

## О СТРУКТУРЕ ЯДРА ТЕПЛИЦ-ПЛЮС-ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦ

*В.М. Адуков, О.Л. Ибряева*

**В работе изучается структура ядра блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц и на основе этого дается формула для производящего многочлена обратной матрицы для данного класса матриц.**

### 1. Введение

Хорошо известно, что задача описания ядра теплицевых или ганкелевых матриц и задача их обращения тесно связаны между собой [1] – [3]. Обе эти задачи решаются в терминах индексов и существенных многочленов конечной последовательности, порождающей данную теплицеву матрицу [1], [2] (или в терминологии работы [3] в терминах характеристических степеней и характеристических многочленов). Метод оказался также эффективным в задаче явного построения факторизации Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций [4] и при исследовании равномерной сходимости строк таблицы Паде для функций и матриц-функций [5] – [7].

Мы собираемся распространить подход, основанный на понятиях индексов и существенных многочленов, на класс блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц (далее  $T + H$ -матриц). Обращение матриц этого класса возникает в задаче приближенного решения интегральных уравнений с ядром, являющимся суммой двух слагаемых: одно из них зависит от разности аргументов, а другое – от суммы. Кроме того, задача нахождения линейной аппроксимации Паде-Чебышева фактически сводится к нахождению ядра  $T + H$ -матрицы. Эти применения  $T + H$ -матриц и определяют цели данной работы: ввести аналоги индексов и существенных многочленов для случая блочных  $T + H$ -матриц и, на этой основе, описать структуру их ядра и предложить метод их обращения.

Для  $T + H$ -матриц существует два подхода к определению индексов и существенных многочленов, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. В этой статье мы ограничимся описанием только того подхода, который более предпочтителен для применения в задаче обращения  $T + H$ -матриц. Другой подход, который дает более тонкое описание структуры ядра этих матриц, будет опубликован отдельно. Его мы собираемся использовать для изучения аппроксимаций Паде-Чебышева.

Структура данной работы такова. В параграфе 2 мы вводим понятия существенных индексов и многочленов, объясняем причины возникновения двух различных подходов и сравниваем их. Структура ядра блочных  $T + H$ -матриц описывается одним из методов в параграфе 3. В заключительном параграфе 4 мы приводим результат по обращению блочных  $T + H$ -матриц.

### 2. Определение индексов и существенных многочленов $T + H$ -последовательности

Пусть  $a_M, a_{M+1}, \dots, a_N$  и  $b_0, b_1, \dots, b_{N-M}$ , ( $M < N$ ) произвольные конечные последовательности комплексных матриц размером  $p \times q$ . Упорядоченную пару этих двух последова-

тельностью будем называть  $T + H$ -последовательностью. Составим с помощью  $T + H$ -последовательности семейство блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц:

$$S_k = T_k + H_k = \begin{cases} \|a_{i-j} + b_{i+j-k}\| & i = k, k+1, \dots, N \\ & j = 0, 1, \dots, k-M \end{cases}$$

$$M \leq k \leq N.$$

Для того, чтобы ввести понятия индексов и существенных многочленов  $T + H$ -последовательности изучим структуру правых  $\ker_R S_k$  и левых  $\ker_L S_k$  ядер семейства матриц  $S_k$ .

Поскольку удобнее иметь дело не с векторами, а с производящими векторными многочленами, перейдем от пространств  $\ker_R S_k$  и  $\ker_L S_k$  к изоморфным пространствам  $\mathcal{N}_k^R$  и  $\mathcal{N}_k^L$  производящих векторных многочленов. Для этого введем операторы  $\sigma_R^T$  ( $\sigma_R^H$ ), действующие из пространства рациональных матриц-функций вида  $R(t) = \sum_{j=-M}^{N-M} r_j t^j$  ( $R(t) = \sum_{j=0}^{N-M} r_j t^j$ ),  $r_j \in \mathbb{C}^{q \times l}$ , в пространство  $\mathbb{C}^{p \times l}$  по правилу

$$\sigma_R^T\{R(t)\} = \sum_{j=-N}^{-M} a_{-j} r_j \quad (\sigma_R^H\{R(t)\} = \sum_{j=0}^{N-M} b_j r_j)$$

