомпозиции области для вычисления невязки на каждом разрезе количество точек, в которых необходим обмен данными, соответствует количеству точек сетки на разрезе. Однако при декомпозиции области с теньевыми гранями согласно шаблону метода Якоби (см. рис. 2) требуется хранить не только точки на разрезе, но и все точки, принадлежащие треугольникам, в которые входят точки разреза. Обозначим через N_{bnd} количество точек сетки, в которых необходим обмен данными, далее такие точки будем называть граничными в подобласти.

Объем дополнительных вычислений, связанных с декомпозицией области зависит от количества процессоров p , на которых выполняется алгоритм, и количества дополнительных вычислений g , которые необходимы для одной граничной в подобласти точки. Источники этих вычислений при различных способах декомпозиции области отличаются. При декомпозиции без теньевых граней каждый процесс, вычисляя невязку в граничной в подобласти точке, "обрабатывает" свою часть треугольников, не дублируя вычисления. В этом случае после обмена требуется дополнительное суммирование частей невязок, насчитанных в соседнем процессоре. При декомпозиции области с теньевыми гранями соседние процессы дублируют друг друга при расчете невязки для точек *перед разрезом*. Таким образом, объем дополнительных вычислений оценивается следующим образом:

$$V_{over} \sim sgN_{bnd}(p - 1).$$

При этом время, затрачиваемое на дополнительные вычисления в N_{bnd} граничных точках подобласти можно оценить так:

$$T_{over} \sim sgN_{bnd}t.$$

Пусть также для каждой граничной точки требуется пересылка m значений. Тогда объем пересылаемых данных соседним процессам можно оценить следующим образом:

$$V_{comm} \sim 2smN_{bnd}.$$

Для оценки времени, необходимого для обменов, рассмотрим их реализацию в MPI. При использовании библиотеки MPI возможно два принципиально разных способа организации обменов – с использованием блокирующих или неблокирующих функций приема и передачи данных. Оценим ускорение в обоих случаях.

Блокирующие передачи. На рис. 6 отображено влияние блокирующих передач на производительность на примере восьми процессов [8]. На первом этапе шестой процесс передает данные седьмому процессу, в то время как процессы с нулевого по пятый простаивают в ожидании приема данных своими правыми соседями. На втором этапе пятый процесс передает данные шестому, а процессы с нулевого по четвертый простаивают. Таким образом, все обмены завершатся за семь этапов.

В общем случае обмены с использованием блокирующих передач потребуют $T_{comm}(p-1)$ единиц времени, где $T_{comm} = 2smN_{bnd}t$ – время на обмен данными с одной границы, p – количество используемых процессоров.

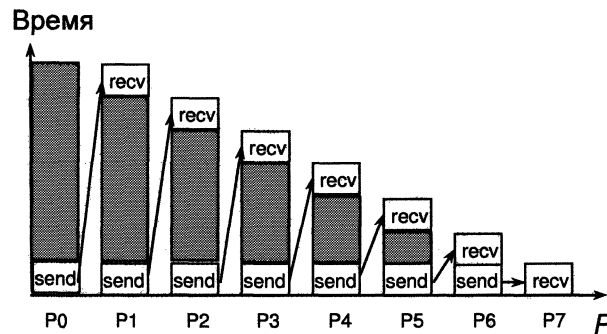


Рис. 6. Влияние блокирующих передач на ускорение

С учетом (11) ускорение при использовании блокирующих передач с учетом всех оценок будет определяться следующим соотношением:

$$S_p^{bl} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{g}{k}R + 2(p-1)\frac{m}{k}R}, & 1 \leq p \leq N_{nd}, \\ \frac{1}{\frac{1}{N_{nd}} + \frac{g}{k}R + 2(p-1)\frac{m}{k}R}, & p > N_{nd}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь через R обозначено отношение количества граничных точек в подобласти к общему числу точек расчетной области: $R = N_{bnd}/N_{nd}$.

Неблокирующие передачи. В общем случае время, затрачиваемое на обмены с использованием неблокирующих передач, не зависят от количества участвующих в обменах процессов: $T_{comm} = \text{const}$. Оценка (11) в случае неблокирующих обменов имеет вид:

$$S_p^{unbl} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{g}{k}R + \frac{2m}{kN_{nd}}}, & 1 \leq p \leq N_{nd}, \\ \frac{1}{\frac{1}{N_{nd}} + \frac{g}{k}R + \frac{2m}{kN_{nd}}}, & p > N_{nd}. \end{cases} \quad (13)$$

Для получения численных оценок ускорения оценим количество операций k на одну расчетную точку. Каждый шаг по времени включает в себя: 1) вычисления трения, правой части, диагональных элементов локальных матриц жесткости $\sim 60N_{nd}$ операций; 2) вычисление диагонали глобальной матрицы жесткости $\sim 45N_{el}$ операций (N_{el} – количество треугольных элементов в триангуляции расчетной области); 3) решение системы (8)

методом Якоби (9). Реализация метода Якоби со сборкой невязки по треугольникам требует 1) вычисления невязки $\sim 180N_{nd}$ операций; 2) $3N_{el}$ проверки на принадлежность точки границе; 3) $\sim 60N_b$ дополнительных операций для вычисления интегралов в N_b граничных точках расчетной области; 4) N_{nd} операций для умножения на D^{-1} ; 5) $3N_{nd}$ проверок для вычисления глобального максимума.

В табл. 1 приведены результаты теоретических оценок ускорения параллельного алгоритма в зависимости от способа декомпозиции области, типа обменов и количества процессов для модельной прямоугольной области с сеткой 401×401 точек. Здесь $N_{nd} = 160801$, $N_{el} = 320000$. Из табл. 1 видно, что наиболее эффективной является реализация, основанная на разбиении области без перекрытия подобластей. Полученные результаты показывают, что алгоритм обладает значительным объемом потенциального параллелизма и хорошей с точки зрения распараллеливания структурой, что дает ускорение близкое к линейному в зависимости от количества используемых процессоров.

Таблица 1

Значения оценки ускорения в зависимости количества процессоров

Тип декомпозиции	p	1	2	4	8	12	16
Без перекрытия	S_p^{bl}	1.0000	1,9999	3,9986	7,9866	11,9526	15,8855
Без перекрытия	S_p^{unbl}	1.0000	1,9999	3,9995	7,9981	11,9957	15,9923
С теньвыми гранями	S_p^{bl}	1.0000	1,9962	3,9830	7,9173	11,7814	15,5554
С теньвыми гранями	S_p^{unbl}	1.0000	1,9962	3,9849	7,9399	11,8653	15,7615

3. Вычислительный эксперимент

3.1. Модельная область

Для численного исследования ускорения параллельного алгоритма рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть Ω — «квадрат» на сфере: $\Omega = [0, \pi/10] \times [\pi/2, \pi/2 + \pi/10]$. Границы Ω считаются «твердыми». В Ω рассмотрена задача с известным точным решением [3]. В расчетной области построены две равномерные квадратные сетки 401×401 и 801×801 точек с соответствующей согласованной триангуляцией. В вычислительных экспериментах было сделано 1000 шагов по времени.

Вычисления выполнялись на 96-процессорном кластере ИВМ СО РАН. Кластер МВС-1000/ИВМ (собственная сборка ИВМ СО РАН, [11]) содержит 24 вычислительных узла AMD Athlon64/3500+/1Гб (однопроцессорные, одноядерные); 12 вычислительных узлов AMD Athlon64 X2 Dual Core/4800+/2Гб (однопроцессорные, двухъядерные); 12 вычислительных узлов 2 X Dual-Core AMD Opteron Processor 2216/4Гб (двухпроцессорные, двухъядерные). Управляющий узел, сервер доступа и файловый сервер Athlon64/3500+/1Gb с общей дисковой памятью 400 Гб под управлением ОС Gentoo Linux. Управляющая сеть FastEthernet (100 Мбит/сек), сеть передачи данных GigaEthernet (1000 Мбит/сек). Необходимо отметить, что поскольку кластер является гетерогенным, то временные характеристики выполнения программы осреднялись по результатам нескольких десятков расчетов.

На рис. 7 представлена зависимость ускорения вычислений от количества используемых процессоров для модельных сеток. Чтобы не загромождать рисунок, не отображены графики ускорений, полученных для декомпозиции с теньвыми гранями с блокирующими обменами, поскольку они практически совпадают с графиками ускорения для декомпозиции с теньвыми гранями с неблокирующими обменами.

Анализ вычислительных экспериментов показывает, что при сравнительно небольшом количестве процессоров ($P \leq 12$) значение ускорения остается одинаковым для всех рассматриваемых вариантов, при этом можно отметить незначительное преимущество декомпозиции без теневых граней.

В алгоритме пока не используется возможность совмещения вычислений и обменов, поэтому влияние блокирующих и неблокирующих вариантов пересылок должно быть минимальным. В то же время, на сетке размерностью 401×401 блокирующие обмены для декомпозиции без теневых граней не дают рост ускорения, начиная с вычислений на 12-ти процессах. В остальных случаях на сетке 401×401 рост ускорения наблюдается вплоть до использования 22-х процессов. Наличие эффективности больше единицы в районе 18-ти – 22-х процессов объясняется, по-видимому, попаданием в кэш. На сетке 801×801 при общем увеличении ускорения вплоть до использования 20 процессов отмечается «провал» при 16-ти процессах. Неустойчивость при количестве процессов больше 22-х говорит о преобладании в этих случаях времени обменов над вычислениями, архитектурными особенностями кластера и реализацией MPI.

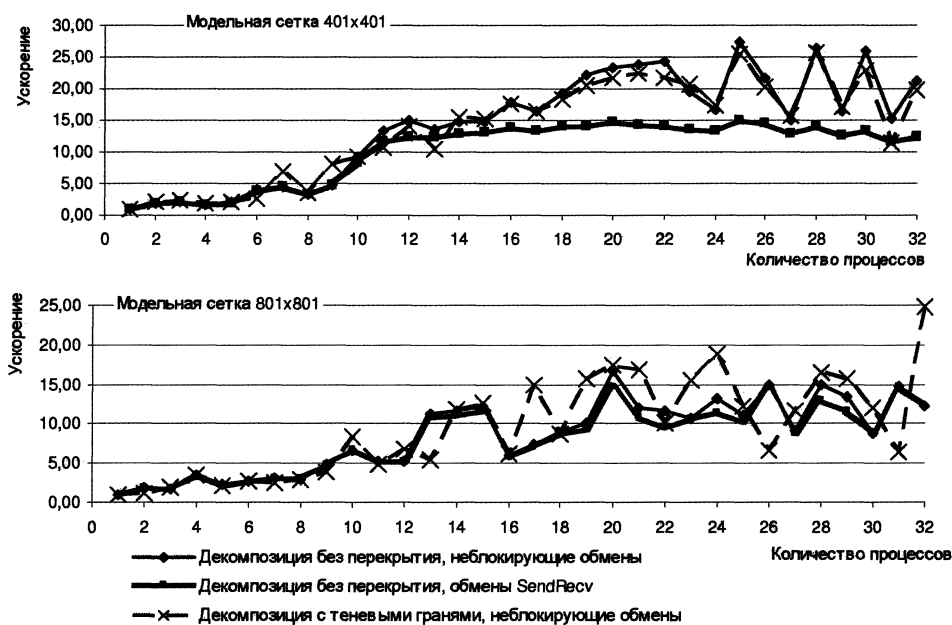


Рис. 7. Зависимость ускорения вычислений от количества доступных процессоров

В работах [5, 6] приведены некоторые результаты, характеризующие для этой же задачи эффективность распараллеливания кода с использованием языка Fortran-DVM при проведении численных экспериментов на равномерной модельной сетке и в акватории Мирового океана. Декомпозиция области в работе проводилась автоматически и использовала технологию теневых граней. Проводя сравнение с этими результатами, заметим, что при использовании 8-ми и более процессов программирование параллельных алгоритмов при помощи функций MPI показывает несколько более высокие значения ускорения вычислений. Однако, данных для добросовестного сравнения возможностей MPI и DVM на данной задаче не достаточно.

3.2. Вычислительные эксперименты для акватории Охотского моря

Тестовые расчеты для акватории Охотского моря проводились на сетках, подготовленных С.Ф. Пятаевым и И.В. Киреевым на основе открытой батиметрической базы данных ЕТОРО2 [6, 10].

В рассмотренной сетке число узлов $N_{nd} = 43\,768$, а число треугольных элементов $N_{el} = 78\,929$ (рис. 8 а).

Численный эксперимент соответствует начальным данным с локальным подъемом уровня, описываемым гауссовской функцией

$$\xi(0, \lambda, \varphi) = A \exp\left(-(\lambda - \lambda_0)^2 / (2D)^2 - (\varphi - \varphi_0)^2 / (2D)^2\right).$$

В расчетах было принято $A = 10$, $\lambda_0 = 149,1^\circ$ восточной долготы, а $\varphi_0 = 53,1^\circ$ северной широты, $D = 0,005$, коэффициент трения $r_* = 0,0026$. Для скоростей предполагались нулевые начальные данные: $u(0, \lambda, \varphi) = v(0, \lambda, \varphi) = 0$.

В построенной сетке из общего числа граничных участков около 6.4% проходят по морю. На таких участках $m_2 = 1$, и в краевом условии (2) полагали $\beta = 1$ и $d(t, \lambda, \varphi) \equiv 0$.

Результаты численного моделирования показаны на рис. 8 б) – г), где представлена функция $\xi(t, \lambda, \varphi)$ для некоторых моментов времени. Линиями показаны границы, полученные при декомпозиции области на 8 частей. Поскольку сетка сильно сгущается в приграничных областях, то ширина полосы, которая отводится одному процессору, в прибрежной зоне значительно уже, чем в море. В табл. 2 приведены результаты численных экспериментов на различном числе процессоров. Здесь верхние индексы «bl» и «unbl» соответствуют экспериментам с блокирующими и неблокирующими операциями обмена соответственно.

Таблица 2

Результаты численных экспериментов для задачи в акватории Охотского моря

Количество процессоров	1	2	4	8
Время t^{bl} , с	6,8729	4,0690	2,3030	1,6324
Ускорение S^{bl}	1,0000	1,6891	2,9843	4,2103
Эффективность E^{bl}	1,0000	0,8446	0,7461	0,5263
Время t^{unbl} , с	7,0290	4,1209	2,3389	1,5304
Ускорение S^{unbl}	1,0000	1,7057	3,0053	4,5928
Эффективность E^{unbl}	1,0000	0,8528	0,7513	0,5741

Из табл. 2 видно, что ускорение вычислений увеличивается пропорционально количеству доступных процессоров. При этом время вычислений при использовании неблокирующих передач незначительно меньше по сравнению со временем вычислений при наличии блокирующих передач.

Следует отметить, что декомпозиция области с теневыми гранями в этом случае является трудоемким процессом, поэтому не проводилась.

Сравнение с результатами, полученными при применении технологии DVM [6], дает преимущество наших алгоритмов при большом количестве процессоров.

4. Заключение

На примере численного решения краевой задачи для уравнений мелкой воды в работе рассмотрены технологические аспекты разработки масштабируемых параллельных алгоритмов для кластерных вычислительных систем с использованием библиотеки MPI.