и  $\sigma_L^T$  ( $\sigma_L^H$ ) из пространства рациональных матриц-функций вида  $L(t) = \sum_{j=-N}^{-M} l_j t^j$  ( $L(t) = \sum_{j=0}^{N-M} l_j t^j$ ),  $l_j \in \mathbb{C}^{l \times p}$ , в  $\mathbb{C}^{l \times q}$  по правилу

$$\sigma_L^T\{L(t)\} = \sum_{j=-N}^{-M} l_j a_{-j} \quad (\sigma_L^H\{L(t)\} = \sum_{j=0}^{N-M} l_j b_j).$$

**Определение 2.1.** Определим  $\mathcal{N}_k^R$ ,  $k = M, \dots, N$ , как пространство векторных столбцовых многочленов  $R(t) = \sum_{j=0}^{k-M} r_j t^j$ ,  $r_j \in \mathbb{C}^{q \times 1}$ , таких, что

$$\sigma_R^T\{t^{-i} R(t)\} + \sigma_R^H\{t^{i-k} R(t)\} = 0$$

для  $i = k, k+1, \dots, N$ .

Пусть также  $\mathcal{N}_k^L$ ,  $k = M, \dots, N$ , - пространство векторных строчных многочленов  $L(t) = \sum_{j=0}^{N-k} l_j t^j$ ,  $l_j \in \mathbb{C}^{1 \times p}$ , таких, что

$$\sigma_L^T\{t^{-i} L(t^{-1})\} + \sigma_L^H\{t^{k-i} L(t)\} = 0$$

для  $i = k, k-1, \dots, M$ .

Определим пространство  $\mathcal{N}_{N+1}^R$  как пространство всех столбцовых многочленов от  $t$  формальной степени  $N - M + 1$  и положим  $\mathcal{N}_{M-1}^R = \mathcal{N}_{M-2}^R = \{0\}$ . Введем также пространство  $\mathcal{N}_{M-1}^L$  всех строчных многочленов от  $t$  формальной степени  $N - M + 1$  и положим  $\mathcal{N}_{N+1}^L = \mathcal{N}_{N+2}^L = \{0\}$ .

Очевидно, что  $\mathcal{N}_k^R \cong \ker_R S_k$  и  $\mathcal{N}_k^L \cong \ker_L S_k$ .

Следующая теорема является ключевой при построении всей теории.

**Теорема 2.1.** Выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} (t+1)\mathcal{N}_k^R &\subseteq \mathcal{N}_{k+1}^R, & t\mathcal{N}_k^R &\subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R, \\ t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)^2\mathcal{N}_k^R &= t(t+1)^2\mathcal{N}_{k-2}^R, & t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)\mathcal{N}_{k+1}^R &= t(t+1)\mathcal{N}_{k-1}^R, \\ (t+1)\mathcal{N}_k^L &\subseteq \mathcal{N}_{k-1}^L, & t\mathcal{N}_k^L &\subseteq \mathcal{N}_{k-2}^L, \\ t\mathcal{N}_k^L \cap (t+1)^2\mathcal{N}_k^L &= t(t+1)^2\mathcal{N}_{k+2}^L, & \mathcal{N}_k^L \cap (t+1)\mathcal{N}_{k-1}^L &= t(t+1)\mathcal{N}_{k+1}^L. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Пусть  $R(t) \in \mathcal{N}_k^R$ . Рассмотрим  $\tilde{R}(t) = (t + 1)R(t)$ . Очевидно,  $\deg \tilde{R}(t) \leq k - M + 1$ . Используя условия ортогональности из определения 2.1 для  $R(t) \in \mathcal{N}_k^R$ , получаем

$$\sigma_R^T \{t^{-i} \tilde{R}(t)\} + \sigma_R^H \{t^{i-(k+1)} \tilde{R}(t)\} = 0$$

для  $i = k + 1, \dots, N$ . Значит,  $\tilde{R}(t) \in \mathcal{N}_{k+1}^R$ . Аналогично доказывается вложение  $t\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R$ .