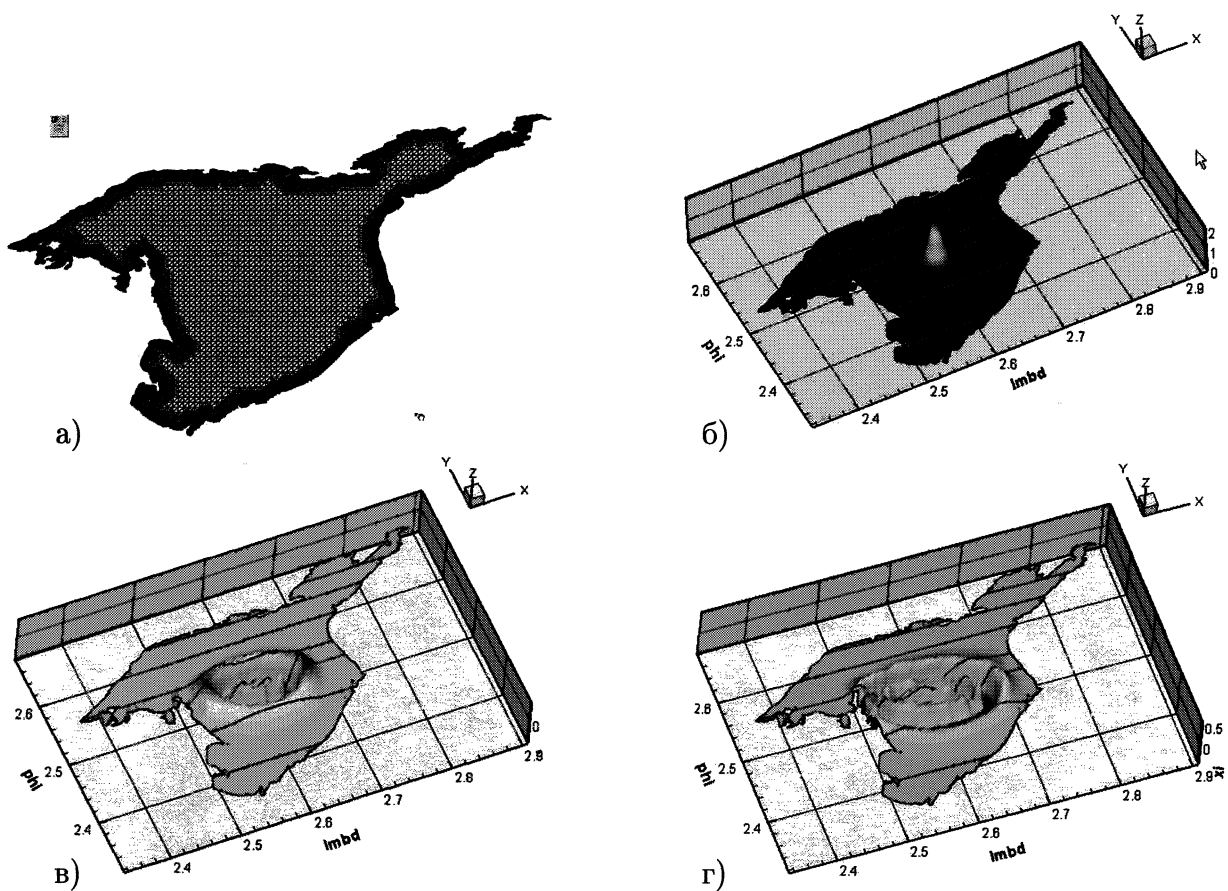


Рис. 8. Численные эксперименты в акватории Охотского моря на 8 процессорах: а) общий вид сетки; б) начальное возмущение; в) через 42 мин; г) через 67 мин

Поскольку при дискретизации задачи использовался метод конечных элементов с организацией вычислений по треугольным элементам, было рассмотрено два естественных подхода к декомпозиции области – без перекрытий и с теньвыми гранями.

Теоретические оценки показали, что алгоритм обладает значительным объемом потенциального параллелизма и хорошей, с точки зрения распараллеливания, структурой, что дает ускорение, в зависимости от количества используемых процессоров, теоретически близкое к линейному.

Численные эксперименты показали, что использование неблокирующего режима обменов, которое допускается алгоритмом, является безусловно более эффективным. В дальнейшем планируется повысить эффективность алгоритма, в том числе и за счет совмещения вычислений с неблокирующими операциями обмена.

Следует отметить как явное преимущество простоту организации параллельного алгоритма при декомпозиции без перекрытия подобластей на неструктурированных триангуляциях реальных акваторий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00621-а) и Президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант НШ-3431.2008.9). Статья рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2009».

Литература

1. Марчук, Г.И. Динамика океанских приливов / Г.И. Марчук, Б.А. Каган. – Л.: Гидрометиздат, 1983.
2. Agoshkov, V.I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem / V.I. Agoshkov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2005. – Vol. 20, № 1. – P. 1 – 18.
3. Kamenshchikov, L.P. Simulation of surface waves in basins by the finite element method / L.P. Kamenshchikov, E.D. Karepova, V.V. Shaidurov // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2006. – Vol. 21, №4. – P. 305 – 320.
4. Karepova, E.D. Numerical Solution of the Boundary Problem for Shallow Water Equations for Modelling Surface Waves in World Ocean by Finite Elements Methods / L.P. Kamenshchikov, E.D. Karepova, V.V. Shaidurov // Finite Difference Methods: Theory and Applications. Proceedings of Fourth International Conference FDM:T&A'06. – Bulgaria, 2007. – P. 227 – 233.
5. Каменщиков, Л.П. Моделирование поверхностных волн в водоемах методом конечных элементов на вычислительном кластере / Л.П. Каменщиков, Е.Д. Кареева, В.В. Шайдуров // Избранные материалы Четвертой школы-семинара «Распределенные и кластерные вычисления». – Красноярск, 2005. – С. 114 – 125.
6. Моделирование гравитационных волн в Мировом океане методом конечных элементов с распараллеливанием / Л.П. Каменщиков, Е.Д. Кареева, С.Ф. Пятаев, В.В. Шайдуров // Избр. материалы Шестой школы-семинара «Распределенные и кластерные вычисления». – Красноярск, 2006. – С. 52 – 64.
7. Ортега, Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем: пер. с англ. / Дж. Ортега. – М.: Мир, 1991.
8. Efficient Management of Parallelism in Object-Oriented Numerical Software Libraries, Modern Software Tools in Scientific Computing / S. Balay, W.D. Gropp, L.C. McInnes and others. – Birkhauser Press, 1997. – P. 163 – 202.
9. McBryan, O.A. An overview of message passing environments / O.A. McBryan // Parallel Computing. – 1994. – V 20. – P. 417 – 441.
10. National Geophysical Data Center. <http://www.ngdc.noaa.gov/ngdc.html>
11. Исаев, С.В. Развитие Красноярского центра параллельных вычислений / С.В. Исаев, А.В. Малышев, В.В. Шайдуров // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 2006. – Т. 11, спецвып. – С. 28 – 33.

Отдел вычислительной математики,
Институт вычислительного моделирования СО РАН
jane@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 2 марта 2009 г.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Т.Г. Сукачева

THE UNSTEADY LINEARIZED MODEL OF MOVEMENT OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC LIQUID OF HIGH ORDER

T.G. Sukacheva

Рассматривается первая начально-краевая задача для системы уравнений Осколкова, моделирующей в линейном приближении динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта высокого порядка. Данная задача исследуется в рамках теории линейных неоднородных уравнений соболевского типа. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, и получено описание ее расширенного фазового пространства.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, расширенное фазовое пространство, относительно p -ограниченный оператор, система уравнений Осколкова.

The author considers the first initial boundary-value problem for the Oskolkov equation system modeling the dynamics of the incompressible viscoelastic liquid of Kelvin – Voight of high order in the linear approximation. This problem is solved within the frameworks of the theory of the linear heterogeneous Sobolev type equations. The author proves the existence theorem of the unique solution of the problem and finds the description of its extended phase space.

Keywords: equations of the Sobolev type, extended phase space, relatively p -bounded operator, Oskolkov system of equations

Введение

Система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \varkappa \nabla^2) u_t = \nu \nabla^2 u - (\tilde{u} \cdot \nabla) u - (u \cdot \nabla) \tilde{u} \\ + \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^{n_m-1} A_{m,s} \nabla^2 w_{m,s} - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla \cdot u, \\ \frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = u + \alpha_m w_{m,s}, \quad m = \overline{1, M}, \\ \frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \quad s = \overline{1, n_m - 1}, \\ \alpha_m < 0, A_{m,s} > 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

моделирует в линейном приближении течение вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина – Фойгта порядка $k > 0$, $k = n_1 + n_2 + \dots + n_M$ ([1]). Данная система получена в результате линеаризации соответствующей модели [2].

Функция $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, где $u_i = u_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$ означает вектор скорости жидкости, вектор-функция $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i = f_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$ характеризует объемные силы, $p = p(x, t)$ отвечает давлению жидкости. Вектор-функция $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n)$, $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ соответствует стационарному решению исходной системы (так как таких стационарных решений может быть несколько, то мы не должны ограничиваться рассмотрением только одного – нулевого стационарного решения). Параметры $\nu \in \mathbb{R}_+$, $\varkappa \in \mathbb{R}$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $A_{m,s}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Рассмотрим задачу Коши-Дирихле для системы (1):

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & w_{m,s}(x, 0) &= w_{m,s}^0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ u(x, t) &= 0, & w_{m,s}(x, t) &= 0 \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ m &= \overline{1, M}, & s &= \overline{1, n_m - 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В случае, когда $f = f(x)$, $k = 0$ задача (1), (2) рассматривалась в [3], в автономном случае при $k > 0$ в [4]. Нашей целью будет являться изучение разрешимости задачи (1), (2) при нестационарном свободном члене $f = f(x, t)$. Эту задачу мы исследуем в рамках теории линейных уравнений соболевского типа. Поэтому в первой части статьи кратко рассматривается абстрактная задача Коши для указанного класса уравнений, а во второй части задача (1), (2) изучается как конкретная интерпретация абстрактной задачи.

1. Абстрактная задача

Пусть \mathcal{U} и \mathcal{F} – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ и $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Пусть интервал $I_a^b = (a, b)$ содержит точку 0 и вектор-функция $f \in C^\infty(I_a^b; \mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \quad (3)$$

для линейного операторного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad (4)$$

где операторы L и M определены выше.

Хорошо известно, что задача (3), (4) однозначно разрешима не для всех начальных данных u_0 из банахова пространства \mathcal{U} . Поэтому актуальным является описание множества корректности указанной задачи. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 1.

Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ назовем расширенным фазовым пространством задачи (3), (4), если:

- (i) любое решение $u \in C^\infty(I_a^b; \mathcal{U})$ уравнения (4) лежит в \mathcal{B}^t , т.е. $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t$ для любого $t \in I_a^b$;
- (ii) при любом $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (3), (4).

Замечание 1.

Понятие расширенного фазового пространства обобщает понятие фазового пространства [3] на неавтономный случай, и представленные в этом параграфе результаты изложены в соответствии с работами [3, 5]

Замечание 2. Ранее вместо термина «расширенное фазовое пространство» использовался термин «конфигурационное пространство» [4], что вносило некоторую путаницу в терминологию [5].

Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда задача (3), (4) редуцируется к эквивалентной системе

$$\begin{cases} R\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}f^0, & u^0(0) = u_0^0, \\ \dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}f^1, & u^1(0) = u_0^1, \end{cases} \quad (5)$$

где $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $u^k \in \mathcal{U}^k$, $f^k \in \mathcal{F}^k$, $k = 0, 1$; \mathcal{U}^k , (\mathcal{F}^k) – подпространства банахова пространства \mathcal{U} (\mathcal{F}), такие, что $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1 = \mathcal{U}$ ($\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$); M_k и L_k – сужение оператора M и L соответственно на подпространство \mathcal{U}^k . По построению $S \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$. Тогда вторая задача (5) имеет единственное решение $u^1 \in C^\infty(I_a^b; \mathcal{U}^1)$, представимое в виде

$$u^1(t) = \exp(tS)u_0^1 + \int_0^t \exp((t-s)S)L_1^{-1}f^1(s) ds, \quad t \in I_a^b,$$

причем $\exp(tS) = U_1^t$ – полугруппа, являющаяся сужением разрешающей полугруппы U^t однородного уравнения, соответствующего уравнению (4), на \mathcal{U}^1 , а $\exp((t-s)S) = U_1^{t-s}$. Для рассмотрения первой задачи (5) предположим, что ∞ – устранимая особая точка либо полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ L -резольвенты оператора M , т.е. оператор M относительно p -ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$ [5]. Тогда, последовательно дифференцируя p раз первое уравнение (5) по t и умножая слева на оператор R , получим

$$u^0(t) = - \sum_{q=0}^p R^q M_0^{-1} \frac{d^q f^0}{dt^q}(t), \quad t \in I_a^b. \quad (6)$$

Отсюда видно, что первая задача (5) неразрешима, если

$$u_0^0 \neq - \sum_{q=0}^p R^q M_0^{-1} \frac{d^q f^0}{dt^q}(0).$$

С другой стороны, если (6) выполняется, то первая задача имеет единственное решение $u^0 \in C^\infty(I_a^b; \mathcal{U}^0)$.

Из соотношения (6) следует, что расширенное фазовое пространство задачи (5), а следовательно, и задачи (3), (4) имеет вид

$$\mathcal{B}^t = \{(u(t), t) : u \in \text{dom } M, t \in \mathbb{R}, (I - Q)(Mu + \sum_{q=0}^p \tilde{R}^q \frac{d^q f}{dt^q}(t)) = 0\},$$

где $\tilde{R} = L_0 M_0^{-1}(I - Q)$, Q – проектор на подпространство \mathcal{F}^1 .

Теорема 1. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$. Тогда при любом $f \in C^\infty(I_a^b; \mathcal{F})$ и при любом u_0 таком, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$, существует единственное решение $u \in C^\infty(I_a^b; \mathcal{U})$ задачи (3), (4), имеющее вид:

$$u(t) = - \sum_{q=0}^p R^q M_0^{-1}(I - Q) \frac{d^q f}{dt^q}(t) + U_1^t u_0^1 + \int_0^t U_1^{t-s} L^{-1} Q f(s) ds.$$

2. Конкретная интерпретация

Рассмотрим задачу (2) для системы Осколкова (1), представленной в виде [4]

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \varkappa \nabla^2)u_t = \nu \nabla^2 u - (\tilde{u} \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)\tilde{u} \\ + \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^{n_m-1} A_{m,s} \nabla^2 w_{m,s} - \vec{p} + f, \\ 0 = \nabla(\nabla \cdot u), \\ \frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = u + \alpha_m w_{m,s}, \quad m = \overline{1, M}, \\ \frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \quad s = \overline{1, n_m - 1}, \\ \alpha_m < 0, \quad A_{m,s} > 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Здесь $\nabla p = \vec{p}$, т.к. во многих гидродинамических задачах знание градиента давления предпочтительнее, чем знание давления [6]. Далее сведем задачу (7), (2) к задаче Коши (3) для уравнения (4). Редукцию проведем, следуя [2, 4].

Обозначим через $\mathbf{H}^2 = (W_2^2)^n$, $\mathbf{H}^1 = (W_2^1)^n$, $\mathbf{L}^2 = (L^2)^n$ — соболевские пространства вектор-функций $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, определенных в области Ω . Рассмотрим линейал $\mathcal{L} = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot u = 0\}$ вектор-функций, соленоидальных и финитных в области Ω . Замыкание \mathcal{L} по норме \mathbf{L}^2 обозначим через \mathbf{H}_σ . \mathbf{H}_σ — гильбертово пространство со скалярным произведением, унаследованным из \mathbf{L}^2 . Кроме того, существует расщепление $\mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где \mathbf{H}_π — ортогональное дополнение к \mathbf{H}_σ . Обозначим через $\Pi : \mathbf{L}^2 \rightarrow \mathbf{H}_\pi$ — ортопроектор. Сужение проектора Π на пространство $\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}^2$ является непрерывным оператором $\Pi : \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}^1 \rightarrow \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}^1$. (Обсуждение этого круга вопросов см. в [7].) Представим поэтому пространство $\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}^1$ в виде прямой суммы $\mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2$, где $\mathbf{H}_\sigma^2 = \ker \Pi$, $\mathbf{H}_\pi^2 = \text{im } \Pi$. Имеет место плотное вложение $\mathcal{L} \subset \mathbf{H}_\sigma^2$ и непрерывные плотные вложения $\mathbf{H}_\sigma^2 \hookrightarrow \mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi^2 \hookrightarrow \mathbf{H}_\pi$. Пространство \mathbf{H}_π^2 состоит из вектор-функций, равных нулю на $\partial\Omega$ и являющихся градиентами функций $\varphi \in W_2^3(\Omega)$.

Формулой $A = \nabla^2$ зададим линейный непрерывный оператор $A : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{L}^2$ с дискретным, отрицательным, конечнократным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$.

Пусть $\tilde{u} \in \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2$. Тогда формулой

$$B : u \rightarrow \nu \nabla^2 u - (\tilde{u} \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)\tilde{u}$$

зададим линейный непрерывный оператор $B : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{L}^2$.

Формулой $C : u \rightarrow \nabla(\nabla u)$ зададим линейный непрерывный оператор $C : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{L}^2$, причем $\text{im } C = \mathbf{H}_\pi$, $\ker C = \mathbf{H}_\sigma^2$.

Положим $\Sigma = I - \Pi$ и обозначим через $\tilde{A}(\tilde{B})$ сужение оператора ΣA (ΣB) на \mathbf{H}_σ^2 .

Оператор $\tilde{A} : \mathbf{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbf{H}_\sigma$ линеен и непрерывен, его спектр $\sigma(\tilde{A})$ дискретен, отрицателен, конечнократен, сгущается лишь на $-\infty$.