Очевидно, что

$$t(t + 1)^2 \mathcal{N}_{k-2}^R \subseteq t\mathcal{N}_k^R \cap (t + 1)^2 \mathcal{N}_k^R.$$

Докажем противоположное вложение. Пусть  $R(t) \in t\mathcal{N}_k^R \cap (t + 1)^2 \mathcal{N}_k^R$  и  $k > M - 2$ . Тогда,  $R(t) = tR_1(t)$ ,  $R_1(t) \in \mathcal{N}_k^R$  и  $R(t) = (t + 1)^2 R_2(t)$ ,  $R_2(t) \in \mathcal{N}_k^R$ . Значит,  $R(t) = t(t + 1)^2 \tilde{R}_2(t)$ , где  $R_2(t) = t\tilde{R}_2(t)$  и  $\deg \tilde{R}_2(t) \leq k - M - 2$ . Докажем, что  $\tilde{R}_2(t) \in \mathcal{N}_{k-2}^R$ , т.е., что выполняются соответствующие условия ортогональности:

$$\sigma_R^T \{t^{-i} \tilde{R}_2(t)\} + \sigma_R^H \{t^{i-(k-2)} \tilde{R}_2(t)\} = 0 \tag{2.1}$$

для  $i = k - 2, k - 1, \dots, N$ . Используя условия ортогональности для  $R_2(t) = t\tilde{R}_2(t)$ , получим, что это верно для  $i = k - 1, k, \dots, N - 1$ . Из условий ортогональности для  $R_1, R_2$  и условия (2.1), взятых при  $i = k$ , получаем, что (2.1) верно и для  $i = k - 2$ . Аналогично, из условий ортогональности для  $R_1, R_2$  при  $i = N$  и условия (2.1) при  $i = N - 2$ , получаем, что (2.1) верно для  $i = N$ . Нетрудно убедиться, что  $t\mathcal{N}_M^R \cap (t + 1)^2 \mathcal{N}_M^R = 0$ ,  $t\mathcal{N}_{M+1}^R \cap (t + 1)^2 \mathcal{N}_{M+1}^R = 0$ , т.е. доказываемое соотношение верно и при  $k = M, M + 1$ .

Аналогично доказывается вложение  $t\mathcal{N}_k^R \cap (t + 1)\mathcal{N}_{k+1}^R = t(t + 1)\mathcal{N}_{k-1}^R$  и вторая часть теоремы. ■

Таким образом, в отличие от теплицева случая, теперь мы должны рассмотреть вложения трех последовательных пространств  $\mathcal{N}_k^R, \mathcal{N}_{k+1}^R, \mathcal{N}_{k+2}^R$ , что дает возможность для двух различных вариантов построения дальнейшей теории. Во-первых, мы можем рассмотреть две независимые цепочки вложений:  $\mathcal{N}_M^R \subseteq \mathcal{N}_{M+2}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+4}^R \dots$  и  $\mathcal{N}_{M+1}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+3}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+5}^R \dots$ , используя тем самым только вложения  $t\mathcal{N}_k^R, (t + 1)^2 \mathcal{N}_k^R$  (или  $(t^2 + 1)\mathcal{N}_k^R$ ) в  $\mathcal{N}_{k+2}^R$ . Для этих двух цепочек пространств мы независимо определим два набора индексов и существенных многочленов никак не связанных между собой. Этот способ не использует вложения  $(t + 1)\mathcal{N}_{k+1}^R$  в  $\mathcal{N}_{k+2}^R$  и потому дает более грубое описание структуры ядра, чем второй способ, использующий это вложение. В последнем случае мы имеем одну цепочку вложенных пространств  $\mathcal{N}_k^{R,L}, M \leq k \leq N$  и один набор индексов и существенных многочленов. Однако, при таком подходе многие формулы, относящиеся к задаче обращения  $T + H$ -матриц, становятся более сложными. Для обращения матрицы  $S_0$  необязательно рассматривать все пространства  $\mathcal{N}_k^{R,L}$ . Достаточно рассмотреть только одну цепочку вложений, содержащую  $\mathcal{N}_0^R$ . В данной статье мы поступим именно таким образом. Второй подход будет описан в другой работе.