Пусть $A_\varkappa = I - \varkappa A$. Выберем параметр \varkappa таким, чтобы $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(\tilde{A})$. Обозначим через $A_{\varkappa\sigma}(A_{\varkappa\pi})$ сужение оператора $\Sigma A_\varkappa(\Pi A_\varkappa^{-1})$ на $\mathbf{H}_\sigma^2(\mathbf{H}_\pi)$.

Предположим, что $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(\tilde{A})$. Тогда оператор $A_{\varkappa\sigma} : \mathbf{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbf{H}_\sigma$ ($A_{\varkappa\pi} : \mathbf{H}_\pi \rightarrow \mathbf{H}_\pi^2$) — топологический изоморфизм.

Представим пространства: $\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}^1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$; $\mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$. Положим

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{i=0}^k \mathcal{U}_i \quad ; \quad \mathcal{F} = \bigoplus_{i=0}^k \mathcal{F}_i, \quad (8)$$

где $\mathcal{U}_0 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_0 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$, $\mathcal{U}_i = \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}^1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$, $\mathcal{F}_i = \mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = 1, 2, \dots, k$. Элемент $u \in \mathcal{U}$ имеет вид: $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p, \omega_{1,0}, \dots, \omega_{M,0}, \omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,n_1-1}, \dots, \omega_{M,1}, \dots, \omega_{M,n_M-1})$, где $u_\sigma = \Sigma u$, $u_\pi = \Pi u$, $u_p = \vec{p}$ а элемент $f \in \mathcal{F}$: $f = (f_\sigma, f_\pi, 0, \dots, 0)$, где $f_\sigma = \Sigma f$, $f_\pi = \Pi f$.

Лемма 1. Пусть \mathcal{U} и \mathcal{F} определены в (8). Тогда

(i) формулой

$$L := \begin{pmatrix} \Sigma A_\varepsilon \Sigma & O & O & O & \dots & O \\ O & \Pi A_\varepsilon \Pi & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & I & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I \end{pmatrix} \quad (9)$$

определяется линейный непрерывный оператор $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$. Причем L – матрица порядка $(k + 3)$. Если $\varepsilon^{-1} \notin \sigma(A)$, то $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_k$, $\text{im } L = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times$

$\{0\} \times \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_k$;

(ii) если $\tilde{u} \in \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2$, то матрицей M , имеющей вид:

$$\begin{pmatrix} \Sigma B \Sigma & \Sigma B \Pi & O & A_{10} \tilde{\Delta} & \dots & A_{M0} \tilde{\Delta} & A_{11} \tilde{\Delta} & \dots & A_{1n_1-1} \tilde{\Delta} & \dots & A_{M1} \tilde{\Delta} & \dots & A_{Mn_M-1} \tilde{\Delta} \\ \Pi B \Sigma & \Pi B \Pi & -\Pi & A_{10} \hat{\Delta} & \dots & A_{M0} \hat{\Delta} & A_{11} \hat{\Delta} & \dots & A_{1n_1-1} \hat{\Delta} & \dots & A_{M1} \hat{\Delta} & \dots & A_{Mn_M-1} \hat{\Delta} \\ O & C & O & O & \dots & O & O & \dots & O & \dots & O & \dots & O \\ I & I & O & \alpha_1 & \dots & O & O & \dots & O & \dots & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & O & O & \dots & \alpha_M & O & \dots & O & \dots & O & \dots & O \\ O & O & O & I & \dots & O & \alpha_1 & \dots & O & \dots & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I & O & \dots & O & \dots & \alpha_M & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O & O & \dots & O & \dots & O & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} \quad (10)$$

определяется линейный непрерывный оператор $M : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$, здесь $\tilde{\Delta} = \Sigma \Delta$, $\hat{\Delta} = \Pi \Delta$.

Редукция задачи (7), (2) к задаче Коши (3) для уравнения (4) закончена.

Лемма 2. Пусть \mathcal{U} и \mathcal{F} определены в (8), а L и M – в (9) и (10) соответственно. Пусть $\varepsilon^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(\tilde{A})$, тогда оператор M ($L, 1$)-ограничен.

Доказательство. В силу леммы 1 оператор L бирасщепляющий. Поэтому для доказательства леммы ввиду [3] достаточно показать, что каждый вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один M -присоединенный вектор и $M[\mathcal{U}^{01}] \oplus \text{im } L = \mathcal{F}$.

Пусть $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$. Тогда в силу леммы 1 (i) вектор $\varphi = (0, 0, \varphi_p, 0, \dots, 0)$, $\varphi_p \neq \{0\}$. Отсюда в силу (10) $M\varphi = (0, 0, -\varphi_p, 0, \dots, 0) \in \text{im } L$. Найдем $\psi \notin \ker L \setminus \{0\} : L\psi = M\varphi$.

Используя (10), получаем систему уравнений:

$$A_{\Sigma \sigma} \psi_\sigma = 0 \quad \Pi A_{\Sigma \pi} \psi_\pi = -\varphi_p. \quad (11)$$

Из (11) следует, что $\psi_\pi \neq 0$, т.к. $\varphi_p \neq 0$ по условию, а значит, и $C\psi_\pi \neq 0$. Откуда

$$M\psi = \begin{pmatrix} \Sigma(B\psi_\sigma + B\psi_\pi) \\ \Pi(B\psi_\sigma + B\psi_\pi) - \psi_p \\ C\psi_\pi \\ \psi_\sigma + \psi_\pi \\ \vdots \\ \psi_\sigma + \psi_\pi \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \notin \text{im } L.$$

Осталось доказать существование вектора $\psi \notin \ker L \setminus \{0\}$, удовлетворяющего системе (11). Для этого рассмотрим оператор

$$\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma A_{\mathfrak{z}\pi}^{-1} \Sigma & \Sigma A_{\mathfrak{z}\pi}^{-1} \Pi & O & O & \dots & O \\ \Pi A_{\mathfrak{z}\pi}^{-1} \Sigma & A_{\mathfrak{z}\pi} & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & I & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\tilde{L}^{-1}L = \begin{pmatrix} \Sigma & O & O & O & \dots & O \\ O & \Pi & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & I & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}),$$

$$L\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma & O & O & O & \dots & O \\ O & \Pi & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & I & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}),$$

то компоненты ψ_σ и ψ_π вектора ψ можно найти из равенств: $\psi_\sigma = -\Sigma A_{\mathfrak{z}\pi}^{-1} \varphi_p$, $\psi_\pi = -A_{\mathfrak{z}\pi}^{-1} \varphi_p$, а компоненту ψ_p можно выбрать произвольно.

Проверим второе условие $M[\mathcal{U}^{01}] \oplus \text{im } L = \mathcal{F}$.

Положим $\mathcal{U}^{00} = \ker L$, $\text{coim } L = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\} \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_k$. Пользуясь оператором \tilde{L}^{-1} , получим

$$\mathcal{F}^{00} = M[\mathcal{U}^{00}] = \{0\} \times \mathbf{H}_\pi \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{k+1} \subset \text{im } L,$$

$$\mathcal{U}^{01} = \tilde{L}^{-1}[\mathcal{F}^{00}] = \Sigma A_{\mathfrak{z}\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi] \times A_{\mathfrak{z}\pi}[\mathbf{H}_\pi] \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{k+1}.$$

Поскольку $A_{\mathfrak{z}\pi}[\mathbf{H}_\pi] = \mathbf{H}_\pi^2$ в силу леммы 2.4.3, то

$$\mathcal{U}^{01} = \Sigma A_{\mathfrak{z}\pi}^{-1} A_{\mathfrak{z}\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{k+1} \subset \text{coim } L.$$

Отсюда

$$\mathcal{F}^{01} = M[\mathcal{U}^{01}] = \Sigma B(\Sigma A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1} + I)[\mathbf{H}_{\pi}^2] \times B(\Sigma A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1} + I)[\mathbf{H}_{\pi}^2] \times \underbrace{\times C[\mathbf{H}_{\pi}^2] \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_k.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Sigma A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1} + I &= \Sigma A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1} + A_{\text{ae}\pi} A_{\text{ae}\pi}^{-1} = \\ &= (\Sigma A_{\text{ae}}^{-1} + A_{\text{ae}}^{-1}) A_{\text{ae}\pi}^{-1} = A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{01} = \Sigma B A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times B A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_k \notin \text{im } L, \text{ где оператор}$$

\tilde{C}^{-1} — обратный к сужению \tilde{C} оператора C на \mathbf{H}_{π}^2 .

Далее, положим

$$P_0 = \begin{pmatrix} O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & \Pi & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} O & P_1^{12} & O & O & \dots & O \\ O & & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

где $P_1^{12} = \Sigma A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1}$;

$$Q_0 = \begin{pmatrix} O & O & O & O & \dots & O \\ O & \Pi & Q_0^{23} & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} O & O & Q_1^{13} & O & \dots & O \\ O & O & Q_1^{23} & O & \dots & O \\ O & O & \Pi & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

где $Q_1^{13} = \Sigma B A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1}$, $Q_1^{23} = B A_{\text{ae}}^{-1} A_{\text{ae}\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1}$, $Q_0^{23} = -Q_1^{23}$.

Матрицы P_0, P_1, Q_0, Q_1 имеют порядок $(k+3)$. Нетрудно проверить, что операторы $P_k : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{0k}$, $Q_k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{0k}$, $k = 0, 1$ — проекторы, причем $P_0 P_1 = P_1 P_0 = O$, $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_0 = O$. Поэтому оператор $\tilde{Q} = I - Q_1$ тоже является проектором, причем $\text{im } \tilde{Q} = \text{im } L$, $\text{ker } \tilde{Q} = \mathcal{F}^{01}$. Значит, $\mathcal{F}^{01} \oplus \text{im } L = \mathcal{F}$. \square

Найдем расширенное фазовое пространство задачи (7), (2).

Из леммы 2 и п.1 для задачи (7), (2) расширенное фазовое пространство \mathcal{B}^t определяется равенством $(I - Q)(Mu + \tilde{R}^0 \frac{d^0 f}{dt^0} + \tilde{R}^1 \frac{d^1 f}{dt^1}) = 0$ или $(I - Q)v = 0$, где $v = Mu + f(t) + \tilde{R} \frac{df(t)}{dt}$, $\tilde{R} = L_0 M_0^{-1}(I - Q) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{F}^0)$, а проектор $I - Q = Q_0 + Q_1$. Поскольку $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_0 = O$, то $(Q_0 + Q_1)v = 0$ тогда и только тогда, когда $(Q_0 v = 0) \wedge (Q_1 v = 0)$. Первое из этих равенств эквивалентно условию $u_\pi = 0$, а второе выполняется тогда и только тогда, когда

$$\text{ПВ}u_\sigma + \Pi \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^{n_m-1} A_{m,s} \Delta \omega_{m,s} + f_\pi(t) + \tilde{R} \frac{df_\pi(t)}{dt} = u_p.$$

Итак, расширенное фазовое пространство имеет вид

$$\mathcal{B}^t = \{(u, t) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} : u_\pi = 0, u_p = \text{ПВ}u_\sigma + \Pi \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^{n_m-1} A_{m,s} \Delta \omega_{m,s} + f_\pi(t) + \tilde{R} \frac{df_\pi(t)}{dt}\}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любого $f \in \mathcal{F}$, $f = (f_\sigma, f_\pi, 0, \dots, 0)$ и любого u_0 такого, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$, существует единственное решение задачи (1), (2).

Автор выражает признательность профессору Г.А. Свиридюку за внимание к данным исследованиям и обсуждение результатов.

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. – №179. – С. 126 – 164.
2. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Изв. вузов. Математика. – 1998. – №3(430). – С. 47 – 54.
3. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т.49, №4. – С.47 – 74.
4. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева; Новгород. гос. ун-т. – Великий Новгород, 2004. – 249 с.
5. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева. // Вестн. МаГУ. Математика. – Магнитогорск, 2005. – Вып. 8. – С. 5 – 33.
6. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Изд. 3. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
7. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – Изд. 2. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

Кафедра математического анализа,
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
tamara.sukacheva@novsu.ru

Поступила в редакцию 20 февраля 2009 г.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО РАЗЛИЧНЫМ КАРТОГРАФИЧЕСКИМ ДАННЫМ

А.А. Сухинов

RECONSTRUCTION OF BASIN BOTTOM SURFACE ON THE BASIS OF VARIOUS MAP DATA

A.A. Sukhinov

Описан новый метод интерполяции различных экспериментальных данных, учитывающий форму области интерполяции и погрешность данных. Метод применен к задаче восстановления донной поверхности по различным картографическим данным (отметки глубины, изолинии глубины, области, отмеченные различными цветами). Разработан многомасштабный параллельный алгоритм, выполняющий интерполяцию.

Ключевые слова: интерполяция, электронная карта, итерационный метод решения, многомасштабный алгоритм, параллельный алгоритм

It has been elaborated the problem of interpolating of various experimental data taking into account the precision of measurements and the shape of the interpolation area. The developed method is used to interpolate depth data given in different forms (digital depth marks, depth isolines, areas marked with different colours). The parallel multiscale implementation is described.

Keywords: interpolation, digital map, iterative method, multiscale algorithm, parallel algorithm

Введение

Для построения гидродинамических моделей мелководных водоемов и прибрежных систем требуются точные электронные карты этих объектов [1]. Как правило, обычные бумажные карты являются основным источником информации для построения электронных карт. В данной статье рассмотрен последний этап построения карт, когда различная картографическая информация (отметки высоты, изолинии высоты, области, отмеченные различным цветом) уже переведена в цифровой вид. Предлагаемый метод также подходит для интерполяции других измеренных данных. Основное отличие предлагаемого метода от других методов интерполяции заключается в том, что он может учитывать точность измерений и форму области интерполяции.

Математически задача формулируется как оптимизационная задача с естественными ограничениями. Для получения результата должна быть решена система линейных уравнений с ограничениями. Это требует большого объема вычислений при использовании итерационных методов. Для существенного сокращения объема вычислений использован многомасштабный подход; дополнительное ускорение получено за счет использования параллельных вычислений.

1. Оптимизационная задача восстановления поверхности

В плоской области G заданы ограничения на диапазон изменения высот: функции $m(x, y)$ и $M(x, y)$ такие, что $m(x, y) < M(x, y)$, где $(x, y) \in G$ — горизонтальные координаты некоторой точки области. Это означает, что значение реальной глубины/высоты $e(x, y)$ в области G удовлетворяет неравенствам $m(x, y) \leq e(x, y) \leq M(x, y)$. Допустимы случаи, когда в некоторых точках или подобластях $m(x, y) = -\infty$ и/или $M(x, y) = +\infty$.

Требуется построить в области G функцию $f(x, y)$, которая имеет непрерывные производные первого порядка и ограниченные производные второго порядка, удовлетворяющую следующим условиям:

$$m(x, y) \leq f(x, y) \leq M(x, y), \quad (1)$$

$$\iint_{(x,y) \in G} \alpha^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \rightarrow \min_f, \quad (2)$$

где $\alpha \geq 0$ — параметр, значение которого будет описано ниже.

Постановка задачи имеет следующие отличия по сравнению с классической задачей интерполяции [2]:

- исходные данные представлены в интервальном виде: $[m(x, y), M(x, y)]$;
- форма области G также берется в расчет; это важно при интерполяции физических величин, существующих только в пределах некоторой области (например, концентрации загрязнений в водоеме).

Перечисленные особенности расширяют область применения предлагаемого интерполяционного метода.

Функции $m(x, y)$ и $M(x, y)$ обычно представляют собой результаты измерений. Например, если мы имеем N измерений глубины/высоты (x_i, y_i, e_i) , $1 \leq i \leq N$, то функции m и M могут быть заданы следующим образом:

$$m(x, y) = \begin{cases} e_i - \Delta e_i, & \text{если } \exists i : x_i = x, y_i = y; \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

$$M(x, y) = \begin{cases} e_i + \Delta e_i, & \text{если } \exists i : x_i = x, y_i = y; \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Здесь величины e_i имеют погрешность измерения $\Delta e_i > 0$. Предполагается, что координаты x_i, y_i известны точно.

Обсудим постановку задачи. Минимизация суммы квадратов вторых производных в выражении (2) приводит к тому, что поверхность в каждой точке стремится быть «наиболее близкой к плоскости». Член со смешанной производной присутствует для того, чтобы всё выражение (2) было нечувствительно к повороту системы координат.