Пусть  $\alpha_0 = \dim \mathcal{N}_M^R, \alpha_1 = \dim \mathcal{N}_{M+1}^R, \omega_1 = \dim \mathcal{N}_{N-1}^L, \omega_0 = \dim \mathcal{N}_N^L$ . Заметим, что всегда  $\alpha_0 \leq \alpha_1, \omega_0 \leq \omega_1$ , т.к.  $(t + 1)\mathcal{N}_M^R \subseteq \mathcal{N}_{M+1}^R, (t + 1)\mathcal{N}_N^L \subseteq \mathcal{N}_{N-1}^L$ .

Будем называть  $T + H$ -последовательность **регулярной**, если  $\alpha_0, \alpha_1, \omega_1, \omega_0$  равны нулю. Сами числа  $\alpha_0, \alpha_1, \omega_1, \omega_0$  будем называть **дефектами**  $T + H$ -последовательности. В случае  $\alpha_1 = \omega_1 = 0$ , автоматически получаем  $\alpha_0 = \omega_0 = 0$ .

Обозначим  $d_k^R = \dim \mathcal{N}_k^R, d_k^L = \dim \mathcal{N}_k^L$ . По определению положим  $\Delta_k^R = d_k^R - d_{k-2}^R$  и  $\Delta_k^L = d_k^L - d_{k+2}^L$ .

Легко убедиться, что для  $M - 1 \leq k \leq N - 1$

$$\Delta_{k+2}^R + \Delta_k^L = 2(p + q) \tag{2.2}$$

Чтобы соотношение (2.2) выполнялось и для  $k = M - 2, N$  нужно положить  $d_{N+2}^R = (N - M + 3)q + p$ , и  $d_{M-2}^L = (N - M + 3)p + q$ , Теперь имеют место следующие равенства:  $\Delta_M^R = \alpha_0, \Delta_{M+1}^R = \alpha_1, \Delta_{N+1}^R = 2(p + q) - \omega_1, \Delta_{N+2}^R = 2(p + q) - \omega_0, \Delta_{M-2}^L = 2(p + q) - \alpha_0, \Delta_{M-1}^L = 2(p + q) - \alpha_1, \Delta_{N-1}^L = \omega_1, \Delta_N^L = \omega_0$ . Заметим, что определение чисел  $d_{N+2}^R$ , и  $d_{M-2}^L$  является формальным – сами пространства  $\mathcal{N}_{N+2}^R, \mathcal{N}_{M-2}^L$  не определены.

Теперь мы можем установить очень важный для дальнейшего факт – монотонность последовательностей  $\Delta_k^{R,L}$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $N - M \equiv \epsilon \pmod{2}, \epsilon = 0, 1$ . Тогда для любой  $T + H$ -последовательности справедливы следующие неравенства:

$$\alpha_\nu = \Delta_{M+\nu}^R \leq \Delta_{M+2+\nu}^R \leq \dots \leq \Delta_{N-[\epsilon+\nu]}^R \leq \Delta_{N+2-[\epsilon+\nu]}^R = 2(p + q) - \omega_{[\epsilon+\nu]}, \quad \nu = 0, 1, \quad (2.3)$$

$$2(p + q) - \alpha_\nu = \Delta_{M-2+\nu}^L \geq \Delta_{M+\nu}^L \geq \dots \geq \Delta_{N-2-[\epsilon+\nu]}^L \geq \Delta_{N-[\epsilon+\nu]}^L = \omega_{[\epsilon+\nu]}, \quad \nu = 0, 1, \quad (2.4)$$

где  $\epsilon + \nu \equiv [\epsilon + \nu] \pmod{2}, [\epsilon + \nu] = 0, 1$ .

**Доказательство.** Как показано в теореме 2.1, пространство  $\mathcal{N}_{k+2}^R$  содержит подпространство  $t\mathcal{N}_k^R + (t + 1)^2\mathcal{N}_k^R$ . Воспользовавшись формулой Грассмана, получим

$$\begin{aligned} \dim(t\mathcal{N}_k^R + (t + 1)^2\mathcal{N}_k^R) &= \\ \dim t\mathcal{N}_k^R + \dim (t + 1)^2\mathcal{N}_k^R - \dim(t\mathcal{N}_k^R \cap (t + 1)^2\mathcal{N}_k^R) &= 2d_k^R - d_{k-2}^R \leq d_{k+2}^R. \end{aligned}$$

Это и означает, что  $\Delta_k^R \leq \Delta_{k+2}^R$ .