Минимизация суммы квадратов первых производных дает тенденцию горизонтального положения интерполированной поверхности. Это соответствует минимизации потенциальной энергии земной поверхности. Коэффициент $\alpha \geq 0$ (обычно достаточно малый) предназначен для настройки этой особенности.

В общем, модель (1), (2) можно понимать как построение «наиболее гладкой» поверхности, соответствующей имеющимся ограничениям.

Лучшим алгоритмом интерполяции точечно заданных данных считается крайгинг [3]. Однако он вычислительно трудоемок и не учитывает форму области интерполяции. Подбор

параметра α позволяет значительно приблизить результаты предлагаемого метода к результатам интерполяции, получаемым при помощи крайгинга. По-видимому, в случае точечных исходных данных, имеющих одинаковую погрешность измерения $\Delta e_i = \Delta e$, значение параметра α следует выбирать таким, чтобы кривая

$$\gamma(h) = \frac{2}{3} (\Delta e)^2 + k \cdot (1 - e^{-\alpha h})^2, \quad h \geq 0 \quad (5)$$

при некотором параметре $k > 0$ наиболее близко аппроксимировала экспериментальную вариограмму [3], вычисленную по точкам (x_i, y_i, e_i) , $1 \leq i \leq N$.

2. Дискретизация задачи

В дальнейшем для простоты изложения будем считать, что G — квадратная область: $G = ((x, y) : 0 \leq x \leq H, 0 \leq y \leq H)$. Построим в области G равномерную прямоугольную сетку \bar{G} , состоящую из $N \times N$ квадратных ячеек $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, N$) размерами $h = H/N$. Далее будем считать, что $N \geq 4$ и N кратно четырем.

Определим сеточные функции $m_{i,j}$ и $M_{i,j}$:

$$\tilde{m}_{i,j} = \sup_{(x,y) \in C_{i,j}} m(x,y); \quad (6)$$

$$\tilde{M}_{i,j} = \inf_{(x,y) \in C_{i,j}} M(x,y); \quad (7)$$

$$m_{i,j} = \begin{cases} \tilde{m}_{i,j}, & \text{если } \tilde{m}_{i,j} \leq \tilde{M}_{i,j}, \\ (\tilde{m}_{i,j} + \tilde{M}_{i,j}) / 2, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (8)$$

$$M_{i,j} = \begin{cases} \tilde{M}_{i,j}, & \text{если } \tilde{m}_{i,j} \leq \tilde{M}_{i,j}, \\ (\tilde{m}_{i,j} + \tilde{M}_{i,j}) / 2, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

Тогда дискретные аналоги выражений (1), (2) могут быть записаны следующим образом:

$$m_{i,j} \leq f_{i,j} \leq M_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, N; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R \equiv & \frac{\alpha^2}{h^2} \sum_{i=2}^N \sum_{j=2}^N \left((f_{i,j} - f_{i-1,j})^2 + (f_{i,j} - f_{i,j-1})^2 \right) + \\ & + \frac{1}{h^4} \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=2}^{N-1} \left((f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j})^2 + (f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1})^2 \right) + \\ & + \frac{2}{h^4} \sum_{i=2}^N \sum_{j=2}^N (f_{i,j} - f_{i-1,j} - f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1})^2 \rightarrow \min, \quad (11) \end{aligned}$$

где $f_{i,j}$ — неизвестные величины. Для сокращения записи будем считать, что

$$f_{i,j} = 0, \quad \text{если } C_{i,j} \notin \bar{G}. \quad (12)$$

3. Решение дискретной задачи

В выражении (11) R является функцией аргументов $f_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$. Если зафиксировать значения всех аргументов функции R , кроме некоторого аргумента $f_{r,s}$, то она будет

представлять собой многочлен второй степени с положительным коэффициентом при $f_{r,s}^2$. Такая функция обладает минимумом, который достигается в единственной точке $\tilde{f}_{r,s}$, определяемой из уравнения:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial f_{r,s}} \right|_{f_{r,s}=\tilde{f}_{r,s}} = 0. \quad (13)$$

Тогда минимум функции R , как аргумента $f_{r,s}$, при ограничениях (10) будет достигаться в точке $f_{r,s}^*$, определяемой следующим образом:

$$f_{r,s}^* = \max \left(m_{r,s}, \min \left(M_{r,s}, \tilde{f}_{r,s} \right) \right) \equiv L_{r,s} \left(\tilde{f}_{r,s} \right). \quad (14)$$

Решим уравнение (13). Дифференцируя R по $f_{i,j}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial f_{i,j}} = & \frac{2\alpha^2}{h^2} [b_{i-1} \cdot (f_{i,j} - f_{i-1,j}) - b_{i+1} \cdot (f_{i+1,j} - f_{i,j}) + \\ & + b_{j-1} \cdot (f_{i,j} - f_{i,j-1}) - b_{j+1} \cdot (f_{i,j+1} - f_{i,j})] + \\ & + \frac{2}{h^4} [-2b_{i-1,i+1} \cdot (f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}) - 2b_{j-1,j+1} \cdot (f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}) + \\ & + b_{i-2} \cdot (f_{i-2,j} - 2f_{i-1,j} + f_{i,j}) + b_{i+2} \cdot (f_{i,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i+2,j}) + \\ & + b_{j-2} \cdot (f_{i,j-2} - 2f_{i,j-1} + f_{i,j}) + b_{j+2} \cdot (f_{i,j} - 2f_{i,j+1} + f_{i,j+2})] + \\ & + \frac{4}{h^4} [b_{i-1,j-1} \cdot (f_{i,j} - f_{i-1,j} - f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}) - \\ & - b_{i+1,j-1} \cdot (f_{i+1,j} - f_{i,j} - f_{i+1,j-1} + f_{i,j-1}) - \\ & - b_{i-1,j+1} \cdot (f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i,j} + f_{i-1,j}) + \\ & + b_{i+1,j+1} \cdot (f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j} + f_{i,j})], \quad (15) \end{aligned}$$

где сомножители b_k и $b_{k_1,k_2} = b_{k_1} \cdot b_{k_2}$ предназначены для правильной записи выражения (15) в приграничных ячейках:

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq k \leq N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (16)$$

Найдем значение $\tilde{f}_{i,j}$, при котором частная производная (15) равна нулю:

$$\begin{aligned} \alpha^2 h^2 [& b_{i-1} \cdot (\tilde{f}_{i,j} - f_{i-1,j}) - b_{i+1} \cdot (f_{i+1,j} - \tilde{f}_{i,j}) + \\ & + b_{j-1} \cdot (\tilde{f}_{i,j} - f_{i,j-1}) - b_{j+1} \cdot (f_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j})] + \\ & + [-2b_{i-1,i+1} \cdot (f_{i-1,j} - 2\tilde{f}_{i,j} + f_{i+1,j}) - 2b_{j-1,j+1} \cdot (f_{i,j-1} - 2\tilde{f}_{i,j} + f_{i,j+1}) + \\ & + b_{i-2} \cdot (f_{i-2,j} - 2f_{i-1,j} + \tilde{f}_{i,j}) + b_{i+2} \cdot (\tilde{f}_{i,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i+2,j}) + \\ & + b_{j-2} \cdot (f_{i,j-2} - 2f_{i,j-1} + \tilde{f}_{i,j}) + b_{j+2} \cdot (\tilde{f}_{i,j} - 2f_{i,j+1} + f_{i,j+2})] + \\ & + 2 [b_{i-1,j-1} \cdot (\tilde{f}_{i,j} - f_{i-1,j} - f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}) - \\ & - b_{i+1,j-1} \cdot (f_{i+1,j} - \tilde{f}_{i,j} - f_{i+1,j-1} + f_{i,j-1}) - \\ & - b_{i-1,j+1} \cdot (f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1} - \tilde{f}_{i,j} + f_{i-1,j}) + \\ & + b_{i+1,j+1} \cdot (f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j} + \tilde{f}_{i,j})] = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Сгруппируем члены:

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{i,j} \cdot [\alpha^2 h^2 (b_{i-1} + b_{i+1} + b_{j-1} + b_{j+1}) + 4(b_{i-1,i+1} + b_{j-1,j+1}) + \\ & + (b_{i-2} + b_{i+2} + b_{j-2} + b_{j+2}) + 2(b_{i-1,j-1} + b_{i+1,j-1} + b_{i-1,j+1} + b_{i+1,j+1})] - \\ & - f_{i-1,j} \cdot [\alpha^2 h^2 b_{i-1} + 2b_{i-1,i+1} + 2b_{i-2} + 2b_{i-1,j-1} + 2b_{i-1,j+1}] - \\ & - f_{i+1,j} \cdot [\alpha^2 h^2 b_{i+1} + 2b_{i-1,i+1} + 2b_{i+2} + 2b_{i+1,j-1} + 2b_{i+1,j+1}] - \\ & - f_{i,j-1} \cdot [\alpha^2 h^2 b_{j-1} + 2b_{j-1,j+1} + 2b_{j-2} + 2b_{i-1,j-1} + 2b_{i+1,j-1}] - \\ & - f_{i,j+1} \cdot [\alpha^2 h^2 b_{j+1} + 2b_{j-1,j+1} + 2b_{j+2} + 2b_{i-1,j+1} + 2b_{i+1,j+1}] + \\ & + f_{i-1,j-1} \cdot 2b_{i-1,j-1} + f_{i+1,j-1} \cdot 2b_{i+1,j-1} + f_{i-1,j+1} \cdot 2b_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1} \cdot 2b_{i+1,j+1} + \\ & + f_{i-2,j} \cdot b_{i-2} + f_{i+2,j} \cdot b_{i+2} + f_{i,j-2} \cdot b_{j-2} + f_{i,j+2} \cdot b_{j+2} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{i,j}^{-1,0} &= \alpha^2 h^2 b_{i-1} + 2b_{i-1,i+1} + 2b_{i-2} + 2b_{i-1,j-1} + 2b_{i-1,j+1}; \\ \tilde{k}_{i,j}^{+1,0} &= \alpha^2 h^2 b_{i+1} + 2b_{i-1,i+1} + 2b_{i+2} + 2b_{i+1,j-1} + 2b_{i+1,j+1}; \\ \tilde{k}_{i,j}^{0,-1} &= \alpha^2 h^2 b_{j-1} + 2b_{j-1,j+1} + 2b_{j-2} + 2b_{i-1,j-1} + 2b_{i+1,j-1}; \\ \tilde{k}_{i,j}^{0,+1} &= \alpha^2 h^2 b_{j+1} + 2b_{j-1,j+1} + 2b_{j+2} + 2b_{i-1,j+1} + 2b_{i+1,j+1}; \\ \tilde{k}_{i,j}^{-1,-1} &= -2b_{i-1,j-1}; \quad \tilde{k}_{i,j}^{+1,-1} = -2b_{i+1,j-1}; \\ \tilde{k}_{i,j}^{-1,+1} &= -2b_{i-1,j+1}; \quad \tilde{k}_{i,j}^{+1,+1} = -2b_{i+1,j+1}; \\ \tilde{k}_{i,j}^{-2,0} &= -b_{i-2}; \quad \tilde{k}_{i,j}^{+2,0} = -b_{i+2}; \quad \tilde{k}_{i,j}^{0,-2} = -b_{j-2}; \quad \tilde{k}_{i,j}^{0,+2} = -b_{j+2}; \\ \tilde{k}_{i,j}^{0,0} &= \tilde{k}_{i,j}^{-1,0} + \tilde{k}_{i,j}^{+1,0} + \tilde{k}_{i,j}^{0,-1} + \tilde{k}_{i,j}^{0,+1} + \tilde{k}_{i,j}^{-1,-1} + \tilde{k}_{i,j}^{+1,-1} + \\ & + \tilde{k}_{i,j}^{-1,+1} + \tilde{k}_{i,j}^{+1,+1} + \tilde{k}_{i,j}^{-2,0} + \tilde{k}_{i,j}^{+2,0} + \tilde{k}_{i,j}^{0,-2} + \tilde{k}_{i,j}^{0,+2}; \\ k_{i,j}^{p,q} &= \tilde{k}_{i,j}^{p,q} / \tilde{k}_{i,j}^{0,0}, \quad |p+q| \leq 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} & \tilde{k}_{i,j}^{0,0} \cdot \tilde{f}_{i,j} - \tilde{k}_{i,j}^{-1,0} \cdot f_{i-1,j} - \tilde{k}_{i,j}^{+1,0} \cdot f_{i+1,j} - \tilde{k}_{i,j}^{0,-1} \cdot f_{i,j-1} - \tilde{k}_{i,j}^{0,+1} \cdot f_{i,j+1} - \\ & - \tilde{k}_{i,j}^{-1,-1} \cdot f_{i-1,j-1} - \tilde{k}_{i,j}^{+1,-1} \cdot f_{i+1,j-1} - \tilde{k}_{i,j}^{-1,+1} \cdot f_{i-1,j+1} - \tilde{k}_{i,j}^{+1,+1} \cdot f_{i+1,j+1} - \\ & - \tilde{k}_{i,j}^{-2,0} \cdot f_{i-2,j} - \tilde{k}_{i,j}^{+2,0} \cdot f_{i+2,j} - \tilde{k}_{i,j}^{0,-2} \cdot f_{i,j-2} - \tilde{k}_{i,j}^{0,+2} \cdot f_{i,j+2} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\tilde{f}_{i,j} = \sum_{0 < |p+q| \leq 2} k_{i,j}^{p,q} \cdot f_{i+p,j+q} \equiv S_{i,j} (f_{i-2,j-2}, \dots, f_{i+2,j+2}). \quad (20)$$

С учетом (20) выражение (14) принимает вид:

$$f_{r,s}^* = L_{r,s} (S_{r,s} (f_{r-2,s-2}, \dots, f_{r+2,s+2})). \quad (21)$$

Полученный оператор (21) дает оптимальное значение отдельно взятой переменной $f_{r,s}$ при фиксированных значениях остальных переменных. Используем этот оператор для построения итерационного процесса решения задачи (10), (11).

Итерационный процесс можно осуществить, обходя ячейки сетки построчно, аналогично методу Гаусса—Зейделя. Однако такой алгоритм не подходит для решения на параллельной системе из-за цепной зависимости вычисляемых величин друг от друга. Поэтому обобщим для данной задачи метод верхней релаксации с красно-черным упорядочиванием узлов [4].

Для этого разделим всё множество ячеек сетки на 16 классов в соответствии со следующей таблицей, имеющей размеры $N \times N$:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 13 & 4 & 16 & 1 & 13 & 4 & \dots \\ 9 & 5 & 12 & 8 & 9 & 5 & 12 & \\ 3 & 15 & 2 & 14 & 3 & 15 & 2 & \\ 11 & 7 & 10 & 6 & 11 & 7 & 10 & \dots \\ \hline 1 & 13 & 4 & 16 & 1 & 13 & 4 & \\ \vdots & & & \vdots & & & & \ddots \end{array} \right]. \quad (22)$$

Каждая итерация выполняется следующим образом: вначале уточняются (при помощи оператора (21)) значения тех элементов, которые принадлежат первому классу, затем уточняются те элементы, которые принадлежат второму классу, и так далее до класса номер 16. Разностный шаблон оператора S ограничен квадратом 5×5 , а элементы каждого класса отстоят друг от друга на 3 ячейки сетки, поэтому элементы одного класса будут вычисляться независимо друг от друга. Это позволяет проводить вычисления параллельно.

Часть таблицы (22) размерами 4×4 ячейки называется матрицей Байера [5]. Она широко известна в теории обработки изображений. Существуют подобные матрицы любого размера $2^n \times 2^n$. Применительно к задаче итерационного решения системы уравнений особенностью этой матрицы является то, что низкочастотные составляющие ошибки, вносимой выбранным порядком обработки элементов, имеют максимально высокую частоту. Для сравнения, если использовать итерационный метод Гаусса—Зейделя без переупорядочивания узлов, получим ненулевую гармонику ошибки с длиной волны, сравнимой с размерами области. Такую гармонику можно трактовать, как появление выделенного направления, вызванного выбранным порядком обхода узлов. Ситуация усугубляется тем, что подобные итерационные методы крайне медленно снижают низкочастотные составляющие матрицы ошибок.