Аналогично доказываются остальные неравенства. ■

Перейдем теперь к определению индексов и существенных многочленов для цепочки пространств

$$\mathcal{N}_{M+\nu}^R, \mathcal{N}_{M+2+\nu}^R, \mathcal{N}_{M+4+\nu}^R \dots, \quad \nu = 0, 1.$$

Из теоремы 2.2 и в силу того, что  $\Delta_k^R$  целые числа, следует, что цепочка неравенств (2.3) возможна лишь в том случае, если найдется  $2(p + q) - \omega_{[\epsilon+\nu]} - \alpha_\nu$  целых чисел  $\mu_{\alpha_\nu+1}^\nu \leq \dots \leq \mu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu$  таких, что

$$\begin{aligned} \Delta_M^R &= \dots = \Delta_{\mu_{\alpha_\nu+1}^\nu}^R = \alpha_\nu, \\ &\dots \\ \Delta_{\mu_i^\nu+2}^R &= \dots = \Delta_{\mu_{i+1}^\nu}^R = i, \\ &\dots \\ \Delta_{\mu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu+2}^R &= \dots = \Delta_{N+2-[\epsilon+\nu]}^R = 2(p + q) - \omega_{[\epsilon+\nu]}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если  $i$ -я строка в этих соотношениях отсутствует, считаем, что  $\mu_i^\nu = \mu_{i+1}^\nu$ . Кроме того, по определению будем считать,  $\mu_1^\nu = \dots = \mu_{\alpha_\nu}^\nu = M - 2 + \nu$  (в случае  $\alpha_\nu \neq 0$ ) и  $\mu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^0+1 = \dots = \mu_{2(p+q)}^0 = N + 2 - [\epsilon + \nu]$  (в случае  $\omega_{[\epsilon+\nu]} \neq 0$ ).

Аналогичным образом для цепочки неравенств (2.4) можно определить  $2(p + q)$  целых чисел  $\pi_1^\nu \leq \dots \leq \pi_{2(p+q)}^\nu$ . Эти числа определяются следующей таблицей:

$$\begin{aligned} \Delta_{M-2+\nu}^L &= \dots = \Delta_{\pi_{\alpha_\nu+1}^\nu-2}^L = 2(p + q) - \alpha_\nu, \\ &\dots \\ \Delta_{\pi_i^\nu}^L &= \dots = \Delta_{\pi_{i+1}^\nu-2}^L = 2(p + q) - i, \\ &\dots \\ \Delta_{\pi_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu}^L &= \dots = \Delta_{N-[\epsilon+\nu]}^L = \omega_{[\epsilon+\nu]} \end{aligned} \quad (2.6)$$

с доопределением  $\pi_1^\nu = \dots = \pi_{\alpha_\nu}^\nu = M - 2 + \nu$  (для случая, когда  $\alpha_\nu \neq 0$ ) и  $\pi_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}+1}^\nu = \dots = \pi_{2(p+q)}^\nu = N + 2 - [\epsilon + \nu]$ , если  $\omega_{[\epsilon+\nu]} \neq 0$ .

**Предложение 2.1.** Числа  $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu$  и  $\pi_1^\nu, \dots, \pi_{2(p+q)}^\nu$  совпадают. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu = 2[p(N+1) + q(M-1)].$$

**Доказательство.** Первая часть предложения легко следует из ранее полученной формулы  $\Delta_{k+2}^R + \Delta_k^L = 2(p+q)$ .

Докажем формулу для суммы чисел  $\mu_i^\nu$ . С одной стороны,

$$\sum_{i=M}^{N+2} \Delta_i^R = \Delta_M^R + \dots + \Delta_{N+2}^R = d_{N+2}^R + d_{M-2}^R = (N - M + 3)q + p.$$

Здесь знак  $\sum'$  означает, что в этой сумме шаг изменения индекса  $i$  равен двум. С другой стороны,  $\sum_{i=M}^{N+2} \Delta_i^R = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu - 2(p+q)(N+2)$ .