Для формальной записи итерационного метода нам потребуется представление матрицы B , дающее смещение элементов каждого класса по его номеру:

$$\begin{aligned} B^x &= (1, 3, 1, 3, 2, 4, 2, 4, 1, 3, 1, 3, 2, 4, 2, 4)^T; \\ B^y &= (1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 1, 3, 3, 1)^T. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда алгоритм итерационного процесса можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{l} \text{Repeat} \quad // \text{повторяем итерации} \\ \quad d \leftarrow 0 \quad // \text{изменение решения на текущей итерации} \\ \quad \text{For } c = 1, \dots, 16 \quad // \text{перебираем все классы ячеек} \\ \quad \quad \text{For } i = B_c^y, B_c^y + 4, \dots, B_c^y + N - 4 \\ \quad \quad \quad \text{For } j = B_c^x, B_c^x + 4, \dots, B_c^x + N - 4 \\ \quad \quad \quad \quad \tilde{f} \leftarrow S_{i,j}(f_{i-2,j-2}, \dots, f_{i+2,j+2}) \\ \quad \quad \quad \quad \tilde{f} \leftarrow L_{i,j}((1 - \omega) \cdot f_{i,j} + \omega \cdot \tilde{f}) \\ \quad \quad \quad \quad d \leftarrow \max(d, | \tilde{f} - f_{i,j} |) \\ \quad \quad \quad \quad f_{i,j} \leftarrow \tilde{f} \\ \quad \quad \quad \text{While } d > \epsilon. \end{array} \quad (24)$$

Здесь $S_{i,j}$ — оператор минимизации функции (11), определен в выражении (20); $L_{i,j}$ — оператор, ограничивающий сеточную функцию в соответствии с (10), определен в выражении (14); ω — релаксационный параметр; (B_n^x, B_n^y) — смещение элементов класса номер n

в сетке; смещения определены в выражении (23); ϵ — некоторое заданное малое число; когда максимальное изменение решения на текущей итерации становится меньше ϵ , итерации останавливаются.

При реализации алгоритма (24) имеет смысл вначале вычислить все возможные варианты оператора $S_{i,j}$ (таких вариантов 25 штук в случае прямоугольной сетки), и затем использовать нужный оператор в зависимости от взаимного расположения вычисляемой ячейки и границ области.

4. Свойства задачи и алгоритма

Назовем ограничения (10) невырожденными, если

$$\inf_{(x,y) \in G} M(x,y) < \sup_{(x,y) \in G} m(x,y). \quad (25)$$

Для случая невырожденных ограничений и $\alpha > 0$ доказаны следующие утверждения:

1. Дискретная задача (10), (11) имеет единственное решение для любого числа ячеек N .
2. Итерационный процесс (24) сходится к решению задачи (10), (11) при $0 < \omega < 2$ для любого начального приближения.
3. Дополним графики функций $m(x,y)$ и $M(x,y)$ вертикальными поверхностями в местах разрывов, получив поверхности m и M соответственно. Если $m(x,y)$ ограничена сверху, $M(x,y)$ ограничена снизу, и существует такое число $\epsilon > 0$, что минимальное расстояние между поверхностями m и M будет больше ϵ , то решение дискретной задачи (10), (11) поточечно стремится к решению непрерывной задачи (1), (2) при шаге сетки $h \rightarrow 0$: $f(x_i, y_j) - f_{i,j} = O(h)$.

Первый порядок точности вызван тем, что сумма (11) не самым лучшим образом аппроксимирует выражение (2) на границах области G . Повышение порядка аппроксимации усложнит алгоритм, но не даст практической пользы, так как значения сеточной функции, вычисляемые между заданными точками, почти не зависят от значений вблизи границ области.

5. Параллельный многомасштабный алгоритм решения

Как уже было сказано выше, итерационный метод (24) очень медленно снижает низкочастотные гармоники матрицы ошибок. В частности, если расстояния между точками с известными значениями функции велики по сравнению с размером ячеек, то число итераций может иметь порядок $O(N^2)$. Кроме того, при использовании чисел одинарной точности итерационный процесс может не сойтись к правильному решению из-за накапливающихся ошибок округления.

Самый эффективный метод решения этих проблем — использование многомасштабного алгоритма, который легко реализуется в данной задаче.

Предположим, что $N = 2^k$. Сделаем уменьшенную вдвое копию сетки, объединив ячейки по 4 штуки. При объединении ячеек из четырех ограничений сверху выбирается минимальное (см. (8), (9)), а из четырех ограничений снизу — максимальное. Если ограничение сверху оказалось меньше ограничения снизу, то оба ограничения заменяются на их среднее арифметическое. Полученную сетку можно снова уменьшить вдвое и так далее, пока не дойдем до сетки размерами 4×4 ячейки. Решим задачу на этой сетке при помощи алгоритма (24), и используем полученное решение в качестве начального приближения для решения на сетке 8×8 . При переносе значений с грубой сетки на подробную достаточно использовать простейшую билинейную интерполяцию (центры ячеек грубой сетки не совпадают с центрами

ячеек более подробной сетки). При решении задачи на различных сетках нужно учитывать, что оператор $S_{i,j}$ зависит от шага сетки при $\alpha \neq 0$. В конце концов доберемся до исходной самой подробной сетки, для которой будет хорошее начальное приближение, полученное с более грубой сетки.

Параллельный алгоритм проще всего реализовать для вычислительной системы с общей памятью. В этом случае не требуется пересылка данных. Вычисления всех элементов одного класса являются независимыми операциями. Это означает, что в алгоритме (24) можно разделять циклы по i и по j как угодно между процессорами. Самый простой и эффективный способ — это разделить цикл по индексу i на равные части соответственно числу процессоров/ядер процессора.

6. Тестовая задача

В качестве примера рассмотрим задачу интерполяции данных, показанных на рисунке 1. Прежде всего, следует отметить, что метод не требует распознавания изолиний глубины: в качестве входных данных может быть использован цвет областей, поэтому достаточно закрасить области между изолиниями различными цветами. Каждый цвет обозначает свой диапазон глубин, который записывается в ограничения по высоте при построении сетки.

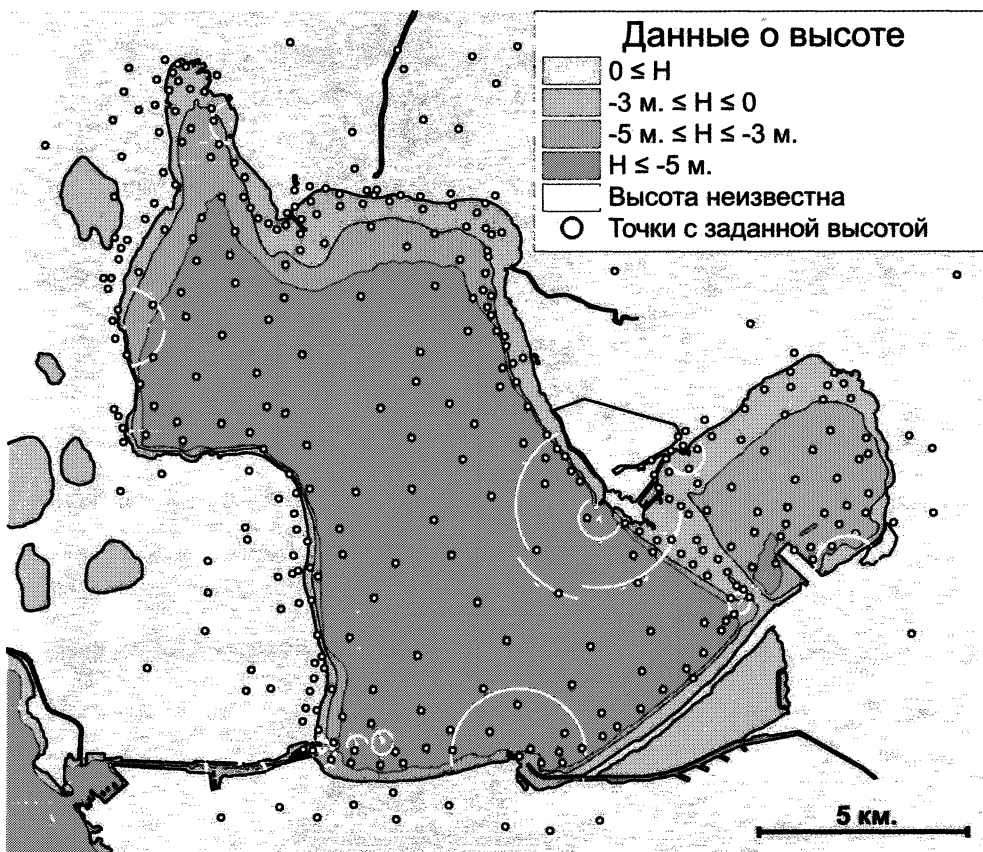


Рис. 1. Пример данных о высоте для озера Этанг-де-Берр (Франция)

Кроме областей с цветом карта имела множество отметок глубины и высоты (на рисунке 1 показаны кружочками), которые были оцифрованы и внесены в соответствующие ячейки сетки при ее построении. Погрешность всех данных внутри водоема положена равной 0,1 метра, погрешность данных за пределами водоема — 1,0 метр.

Кроме того, была отдельная карта для маленького треугольного водоема на юго-востоке карты (Этанг-де-Большон). Ее данные не показаны.

Для вычислений использовалась сетка размерами 512×512 ячеек. Значение параметра $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$ 1/м. Сеточные величины — числа двойной точности. В качестве критерия сходимости итерационного процесса была выбрана величина $\epsilon = 0,001$ метра. Процессор тестовой системы: Intel Core 2 Quad 2,4 GHz, 8 MB L2 Cache.

Вначале был произведен расчет последовательным одномасштабным алгоритмом. Потребовалось более 50 тысяч итераций (14 минут машинного времени) для того, чтобы итерации сошлись.

Затем был произведен расчет многомасштабным алгоритмом. На сетке каждого масштаба требовалось произвести от 10 до 100 итераций. В итоге алгоритм сошелся за 215 итераций (2,9 секунд машинного времени). Использование многомасштабного алгоритма позволило ускорить вычисления в 300 раз!

После этого была реализована параллельная версия программы при помощи OpenMP. При запуске с двумя вычислительными потоками программа справилась с задачей интерполяции за 1,6 секунды (эффективность 90%). При запуске с четырьмя потоками интерполяция завершилась за 0,9 секунды (эффективность 81%).

Время чтения исходных данных и построения по ним сетки (вычисления ограничений) на всех тестах составляло около пяти секунд и не принималось во внимание.

Результат интерполяции показан на рис. 2. Изолинии высоты за пределами водоема не показаны, так как данные о высоте на исходных картах практически отсутствовали.

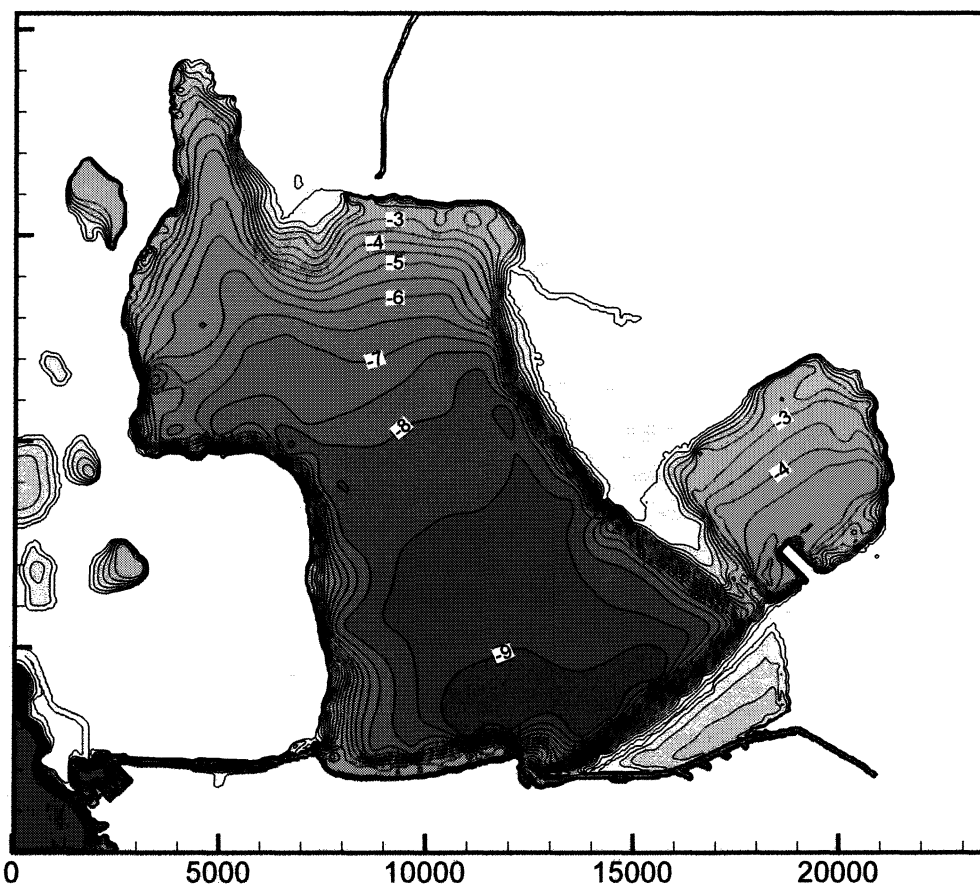


Рис. 2. Результат интерполяции. Масштаб указан в метрах

7. Заключение

Представленный алгоритм интерполяции может быть эффективно применен для объединения и интерполяции исходных данных различного типа. Кроме того, алгоритм учитывает возможную погрешность исходных данных, что позволяет уменьшить шум и более правильно объединить данные из различных источников.

Дискретизация задачи может быть проведена в области любой формы (не только квадратной, как описано в статье) и на различных сетках (в том числе на треугольной сетке). Учет формы области позволяет более правильно произвести интерполяцию величин, которые распределены только в пределах заданной области.

Реализация программы с использованием многомасштабных алгоритмов и распараллеливание ее с использованием нескольких вычислительных потоков позволяет получать результаты за разумное время на персональном компьютере.

Планируется усовершенствование метода путем введения в модель горизонтальной погрешности исходных данных (в дополнение к вертикальной) и нежестких ограничений на функцию: математическое ожидание и дисперсия вместо минимального и максимального допустимых значений.

Статья рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2009».

Литература

1. Колдоба, А.В. Методы математического моделирования окружающей среды / А.В. Колдоба, Ю.А. Повещенко, Е.А. Самарская. – М.: Наука, 2000. – 254 с.
2. Schu, G.H. Review of Interpolation Methods for Digital Terrain Models / G.H. Schu // Canadian Surveyor. – December, 1976. – Vol. 30, № 5. – P. 389 – 412.
3. Oliver, M.A. Kriging: a Method of Interpolation for Geographical Information System / M.A. Oliver, R. Webster // INT. J. Geographical Information Systems. – 1990. – Vol. 4, № 3. – P. 313 – 332.
4. Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
5. Bayer, В.Е. An Optimum Method For Two-level Rendition of Continuous-tone Pictures / В.Е. Bayer // Proceedings IEEE, International Conference on Communications. – 1973. – Vol. 26. – P. 11 – 15.

Кафедра математического моделирования,
Московский физико-технический институт (Государственный университет)
Soukhinov@gmail.com

Поступила в редакцию 26 февраля 2009 г.

О ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В.П. Танана, А.И. Сидикова

ASSURED ACCURACY ESTIMATION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM OF THE THERMAL DIAGNOSTICS IN THE HETEROGENEOUS ENVIRONMENT

V.P. Tanana, A.I. Sidikova

Методом проекционной регуляризации решена обратная смешанная граничная задача для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом, и получены гарантированные оценки точности этого решения.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, параболическое уравнение, преобразование Фурье

Using the method of the projection regularization the author solves the inverse mixed boundary-value problem for the heat conduction equation with the discontinuous coefficient and obtains the assured accuracy evaluation of the solution.

Keywords: inverse problem, regularization, parabolic equation, Fourier transformation

1. Постановка задачи

При планировании стендовых испытаний ракетных двигателей важную роль играет точность решения соответствующих обратных задач тепловой диагностики [1]. Для достижения этой точности необходимо использовать более совершенные математические модели, в которых учтены теплофизические свойства используемых композиционных материалов [1]. Все это приводит к решению обратных граничных задач для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Для приближенного решения соответствующих задач необходимо получать гарантированные оценки их погрешности, которые определяют степень достоверности теоретических расчетов, используемых при планировании стендовых испытаний. Методом проекционной регуляризации [2] получены гарантированные оценки точности этого решения.