Сравнивая, получаем  $\sum_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu = 2[p(N+1) + q(M-1)]$ . ■

Заметим, что если  $0 \in [M, N]$ , то эта сумма равна удвоенному индексу оператора  $S_0$ , взятому с обратным знаком.

**Определение 2.2.** Целые числа  $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu$  будем называть индексами порядка  $\nu$  данной  $T + H$ -последовательности.

Перейдем теперь к определению существенных многочленов.

Мы знаем, что  $t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R$ . Обозначим  $\mathcal{H}_{k+2}^R$  дополнение пространства  $t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R$  до  $\mathcal{N}_{k+2}^R$ , т.е.

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = (t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R) \dot{+} \mathcal{H}_{k+2}^R$$

для  $k = M, M+2, \dots$ . Тогда  $\dim \mathcal{H}_{k+2}^R = \Delta_{k+2}^R - \Delta_k^R$ . Из таблицы (2.5) видно, что эта разность  $\Delta_{k+2}^R - \Delta_k^R \neq 0$  только для  $k = \mu_j^\nu$  и равна кратности индекса  $\mu_j^\nu$ . Таким образом,

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R, \quad k \neq \mu_j^\nu,$$

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = (t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R) \dot{+} \mathcal{H}_{k+2}^R, \quad k = \mu_j^\nu.$$

Аналогично, для случая левых ядер, мы имеем

$$\mathcal{N}_{k-2}^L = t\mathcal{N}_k^L + (t+1)^2\mathcal{N}_k^L, \quad k \neq \mu_j^\nu,$$

$$\mathcal{N}_{k-2}^L = (t\mathcal{N}_k^L + (t+1)^2\mathcal{N}_k^L) \dot{+} \mathcal{H}_{k-2}^L, \quad k = \mu_j^\nu.$$

**Определение 2.3.** Любые столбцовые многочлены  $R_j^\nu(t), R_{j+1}^\nu(t), \dots, R_{j+k_j+1}^\nu(t)$ , образующие базис  $\mathcal{H}_{\mu_j^\nu+2}^R$ , где  $k_j = \dim \mathcal{H}_{\mu_j^\nu+2}^R - \text{кратность } \mu_j^\nu$ , будем называть правыми существенными многочленами, соответствующими индексу  $\mu_j^\nu$ .

Аналогично, любые строчные многочлены  $L_j^\nu(t), L_{j+1}^\nu(t), \dots, L_{j+k_j+1}^\nu(t)$ , являющиеся базисом дополнения  $\mathcal{H}_{\mu_j^\nu-2}^L$ , будем называть левыми существенными многочленами, соответствующими индексу  $\mu_j^\nu$ .

Многочлены  $R_1^\nu(t), \dots, R_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu (L_{\alpha_{\nu+1}}^\nu(t), \dots, L_{2(p+q)}^\nu)$  назовем правыми (левыми) существенными многочленами порядка  $\nu$  для данной  $T + H$ -последовательности.

Если  $0 \in [M, N]$  и  $M \equiv \nu \pmod{2}$ ,  $\nu = 0, 1$ , то нетрудно убедиться, что матрица  $S_0$  обратима тогда и только тогда, когда  $T + H$ -последовательность регулярна, все индексы порядка  $\nu$  равны нулю, и  $\mu_1^{[\nu+1]} = \dots = \mu_{p+q}^{[\nu+1]} = -1$ ,  $\mu_{p+q+1}^{[\nu+1]} = \dots = \mu_{2(p+q)}^{[\nu+1]} = 1$ . Кроме того, в этом случае все правые существенные многочлены порядка  $\nu$  мы можем получить, найдя базис  $\ker_R S_2$ , так как  $d_2^R = 2(p+q)$ . Аналогично, базис  $\ker_L S_{-2}$  состоит из  $2(p+q)$  левых существенных многочленов порядка  $\nu$ . Как мы увидим в дальнейшем, именно эти правые и левые существенные многочлены и будут определять матрицу  $S_0^{-1}$ .