Уравнение теплопроводности в неоднородном стержне, состоящем из двух различных материалов, имеет вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$a(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_1 \\ \chi, & x_1 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \chi \neq 1 \text{ положительное число.}$$

Известно, что уравнение (1) можно свести к системе

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, \quad x_1 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Предположим, что решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (4)$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad x_1 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

а также граничным условиям

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} - \kappa u_1(0, t) = 0; \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где $\kappa > 0$ известное число

$$u_1(x_1, t) = f(t); \quad t \geq 0 \quad (7)$$

и условиям согласования

$$u_1(x_1, t) = u_2(x_1, t); \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, t)}{\partial x} = \chi \frac{\partial u_2(x_1, t)}{\partial x}, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Функцию $h(t) = \frac{\partial u_2(1, t)}{\partial x}$ требуется определить.

Предположим, что $h(t) \in C^2[0, \infty)$, и существует число $t_0 > 0$ такое, что при $t \geq t_0$

$$h(t) = 0. \quad (10)$$

Сделаем замену

$$v(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & 0 \leq x \leq x_1, \quad t \geq 0 \\ u_1(x_1, t) + \chi \int_{x_1}^x \frac{\partial u_2(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi; & t \geq 0, \end{cases} \quad (11)$$

задачу (2) – (9) сведем к новой относительно функции $v(x, t)$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

$$v(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - \kappa v(0, t) = 0; \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$v(x_1, t) = f(t); \quad t \geq 0, \quad (15)$$

а функцию $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{\chi} \frac{\partial v(1, t)}{\partial x}; \quad t \geq 0 \quad (16)$$

требуется определить.

В дальнейшем функции $v(x, t)$, $f(t)$ и $h(t)$ будем считать комплекснозначными, то есть $v(x, t) = v_1(x, t) + iv_2(x, t)$, $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ и $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$, где $v_i(x, t)$, $f_i(x, t)$ и $h_i(x, t)$, $i = 1, 2$ действительные функции.

2. Исследование гладкости функции $v(x, t)$

Так как гладкость функции $v(x, t)$ определяется соответствующей гладкостью ее действительной $Re[v(x, t)]$ и мнимой $Im[v(x, t)]$ составляющих, то исследование гладкости функции $v(x, t)$ достаточно провести в предположении, что функции $v(x, t)$ и $h(t)$ действительны.

Сделаем замену

$$U(x, t) = v(x, t) - \left(x + \frac{1}{\kappa}\right)h(t). \quad (17)$$

Тогда

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \left(x + \frac{1}{\kappa}\right)h'(t); \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (18)$$

$$U(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (19)$$

$$U'_x(0, t) - \kappa U(0, t) = 0; \quad t \geq 0, \quad (20)$$

$$U'_x(1, t) = 0; \quad t \geq 0. \quad (21)$$

Решение задачи (18) – (21) имеет вид

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) \sin(\lambda_n x + \beta_n), \quad (22)$$

где λ_n является решением уравнения

$$\operatorname{ctg} \lambda = \frac{\lambda}{\kappa}, \quad (23)$$

$$\beta_n = \arcsin\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda_n^2}}\right) = \arccos\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda_n^2}}\right), \quad (24)$$

$$U_n(t) = 2b_n \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} h'(\tau) d\tau, \quad (25)$$

где

$$b_n = \frac{2 \sin(\lambda_n + \beta_n)}{\lambda_n^2 [1 - \lambda_n^{-1} \cos(\lambda_n + 2\beta_n) \sin \lambda_n]}. \quad (26)$$

Интегрируя правую часть равенства (25) по частям, получим

$$U_n(t) = \frac{2b_n}{\lambda_n^2} \left[h'(t) - \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} h''(\tau) d\tau. \right] \quad (27)$$

Теперь исследуем гладкость функции $U(x, t)$ по x . Для этого, используя представление функции $U(x, t)$ в формуле (22), рассмотрим ряд, составленный из первых производных слагаемых

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n U_n(t) \cos(\lambda_n x + \beta_n). \quad (28)$$

Из (10), (26) и (27) следует существование числа $c_1 > 0$ такого, что для любых значений $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$ и n

$$|\lambda_n U_n(t) \cos(\lambda_n x + \beta_n)| \leq \frac{c_1}{\lambda_n^3}. \quad (29)$$

Так как из (23) следует, что для любого n

$$\lambda_n = \pi n + \mu_n, \quad (30)$$

где

$$\mu_n \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

то из (30) и (31) следует существование чисел c_2 и $c_3 > 0$ таких, что для любого n

$$c_2 n \leq \lambda_n \leq c_3 n. \quad (32)$$

Таким образом, из (32) следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3} < \infty$, а из соотношения (29) следует равномерная сходимость рядов (22) и (28) на множестве $[0, 1] \times [0, \infty)$.

Учитывая непрерывность слагаемых соответствующих рядов, получим

$$U'_x(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n U_n(t) \cos(\lambda_n x + \beta_n), \quad (33)$$

а из (33), что

$$U'_x(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)). \quad (34)$$

Рассмотрим ряд, составленный из вторых производных слагаемых ряда (22).

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin(\lambda_n x + \beta_n). \quad (35)$$

Из (29) следует, что для любых $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$ и n

$$|\lambda_n^2 U_n(t) \sin(\lambda_n x + \beta_n)| \leq \frac{c_1}{\lambda_n^2}. \quad (36)$$

Из (32) следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$, а из (36) следует равномерная сходимость ряда (35) на множестве $[0, 1] \times [0, \infty)$. Учитывая непрерывность слагаемых соответствующих рядов, получим

$$U''_{xx}(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin(\lambda_n x + \beta_n), \quad (37)$$

а из (37), что

$$U''_{xx}(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)). \quad (38)$$

Из (17), (34) и (38) следует, что

$$v'_x(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)), \quad (39)$$

$$v''_{xx}(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)). \quad (40)$$

3. Обоснование метода интегральных преобразований применительно к решению задачи (12) – (15)

Так как скорость убывания функции $v(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется скоростями убывания ее действительной $Re[v(x, t)]$ и мнимой $Im[v(x, t)]$ составляющих, то, как и в предыдущем случае, этот вопрос достаточно исследовать в предположении действительных функций $h(t)$ и $v(x, t)$.

Рассмотрим вспомогательную задачу, использующую условие (10)

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq t_0, \quad (41)$$

$$v(x, t_0) = v_0(x); \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (42)$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - \kappa v(0, t) = 0; \quad t \geq t_0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial v(1, t)}{\partial x} = 0; \quad t \geq t_0. \quad (44)$$

Из (10) и (40) следует, что

$$v_0(x) \in C^2[0, 1] \quad (45)$$

и

$$v'_0(1) = 0, \quad v'_0(0) - \kappa v_0(0) = 0. \quad (46)$$

Решение задачи (41) – (46) имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} \sin(\lambda_n x + \beta_n), \quad (47)$$

где λ_n и β_n определены формулами (23), (24), а

$$v_n = \frac{2}{[1 - \lambda_n^{-1} \cos(\lambda_n + 2\beta_n) \sin \lambda_n]} \int_0^1 v_0(x) \sin(\lambda_n x + \beta_n) dx. \quad (48)$$

Интегрируя правую часть равенства (48) по частям, получим

$$v_n = -\frac{2}{\lambda_n^2 [1 - \lambda_n^{-1} \cos(\lambda_n + 2\beta_n) \sin \lambda_n]} \int_0^1 v''_0(x) \sin(\lambda_n x + \beta_n) dx. \quad (49)$$

Из (40) и (49) следует существование числа $c_4 > 0$ такого, что для любого n

$$|v_n| \leq \frac{c_4}{\lambda_n^2}. \quad (50)$$

Из (47) и (50) следует, что для любого $t \geq t_0 + 1$

$$|v(x, t)| \leq c_4 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}, \quad (51)$$

$$|v'_x(x, t)| \leq c_4 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} \quad (52)$$

и

$$|v''_{xx}(x, t)| \leq c_4 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}. \quad (53)$$

Так как

$$e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} = e^{-\lambda_n^2} \cdot e^{-\lambda_n^2(t-t_0-1)}, \quad (54)$$

а из (32) и (54) получается, что

$$e^{-\lambda_n^2} \leq [e^{c_2^2}]^{-n}, \quad (55)$$

то из (41), (51) – (55) следует существование числа c_5 такого, что для любого $t \geq t_0 + 2$

$$\sup_{x \in [0, 1]} \{|v(x, t)|, |v'_x(x, t)|, |v'_t(x, t)|, |v''_{xx}(x, t)|\} \leq c_5 e^{-(t-t_0-1)}. \quad (56)$$

Из (39), (40) и (56) следует, что для любой комплекснозначной ограниченной и непрерывной на $[0, \infty) \times [0, \infty)$ функции $\Phi(\lambda, t)$ справедливы равенства

$$\int_0^\infty v'_x(x, t)\Phi(\lambda, t)dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\infty v(x, t)\Phi(\lambda, t)dt \right] \quad (57)$$

и

$$\int_0^\infty v''_{xx}(x, t)\Phi(\lambda, t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^\infty v(x, t)\Phi(\lambda, t)dt \right]. \quad (58)$$

Таким образом, мы показали, что для любого $x \in [0, 1]$

$$v(x, t), v'_t(x, t), v'_x(x, t) \text{ и } v''_{xx}(x, t) \in C[0, \infty) \cap L_2[0, \infty).$$

Обозначим через M_r множество пространства $\bar{H} = L_2[0, \infty) + iL_2[0, \infty)$, определяемое формулой

$$M_r = \left\{ h(t) : h(t) \in \bar{H}, \int_0^\infty |h(t)|^2 dt + \int_0^\infty |h'(t)|^2 dt \leq r^2 \right\}, \quad (59)$$

где r известное положительное число, и предположим, что при $f(t) = f_0(t)$, участвующей в условии (15), существуют функции $v_0(1, t)$ и $\chi h_0(t)$, которые принадлежат множеству M_r . Но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in \bar{H}$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\|_{\bar{H}} \leq \delta. \quad (60)$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_r , определить приближенное решение $\chi h_\delta(t)$ задачи (12) – (16) и оценить уклонение $\|h_\delta - h\|$ приближенного решения от точного.

4. Сведение задачи (12) – (16) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть $\bar{H} = L_2[0, \infty) + iL_2[0, \infty)$ над полем комплексных чисел, F оператор, отображающий \bar{H} на \bar{H} и определяемый формулой

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty h(t)e^{-i\lambda t} dt; \quad \lambda \geq 0, \quad h(t) \in \bar{H}, \quad (61)$$

а F^{-1} – оператор, обратный F ,

$$F^{-1}[g(\lambda)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty g(\lambda)e^{i\lambda t} dt; \quad t \geq 0, \quad g(\lambda) \in \bar{H}. \quad (62)$$

Лемма 1. Для операторов F и F^{-1} , определяемых формулами (61) и (62), справедливы следующие соотношения $\|F\| \leq \sqrt{2}$ и $\|F^{-1}\| \leq \sqrt{2}$.

Доказательство. Сначала докажем первое из соотношений. Для этого возьмем произвольную функцию $h(t) \neq 0$ из пространства \bar{H} и продолжим ее на отрицательную полуось, положив

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (63)$$

Таким образом, $h(t) \in L_2(-\infty, \infty) + iL_2(-\infty, \infty)$.

Обозначим через $\bar{h}(\lambda)$ преобразование Фурье функции $h(t)$

$$\bar{h}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty h(t)e^{-i\lambda t} dt; \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (64)$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [3] на с.412 следует, что

$$\|\bar{h}(\lambda)\| = \|h(t)\|. \quad (65)$$

Пусть $\hat{h}(\lambda) = F[h(t)]$. Тогда из (61) и (64) следует, что для любого $\lambda \geq 0$

$$\hat{h}(\lambda) = \sqrt{2}\bar{h}(\lambda). \quad (66)$$

Из (65) и (66) следует, что при условии $\lambda \geq 0$ $\|\hat{h}(\lambda)\| \leq \sqrt{2}\|\bar{h}(\lambda)\| = \sqrt{2}\|h(t)\|$, то есть $\|F\| \leq \sqrt{2}$. Второе соотношение доказывается аналогично. \square

Из соотношений (56) и формул (57) и (58) следует применимость преобразования F , определяемого формулой (61) к задаче (12) – (16).

Используя это преобразование к задаче (12) – (16), сведем ее к следующей

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(x, \lambda)}{\partial x^2} = i\lambda \hat{v}(x, \lambda); \quad x \in [0, 1], \lambda \geq 0, \quad (67)$$

где $\hat{v}(x, \lambda) = F[v(x, t)]$,

$$\frac{\partial \hat{v}(0, \lambda)}{\partial x} - \kappa \hat{v}(0, \lambda) = 0 \quad (68)$$

и

$$\hat{v}(x_1, \lambda) = \hat{f}(\lambda), \quad (69)$$

где $\hat{f}(\lambda) = F[f(t)]$.

Решение уравнения (67) имеет вид

$$\hat{v}(x, \lambda) = A(\lambda)e^{\mu_0 x \sqrt{\lambda}} + B(\lambda)e^{-\mu_0 x \sqrt{\lambda}}, \quad (70)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, а $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ произвольные функции. Из (67) – (70) следует, что

$$\hat{v}(0, \lambda) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{\operatorname{ch} \mu_0 x_1 \sqrt{\lambda} + (\mu_0 \sqrt{\lambda})^{-1} \kappa \operatorname{sh} \mu_0 x_1 \sqrt{\lambda}}; \quad \lambda \geq 0. \quad (71)$$

Обозначим функцию, стоящую в правой части равенства (71) через $z(\lambda)$. Тогда из (71) следует, что

$$\hat{v}(0, \lambda) = z(\lambda); \quad \lambda \geq 0, \quad (72)$$

а из (68) и (72), что

$$\hat{v}'_x(0, \lambda) = \kappa z(\lambda); \quad \lambda \geq 0. \quad (73)$$

Лемма 2. Пусть $\kappa \leq \frac{1}{2}$, а $g(\lambda) = \operatorname{ch} \mu_0 x_1 \sqrt{\lambda} + (\mu_0 \sqrt{\lambda})^{-1} \kappa \operatorname{sh} \mu_0 x_1 \sqrt{\lambda}$. Тогда существует число $c_8 > 0$ такое, что для любого $\lambda \geq 0$ $|g(\lambda)| \geq c_8$.

Доказательство. Так как

$$\operatorname{Re}[g(\lambda)] = \left\{ \cos x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left[\sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}} \operatorname{sh} x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} + \operatorname{ch} x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right] + \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}} \operatorname{ch} x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sin x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right\}, \quad (74)$$

$$\operatorname{Im}[g(\lambda)] = \left\{ \sin x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left[\sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}} \operatorname{ch} x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} + \operatorname{sh} x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right] - \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}} \operatorname{sh} x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \cos x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right\}, \quad (75)$$

то из (74) следует, что при условии $0 \leq x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \leq \frac{\pi}{3}$, $\cos x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geq \frac{1}{2}$ и

$$|g(\lambda)| \geq \cos x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{ch} x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geq \frac{1}{2}. \quad (76)$$

Если $\frac{\pi}{3} \leq x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sin x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geq \frac{1}{2}$ и из (74) следует, что

$$|g(\lambda)| \geq \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}} \sin x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{ch} x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geq \frac{x_1 \kappa}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi}{3}. \quad (77)$$

Если $\frac{\pi}{2} \leq x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \leq \frac{3\pi}{4}$, то $\sin x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и из (74) следует, что

$$|g(\lambda)| \geq \frac{x_1 2\sqrt{2}}{3\pi} \kappa \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}. \quad (78)$$

Если $\frac{3\pi}{4} \leq x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \leq \pi$, то $-\cos x_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и из (75) следует, что

$$|g(\lambda)| \geq \frac{x_1 \sqrt{2}}{2\pi} \kappa \operatorname{sh} \frac{3\pi}{4}. \quad (79)$$

Таким образом, из (76) – (79) следует существование числа $c_6 > 0$ такого, что $\forall \lambda \in \left[0, \frac{2\pi^2}{x_1^2}\right]$

$$|g(\lambda)| \geq c_6. \quad (80)$$

Так как $\kappa \leq \frac{1}{2}$, а $|g(\lambda)| \geq |\operatorname{ch} \mu_0 x_1 \sqrt{\lambda}| - \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}} |\operatorname{sh} \mu_0 x_1 \sqrt{\lambda}|$, то нетрудно проверить существование числа $c_7 > 0$ такого, что для любого $\lambda \geq \frac{2\pi^2}{x_1^2}$

$$|g(\lambda)| \geq c_7. \quad (81)$$

Из (80) и (81) следует утверждение леммы. \square

Решая задачу Коши (67), (72) и (73), получим формулу (70), в которой функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ связаны соотношениями

$$A(\lambda) + B(\lambda) = z(\lambda); \quad \lambda \geq 0 \quad (82)$$

и

$$A(\lambda) - B(\lambda) = \frac{\kappa}{\mu_0 \sqrt{\lambda}} z(\lambda); \quad \lambda \geq 0. \quad (83)$$

Из (70), (82) и (83) следует, что задачу (67), (72), (73) можно свести к задаче вычисления значений неограниченного оператора T в пространстве $\overline{H} \times \overline{H}$.

$$T \begin{pmatrix} z(\lambda) \\ \kappa z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} & (\mu_0 \sqrt{\lambda})^{-1} \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\lambda} \\ \mu_0 \sqrt{\lambda} \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\lambda} & \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(\lambda) \\ \kappa z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}(1, \lambda) \\ \hat{v}'_x(1, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (84)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\kappa \leq \frac{1}{2}$, функцию $\hat{v}(1, \lambda)$ обозначим через $\hat{v}(\lambda)$, а $\hat{v}'_x(1, \lambda)$ через $\chi \hat{h}(\lambda)$. Пусть $z_0(\lambda)$ и $\kappa z_0(\lambda)$ значения, соответствующие точному значению $f_0(t)$ в формуле (15), а z_δ и $\kappa z_\delta(\lambda)$ – значения соответствующего приближенному значению $f_\delta(t)$. Тогда из лемм 1,2 и формулы (60) следует

$$\|z_\delta(\lambda) - z_0(\lambda)\| \leq \sqrt{2} C_8 \delta. \quad (85)$$

Множество M_r , определенное формулой (59) при преобразовании F , перейдет в множество $\hat{M}_r = F\hat{M}_r$, определяемое формулой

$$\hat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\lambda) : \hat{h}(\lambda) \in \overline{H}, \int_0^\infty (1 + \lambda^2) |\hat{h}(\lambda)| d\lambda \leq r^2 \right\}. \quad (86)$$

Из того, что $v_0(1, t)$ и $\chi h_0(t) \in \hat{M}_r$, будет следовать, что

$$\hat{v}_0(\lambda) \text{ и } \chi \hat{h}_0(t) \in \hat{M}_r. \quad (87)$$

5. Решение задачи (84) – (87)

Для решения этой задачи используем семейство операторов $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha \begin{pmatrix} z_1(\lambda) \\ z_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{cases} T \begin{pmatrix} z_1(\lambda) \\ z_2(\lambda) \end{pmatrix}; & \lambda \leq \alpha \\ 0; & \lambda > \alpha, \end{cases} \quad (88)$$

где $z_1(\lambda)$ и $z_2(\lambda) \in \overline{H}$, а оператор T определен формулой (84).

Приближенное решение $\begin{pmatrix} \hat{v}_\delta^\alpha(\lambda) \\ \chi \hat{h}_\delta^\alpha(\lambda) \end{pmatrix}$ задачи (84) – (87) определим формулой

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_\delta^\alpha(\lambda) \\ \chi \hat{h}_\delta^\alpha(\lambda) \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} z_\delta(\lambda) \\ \kappa z_\delta(\lambda) \end{pmatrix}; \quad \lambda \geq 0. \quad (89)$$

Для выбора параметра регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (89) рассмотрим оценку

$$[\|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi \hat{h}_\delta^\alpha - \chi \hat{h}_0\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq [\|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0^\alpha\|^2 + \|\chi \hat{h}_\delta^\alpha - \chi \hat{h}_0^\alpha\|^2]^{\frac{1}{2}} + [\|\hat{v}_0^\alpha - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi \hat{h}_0^\alpha - \chi \hat{h}_0\|^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (90)$$

$$\text{где } \begin{pmatrix} \hat{v}_0^\alpha(\lambda) \\ \chi \hat{h}_0^\alpha(\lambda) \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} z_0(\lambda) \\ \kappa z_0(\lambda) \end{pmatrix}; \quad \lambda \geq 0.$$

Так как из (85) и (89) следует, что

$$[\|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0^\alpha\|^2 + \|\chi \hat{h}_\delta^\alpha - \chi \hat{h}_0^\alpha\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} c_8 \sqrt{1 + \kappa^2} \|T_\alpha\| \delta, \quad (91)$$

$$\text{а из (84) и (88), что } \|T_\alpha\| \leq e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}, \quad (92)$$

то из (91) и (92) следует, что

$$[\|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0^\alpha\|^2 + \|\chi \hat{h}_\delta^\alpha - \chi \hat{h}_0^\alpha\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} c_8 \sqrt{1 + \kappa^2} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \delta. \quad (93)$$

Пусть

$$\omega^2(\alpha) = \sup \left\{ \int_\alpha^\infty [|\hat{v}_0(\lambda)|^2 + |\chi \hat{h}_0(\lambda)|^2] d\lambda : \hat{v}_0(\lambda), \chi \hat{h}_0(\lambda) \in \hat{M}_r \right\}. \quad (94)$$

$$\text{Тогда } [\|\hat{v}_0^\alpha - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi \hat{h}_0^\alpha - \chi \hat{h}_0\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq \omega(\alpha). \quad (95)$$

Из (86) следует, что при условии, что $\hat{v}_0(\lambda)$ и $\chi \hat{h}_0(\lambda) \in \hat{M}_r$

$$\int_\alpha^\infty (1 + \lambda^2) [|\hat{v}_0(\lambda)|^2 + |\chi \hat{h}_0(\lambda)|^2] d\lambda \leq 2r^2, \quad (96)$$

а из (94) и (96), что

$$\omega^2(\alpha) = \frac{2r^2}{1 + \alpha^2}. \quad (97)$$

Таким образом, из (90), (93), (95) и (97) следует, что

$$[\|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi \hat{h}_\delta^\alpha - \chi \hat{h}_0\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2} r}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \sqrt{2} c_8 \sqrt{1 + \kappa^2} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \delta. \quad (98)$$

Обозначим число $c_8 \sqrt{1 + \kappa^2}$ через c_9 и параметр регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (89) выберем из условия:

$$\sqrt{1 + \alpha^2} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{r}{c_9 \delta}. \quad (99)$$

Тогда из (98) и (99) будет следовать, что

$$[\|\hat{v}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi \hat{h}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - \chi \hat{h}_0\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2\sqrt{2} r}{\sqrt{1 + \bar{\alpha}^2(\delta)}}. \quad (100)$$

Так как функция $\sqrt{1 + \alpha^2} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}$ строго возрастает по α и изменяется от 0 до ∞ , то существует единственное решение $\bar{\alpha}(\delta)$ уравнения (99).

Для упрощения оценки (100) рассмотрим два уравнения $e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{r}{c_9 \delta}$ и $e^2 \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{c_9 \delta}$.

Для упрощения оценки (100) рассмотрим два уравнения

Решения этих уравнений обозначим через $\bar{\alpha}_1(\delta)$ и $\bar{\alpha}_2(\delta)$. Тогда при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\bar{\alpha}_2(\delta) \leq \bar{\alpha}(\delta) \leq \bar{\alpha}_1(\delta). \quad (101)$$

где $\bar{\alpha}_1(\delta) = 2 \ln^2 \frac{r}{c_9 \delta}$ и $\bar{\alpha}_2(\delta) = \frac{1}{2} \ln^2 \frac{r}{c_9 \delta}$, а из (101), что $\bar{\alpha}(\delta) \sim \ln^2 \delta$, при $\delta \rightarrow 0$.

Из вышесказанного следует существование числа $c_{10} > 0$ такого, что при достаточно малых значениях δ справедливо неравенство

$$[\|\hat{v}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi \hat{h}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - \chi \hat{h}_0\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq c_{10} \ln^{-2} \delta. \quad (102)$$

Воспользовавшись преобразованием F^{-1} обратным к F , и взяв действительную часть результата, получим приближенное решение задачи (12) – (16)

$$\chi h_\delta(t) = Re \{ F^{-1} [\chi \hat{h}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}(\lambda)] \}. \quad (103)$$

Из леммы 1 и соотношений (102), (103) для приближенного решения $\chi h_\delta(t)$ задачи (12) – (16) справедлива оценка $\|h_\delta(t) - h_0(t)\| \leq \sqrt{2} \chi c_{10} \ln^{-2} \delta$.

Работа поддержана грантом р-урал-а № 07-01-96001.

Литература

1. Определение характеристик тонкослойных теплозащитных покрытий из решения обратных задач тепло- и массо- переноса / Г.Н. Исаков, А.Я. Кузин, В.Н. Савельев, Ф.В. Ермолаев // Физика горения и взрыва. – 2003. – Т. 39, №5. – С. 86 – 96.
2. Танана, В.П. Об оптимальности регуляризирующих алгоритмов при решении некорректных задач / В.П. Танана, А.Р. Данилин // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, №7. – С. 1323 – 1326.
3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972.

Кафедра вычислительной математики,
Южно-Уральский государственный университет
7413604@mail.ru

Поступила в редакцию 10 февраля 2009 г.

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО КУРСА ЯХТЫ

В.И. Ухоботов, И.В. Цеунова

GAME PROBLEM OF THE BEST YACHT COURSE CHOICE

V.I. Ukhobotov, I.V. Tseunova

Рассматривается задача об управлении яхты с переменным ветром. Задача рассматривается в виде дифференциальной игры. Второй игрок управляет ветром.

Ключевые слова: управление, дифференциальная игра, игрок

The authors handle a problem of controlling a yacht in the baffling wind conditions. The problem is analyzed in the form of differential game. The second player controls the wind.

Keywords: management, differential game, player

1. Постановка задачи

В известной задаче выбора наилучшего курса яхты скорость яхты зависит от угла, который образует курс яхты и направление ветра. При постоянной по направлению и по величине скорости ветра в [1] рассмотрена конкретная модель такой зависимости. Исследуется задача, когда выгоднее идти галсами, чем прямо по заданному курсу.

Если рассматривать случай, когда вектор скорости v ветра может меняться, находясь в некотором множестве V , то вектор скорости u яхты можно выбирать из некоторого множества $U(v)$, зависящего от скорости ветра. Цель управления яхтой заключается в том, чтобы побыстрее вывести ее на заданное множество Z (например, причалить к острову). В каждый момент времени скорость ветра считается известной.

Рассмотренный пример является частным случаем задачи управления с помехой

$$z' = -u, \quad z \in R^n, \quad u \in U(v) \subset R^n, \quad v \in V. \quad (1.1)$$

Здесь V – множество произвольной природы; при каждом $v \in V$ множество $U(v)$ является непустым компактом в R^n . Считаем, что ограниченным является множество

$$K = \bigcup_{v \in V} U(v). \quad (1.2)$$

Первый игрок, выбирая управление $u \in U(v)$, стремится побыстрее осуществить встречу

$$z(t) \in Z, \quad (1.3)$$

где Z является выпуклым и замкнутым множеством в R^n . Вторым игроком, выбирая управление $v \in V$, стремится сделать время встречи (1.3) как можно дольше.

Будем рассматривать игру, когда управление первого игрока строится в зависимости от реализовавшегося в момент времени t состояния $z(t)$ и от значения в этот момент времени

управления $v(t)$ второго игрока. Будем строить управление первого игрока так, чтобы они допускали движение галсами [1].

Будем предполагать, что изменение управления $v(t)$ с течением времени меняется не очень сильно. Чтобы строго сформулировать это допущение введем, в рассмотрение евклидов шар S в R^n единичного радиуса и с центром в начале координат. Требование на $v(t)$ запишем в следующем виде: для любого отрезка $[0, p]$ существует число $L > 0$ такое, что

$$U(v(t)) \subset U(v(\tau)) + L(\tau - t)S \quad \text{при } 0 \leq t < \tau \leq p. \quad (1.4)$$

Под управлением $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ первого игрока понимаем правило, которое каждому состоянию $t \geq 0, z \in R^n$ и любому $v \in V$ ставит в соответствие конечный набор

$$u_s = u_s(t, z, v) \in U(v), \quad s = 1, \dots, k = k(t, z, v), \quad \lambda_s = \lambda_s(t, z, v) > 0, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1. \quad (1.5)$$

Движение системы (1.1) будем определять с помощью ломаных. Пусть заданы начальное состояние $t_0 \geq 0, z_0 = z(t_0) \in R^n$ и конечный момент времени $p > t_0$. Возьмем разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{l+1} = p \quad (1.6)$$

с диаметром

$$d(\omega) = \max_{0 \leq i \leq l} (t_{i+1} - t_i). \quad (1.7)$$

Построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int_{t_i}^t u_i^*(r) dr, \quad t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = \overline{0, l}. \quad (1.8)$$

Здесь обозначено $u_i^*(r) = u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$ при $t_i^{(s-1)} < r \leq t_i^{(s)}$, $s = 1, \dots, k(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$,

$$t_i^{(0)} = t_i, \quad t_i^{(s)} = t_i + (t_{i+1} - t_i) \sum_{q=1}^s \lambda_q. \quad (1.9)$$

Содержательный смысл управлений (1.9) следующий. С помощью чисел λ_s первый игрок разбивает отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ точками $t_i = t_i^{(0)} < t_i^{(1)} < \dots < t_i^{(s)} < \dots < t_i^{(k)} = t_{i+1}$ и на каждом из промежутков $(t_i^{(s-1)}, t_i^{(s)})$ движется с постоянной скоростью $u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$. Управление второго игрока постоянно на промежутке $(t_i^{(s-1)}, t_i^{(s)})$ и равно $v(t_i)$.

Из ограниченности множества (1.2) следует, что все ломаные (1.8) удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой. Следовательно, семейство ломаных (1.8) удовлетворяет условию теоремы Арцела[2]. Под движением системы (1.1) с управлением (1.5) и с начальным условием $z(t_0) = z_0$ понимаем любую функцию $z : [t_0, p] \rightarrow R^n$, которая является пределом равномерно сходящейся на отрезке $[t_0, p]$ последовательности ломаных (1.8), у которых диаметр разбиения стремится к нулю.

Отметим, что

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i^*(r) dr = (t_{i+1} - t_i) \sum_{s=1}^k \lambda_s u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i)). \quad (1.10)$$

2. Оператор программного поглощения и его свойства

Следуя [3], введем для игры (1.1) оператор программного поглощения D_σ . Пусть $X \subset R^n$, $\sigma \geq 0$. Точка $z \in D_\sigma(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $v \in V$ найдется измеримое управление $u : [0, \sigma] \rightarrow U(v)$ такое, что $z - \int_0^t u(r)dr \in X$ при некотором $0 \leq t \leq \sigma$.

Для любого ограниченного множества $F \subset R^n$ и для любого отрезка $[a, b] \subset R$ имеет место формула [4]

$$\left\{ \int_a^b f(r)dr \mid f : [a, b] \rightarrow F - \text{измерима} \right\} = (b - a)coF. \quad (2.1)$$

Здесь посредством coF обозначена выпуклая оболочка множества F .

Будем использовать операции сложения множеств X и Y из R^n и умножение множества X на число a

$$X + Y = \{z = x + y : x \in X, y \in Y\}, \quad aX = \{z = ax : x \in X\}.$$

С учетом этих формул, а так же формулы (2.1), оператор программного поглощения принимает вид

$$D_\sigma(X) = \bigcap_{v \in V} \bigcup_{0 \leq \tau \leq 1} (X + \sigma\tau coU(v)). \quad (2.2)$$

Этот оператор обладает следующими свойствами.

Свойство 2. 1. $D_0(X) = X$.

Свойство 2. 2. Если $0 \leq \delta \leq \sigma$, $X \subset Y$, то $D_\delta(X) \subset D_\sigma(Y)$.

Свойство 2. 3. $D_\sigma(X + Y) \supset D_\sigma(X) + Y$.

Свойство 2. 4. $D_\delta(D_\sigma(X)) \subset D_{\delta+\sigma}(X)$.

Свойство 2. 5. $D_\sigma(\sigma X) = \sigma D_1(X)$.

Свойство 2. 6. Если X – выпуклое множество, то множество $D_\sigma(X)$ является выпуклым.

Свойство 2. 7. Если X – выпуклое множество, то $D_\delta(D_\sigma(X)) = D_{\delta+\sigma}(X)$.

Свойство 2. 8. Если X – замкнутое множество, то множество $D_\sigma(X)$ является замкнутым.

Свойство 2. 9. Пусть X – замкнутое множество, последовательность $0 \leq \sigma_{k+1} \leq \sigma_k$, $\sigma_k \rightarrow \sigma$ и точка $z \in D_{\sigma_k}(X)$. Тогда $z \in D_\sigma(X)$.

Свойства 2.1 – 2.6 непосредственно следуют из формулы (2.2). При доказательстве свойства 2.7 применим схему доказательства из работы [5]. В силу свойства 2.1 нужно рассмотреть случай $\delta > 0$ и $\sigma > 0$. Обозначим $X_* = (\delta + \sigma)^{-1}X$. Тогда из выпуклости множества X следует равенство $\delta X_* + \sigma X_* = X$. Отсюда, используя свойства 2.2, 2.3 и 2.5, получим

$$\begin{aligned} D_\delta(D_\sigma(X)) &= D_\delta(D_\sigma(\delta X_* + \sigma X_*)) \supset D_\delta(D_\sigma(\sigma X_*) + \delta X_*) \supset \\ &\supset D_\delta(\delta X_*) + D_\sigma(\sigma X_*) = \delta D_1(X_*) + \sigma D_1(X_*) \supset \\ &\supset (\delta + \sigma)D_1(X_*) = D_{\delta+\sigma}((\delta + \sigma)X_*) = D_{\delta+\sigma}(X). \end{aligned}$$

Обратное включение следует из свойства 2.4.

При доказательстве свойств 2.8 и 2.9 используется тот факт, что выпуклая оболочка компакта в R^n является компактом [6, теорема I.1.7].

3. Оптимальное время встречи

Для каждой точки $z \in R^n$ положим $T(z) = +\infty$, если $z \notin D_\sigma(Z)$ при всех $\sigma \geq 0$. В противном случае

$$T(z) = \inf \sigma, \quad \sigma \geq 0, \quad z \in D_\sigma(Z). \quad (3.1)$$

Эта функция обладает следующими свойствами.

Свойство 3. 1. Если $\sigma = T(z) < +\infty$, то $z \in D_\sigma(Z)$.

Свойство 3. 2. $T(z) \geq 0$ при любом $z \in R^n$; $T(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in Z$.

Свойство 3. 3. Функция $T(z)$ является выпуклой.

Доказательство свойства 3.1 следует из замкнутости множества Z и из свойства 2.9 оператора D .

Первая часть свойства 3.2 следует из формулы (3.1). Если $T(z) = 0$, то из свойства 3.1 следует, что $z \in D_0(Z) = Z$. Если же $z \in Z$, то равенство $T(z) = 0$ очевидно.

Докажем свойство 3.3. Возьмем точки $z_i \in R^n$, $i = 1, 2$, у которых $\sigma_i = T(z_i) < +\infty$. Тогда из свойства 3.1 и из формулы (2.2) следует, что для любой точки $v \in V$ найдутся числа $0 \leq \tau_i \leq 1$, $i = 1, 2$, такие, что $z_i \in Z + \sigma_i \tau_i \text{co}U(v)$, $i = 1, 2$. Возьмем числа $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда из предыдущего включения, используя выпуклость множеств Z и $\text{co}U(v)$, получим

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in Z + (\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2) \tau \text{co}U(v), \quad \tau = \frac{\lambda_1 \sigma_1}{\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2} \tau_1 + \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2} \tau_2 \in [0, 1].$$

Отсюда и из формулы (3.1) получим, что $T(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \leq \lambda_1 T(z_1) + \lambda_2 T(z_2)$.

Утверждение 3. 1. Пусть начальное состояние $z(0) = z_0 \in Z$. Тогда для любого числа $0 < p < T(z_0)$ существует точка $v \in V$ такая, что постоянное управление второго игрока $v(t) = v$ при всех $0 \leq t \leq p$ обеспечивает для любого управления (1.5) первого игрока выполнение условия

$$z(t) \in Z \text{ при всех } 0 \leq t \leq p. \quad (3.2)$$

Доказательство. Поскольку $z_0 \in D_p(Z)$, то из формулы (2.2) следует, что найдется точка $v \in V$, для которой

$$z_0 \in Z + t \text{co}U(v) \text{ при всех } 0 \leq t \leq p. \quad (3.3)$$

Из формул (1.8) и (1.9) следует, что при $v(t) = v$ каждая ломаная удовлетворяет равенству

$$z_\omega(t) = z_0 - tu(t) \text{ при некотором } u(t) \in \text{co}U(v).$$

Следовательно, аналогичному равенству удовлетворяет и любое движение $z(t)$. Отсюда и из (3.3) получим (3.2). \square

4. Построение управления первого игрока

При построении управления первого игрока, обеспечивающего встречу (1.3) из начального состояния $z(0) = z_0$ к моменту $T(z_0)$, воспользуемся схемой из работы [7].

Лемма 4. 1. Пусть $z \in D_{\delta+\sigma}(Z)$ при $\delta > 0$ и $\sigma > 0$. Тогда для любой точки $v \in V$ существует точка $u \in \text{co}U(v)$ такая, что либо

$$z - \delta u \in D_\sigma(Z), \quad (4.1)$$

либо при некотором $0 \leq t \leq \delta$

$$z - tu \in Z. \quad (4.2)$$

Доказательство. Из формулы (2.2) и из свойства 2.7 отображения D следует, что для точки $v \in V$ непустым является множество чисел

$$0 \leq t \leq \delta, \quad z \in D_\sigma(Z) + tcoU(v). \quad (4.3)$$

Обозначим через t_0 верхнюю грань таких чисел t . Из замкнутости множества $D_\sigma(Z)$ и из компактности множества $coU(v)$ следует, что включение (4.3) выполнено при $t = t_0$. Если $t_0 = \delta$, то из (4.3) следует (4.1)

Пусть $0 \leq t_0 < \delta$. Возьмем число $0 < \gamma < \delta - t_0$, чтобы $j\gamma = \sigma$ при некотором целом $j > 1$. Тогда из включения (4.3) при $t = t_0$ получим, что

$$z - t_0u_1 \in D_{j\gamma}(Z) = D_\gamma(D_{(j-1)\gamma}(Z))$$

при некотором $u_1 \in coU(v)$. Отсюда следует, что найдется число $0 \leq t_1 \leq \gamma$ такое, что

$$z - t_0u_1 \in D_{(j-1)\gamma}(Z) + t_1coU(v).$$

Отсюда, используя свойство 2.2 отображения D , получим, что при $t = t_0 + t_1$ выполнено включение (4.3). Поскольку число t_0 является верхней гранью чисел t , удовлетворяющих (4.3), то $t_1 = 0$. Продолжая этот процесс дальше, найдем точку $u \in coU(v)$ такую, что при $t = t_0$ будет выполнено включение (4.2). \square

Теорема 4. 1. Пусть начальное состояние z_0 такое, что $p = T(z_0) < +\infty$. Тогда существует управление (1.4) первого игрока такое, что для любого управления $v(t)$ второго игрока будет выполнено включение (1.3) при некотором $t \leq p$.

Доказательство. Обозначим

$$U_0(v) = \{z = u - u_* : u \in coU(v), u_* \in coU(v)\}. \quad (4.4)$$

При каждом $z \in R^n$, $0 \leq t \leq p$, $v \in V$ положим

$$\varepsilon(t, z, v) = \min \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0, \quad z \in D_{p-t}(Z) + \varepsilon U_0(v) + \varepsilon S. \quad (4.5)$$

Множество $D_{p-t}(Z)$ является замкнутым, а множества $U_0(v)$ и S – компактны. Поэтому включение (4.5) выполнено при $\varepsilon = \varepsilon(t, z, v)$. Из определения множества (4.4) следует, что

$$z + \varepsilon(t, z, v)(u_*(t, z, v) - u(t, z, v)) \in D_{p-t}(Z) + \varepsilon(t, z, v)S \quad (4.6)$$

при некоторых $u_*(t, z, v) \in coU(v)$ и $u(t, z, v) \in coU(v)$.

По теореме Каратеодори [6, теорема I.1.1]

$$u(t, z, v) = \sum_{s=1}^k \lambda_s(t, z, v)u_s(t, z, v), \quad \lambda_s(t, z, v) > 0, \\ \sum_{s=1}^k \lambda_s(t, z, v) = 1, \quad u_s(t, z, v) \in U(v). \quad (4.7)$$

Здесь $k = k(t, z, v) \leq n + 1$. Эти функции берем в качестве управления (1.5) первого игрока.

Пусть в процессе игры реализуется управление $v(t) \in V$ второго игрока, удовлетворяющее условию (1.4). Тогда из формулы (4.4) следует, что включению (1.4) удовлетворяет и многозначная функция $U_0(v(t))$. Отсюда получим, что

$$U_0(v(t)) \subset U_0(v(\tau)) + L(\tau - t)S \quad \text{при } 0 \leq t < \tau \leq p. \quad (4.8)$$

Возьмем разбиение ω (1.6) и построим ломаную (1.8) с функциями (4.7). Обозначим

$$z_i = z_\omega(t_i), \quad v_i = v(t_i), \quad u^{(i)} = u(t_i, z_i, v_i), \quad u_*^{(i)} = u_*(t_i, z_i, v_i), \quad \varepsilon_i = \varepsilon(t_i, z_i, v_i).$$

Тогда из (4.6) следует, что при $i = 0$ выполнено включение

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} \in D_{p-t_i}(Z) + \varepsilon_i S, \quad (4.9)$$

причем $\varepsilon_0 = 0$. Предположим, что в момент времени t_i , $i < l + 1$ выполнено включение (4.9). Тогда, используя лемму 4.1, найдем точку $u \in \text{co}U(v_i)$ такую, что либо

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t_{i+1} - t_i)u \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i S, \quad (4.10)$$

либо при некотором $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t - t_i)u \in Z + \varepsilon_i S. \quad (4.11)$$

Рассмотрим случай (4.10). Из формулы (1.10) получим, что $z_{i+1} = z_i - (t_{i+1} - t_i)u^{(i)}$. Отсюда и из (4.10) будем иметь, что

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u^{(i)} + \varepsilon_i u_*^{(i)} - (t_{i+1} - t_i)u \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i S. \quad (4.12)$$

Пусть $t_{i+1} - t_i \geq \varepsilon_i$. Тогда $(t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u^{(i)} + \varepsilon_i u_*^{(i)} \in (t_{i+1} - t_i)\text{co}U(v_i)$. Отсюда и из (4.12) получим, что

$$z_{i+1} \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + (t_{i+1} - t_i)U_0(v_i) + \varepsilon_i S \subset D_{p-t_{i+1}}(Z) + (t_{i+1} - t_i)U_0(v_{i+1}) + (\varepsilon_i + L|t_{i+1} - t_i|^2)S.$$

Здесь было использовано включение (4.8). Отсюда и из (4.5) следует, что

$$\varepsilon_{i+1} \leq (t_{i+1} - t_i)(1 + L(t_{i+1} - t_i)).$$

Пусть $t_{i+1} - t_i < \varepsilon_i$. Тогда

$$(\varepsilon_i - t_{i+1} + t_i)u^{(i)} + (t_{i+1} - t_i)u \in \varepsilon_i \text{co}U(v_i)$$

и, как следует из (4.12) и (4.8),

$$\begin{aligned} z_{i+1} &\in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i U_0(v_i) + \varepsilon_i S \subset \\ &\subset D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i U_0(v_{i+1}) + (\varepsilon_i + L(t_{i+1} - t_i)\varepsilon_i)S. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.5) следует неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_i(1 + L(t_{i+1} - t_i)).$$

Объединяя оба случая, будем иметь, что включение (4.9) выполнено при $i + 1$, причем

$$\varepsilon_{i+1} \leq \max(t_{i+1} - t_i; \varepsilon_i)(1 + L(t_{i+1} - t_i)). \quad (4.13)$$

Поскольку $\varepsilon_0 = 0$, то из этого неравенства следует, что для всех t_i , для которых выполняется включение (4.10), будет выполнено

$$\varepsilon_{i+1} \leq d(\omega)e^{Lt_i}. \quad (4.14)$$

Обозначим

$$U_0 = co \bigcup_{v \in V} U_0(v).$$

Из ограниченности множества (1.2) следует ограниченность множества U_0 .

Пусть включение (4.10) выполнено для всех $i \leq l$. Тогда из (4.5) и (4.14) следует, что

$$z_\omega(p) \in Z + \delta(\omega)(U_0 + S), \quad \delta(\omega) = d(\omega)e^{pL}. \quad (4.15)$$

Рассмотрим случай, когда для какого-то $i \leq l$ выполнено включение (4.11). На отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ реализуется управление $u_i^*(r) \in U(v_i)$, которое определяется формулами (1.9). Из (4.11) и (1.8) следует, что

$$z_\omega(t) + \int_{t_i}^t u_i^*(r) dr + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t - t_i)u \in Z + \varepsilon_i S.$$

Поскольку

$$\int_{t_i}^t u_i^*(r) dr \in (t - t_i)coU(v_i),$$

то из предыдущего включения получим, что

$$z_\omega(t) \in Z + (t - t_i + \varepsilon_i)(U_0 + S) \subset Z + d(\omega)(1 + e^{pL})(U_0 + S). \quad (4.16)$$

Отсюда и из (4.15) следует, что для каждой ломаной (1.8) найдется число $0 \leq t(\omega) \leq p$ такое, что при $t = t(\omega)$ выполнено включение (4.16).

Пусть последовательность ломаных $z_{\omega_k}(t)$ с диаметром разбиения $d(\omega_k) \rightarrow 0$ равномерно на отрезке $[0, p]$ сходится к движению $z(t)$. Для каждой ломаной в точке $t = t(\omega_k)$ выполнено включение (4.16). Можно считать, что $t(\omega_k) \rightarrow t_*$ (иначе перейдем к подпоследовательности). Из равномерной сходимости ломаных следует, что $z_{\omega_k}(t(\omega_k)) \rightarrow z(t_*)$. Отсюда и из включения (4.16) получим, что $z(t_*) \in Z$. \square

Литература

1. Крэггс, Дж.У. Задачи управления движением. Математическое моделирование / Дж.У. Крэггс. – М., 1979. – С. 21 – 34.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М., 1972. – 496 с.
3. Пшеничный, Б.Н. Структура дифференциальных игр / Б.Н. Пшеничный // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 184, № 2. – С. 285 – 287.
4. Hermes, H. The Generalized Differential Equation $\dot{x} \in R(t, x)$ / H. Hermes // Advances in Mathematics. – 1970. – № 4. – P. 149 – 169.
5. Ухоботов, В.И. К вопросу об окончании за первый момент поглощения / В.И. Ухоботов // Прикл. матем. и мех. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 892 – 897.
6. Пшеничный, Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М., 1980. – 320 с.
7. Ухоботов, В.И. Непрерывная игра в пространстве с неполной линейной структурой / В.И. Ухоботов // Теория и системы управления. – 1997. – № 2. – С. 107 – 109.

Кафедра теории управления и оптимизации
 Челябинский государственный университет
 ukh@csu.ru, iriska-cat@mail.ru

Поступила в редакцию 13 февраля 2009 г.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. В редакцию предоставляется печатная (2 экз.) и электронная (в формате TEX) версии работы (при этом должно быть строго выдержано соответствие между файлом и твердой копией), экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф. И. О., место работы, звание и должность, контактная информация). Подпись авторов и дата ставятся в левом нижнем углу на всех экземплярах.

2. Структура статьи: УДК, название (не более 10 – 12 слов), список авторов, аннотация, список ключевых слов на русском языке, далее следует название, список авторов, аннотация, список ключевых слов на английском языке, текст работы, литература (в порядке цитирования, ГОСТ 7.1 – 2003).

3. Параметры набора. Страницы рукописи должны быть пронумерованы. Шрифт – 12 pt. Поля: зеркальные, верхнее – 30, нижнее – 30, внутри – 25, снаружи – 25 мм. Отступ красной строки 0,7 см, межстрочный интервал – одинарный. В статье нумеруются лишь те формулы, на которые по тексту есть ссылки.

4. Рисунки все черно-белые. Необходимо предоставить рисунки в виде отдельных файлов (в формате *.eps).

5. Адрес редакции Вестника ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование»

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра УМФ, ответственному редактору проф. Свиридюку Георгию Анатольевичу.

6. Адрес электронной почты: mummi@ems.ru

7. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления статей можно загрузить с сайта ЮУрГУ (<http://www.susu.ac.ru>) следуя ссылкам: «Научные исследования», «Издательская деятельность», «Вестник ЮУрГУ», «Серии».

8. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

9. Подписной индекс Вестника ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование»: 29126, каталог «Пресса России». Периодичность выхода – 2 номера в год (май и ноябрь).

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 07.04.2009. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.

Усл. печ. л. 14,41. Уч.-изд. л. 11. Тираж 500 экз. Заказ 143/188.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.