### 3. Структура ядра $T + H$ -матриц

Теперь мы можем описать структуру ядра блочных  $T + H$ -матриц в терминах индексов и существенных многочленов.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu$ ,  $\nu = 0, 1$ , - индексы  $T + H$ -последовательности и  $R_1^\nu(t), \dots, R_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu$  - правые существенные многочлены ( $(N - M) \equiv \epsilon \pmod{2}$ ). Тогда, если  $l \in [\mu_i^\nu + 2, \mu_{i+1}^\nu]$ , то производящие многочлены для элементов базиса  $\ker_R S_l$  есть:

$$\left\{ t^{k_j} R_j^\nu(t), t^{k_j-1} (t+1)^2 R_j^\nu(t), \dots, t(t+1)^{2(k_j-1)} R_j^\nu(t), (t+1)^{2k_j} R_j^\nu(t) \right\}_{j=1}^i.$$

Здесь  $k_j = \frac{l - \mu_j^\nu}{2} - 1$ .

Для удобства в случае  $\omega_0 = 0$  положено  $\mu_{2(p+q)+1}^\nu = N + 2$  и, если  $\omega_1 = 0$ ,  $\mu_{2(p+q)+1}^\nu = N + 1$ .

**Доказательство.** Докажем утверждение теоремы по индукции. Очевидно, утверждение теоремы верно для первого пространства  $\ker_R S_M$ . Предположим, что оно выполняется и для  $\ker_R S_k$ ,  $k \leq l - 1$ . Докажем, что тогда оно верно и для  $\ker_R S_l$ . Для упрощения записи опустим верхний индекс  $\nu$ .

Рассмотрим случай  $l \in (\mu_i + 2, \mu_{i+1})$ . Производящие многочлены для элементов базиса  $\ker_R S_{l-2} \cong \mathcal{N}_{l-2}^R$  есть

$$\left\{ t^{k_j-1} R_j, t^{k_j-2} (t+1)^2 R_j, \dots, t(t+1)^{2(k_j-2)} R_j, (t+1)^{2(k_j-1)} R_j \right\}_{j=1}^i.$$

Тогда  $t\mathcal{N}_{l-2}^R$  порождается

$$\left\{ t^{k_j} R_j, t^{k_j-1} (t+1)^2 R_j, \dots, t^2 (t+1)^{2(k_j-2)} R_j, t(t+1)^{2(k_j-1)} R_j \right\}_{j=1}^i,$$

и  $(t + 1)^2 \mathcal{N}_{l-2}^R$  порождается

$$\left\{ t^{k_j-1} (t + 1)^2 R_j, t^{k_j-2} (t + 1)^4 R_j, \dots, t (t + 1)^{2(k_j-1)} R_j, (t + 1)^{2k_j} R_j \right\}_{j=1}^i.$$

Тогда пространство  $\mathcal{N}_l^R = t \mathcal{N}_{l-2}^R + (t + 1)^2 \mathcal{N}_{l-2}^R$  порождается

$$\left\{ t^{k_j} R_j, t^{k_j-1} (t + 1)^2 R_j, \dots, t (t + 1)^{2(k_j-1)} R_j, (t + 1)^{2k_j} R_j \right\}_{j=1}^i. \quad (3.1)$$

Осталось показать, что эти многочлены могут быть выбраны в качестве базисных. Количество многочленов в (3.1) есть

$$\sum_{j=1}^i (k_j + 1) = \sum_{j=1}^i \left( \frac{l - \mu_j}{2} \right) = \frac{l}{2} i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \mu_j.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} d_l^R &= \sum_{j=M}^l \Delta_j^R = \alpha_0 \left( \frac{-M + \mu_{\alpha_0+1}}{2} + 1 \right) + (\alpha_0 + 1) \left( \frac{\mu_{\alpha_0+2} - \mu_{\alpha_0+1}}{2} \right) + \dots \\ &+ (i - 1) \left( \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{2} \right) + i \left( \frac{l - \mu_i}{2} \right) = \frac{l}{2} i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \mu_j. \end{aligned}$$

Так как количество многочленов в (3.1) совпадает с размерностью  $d_l^R$  и эти многочлены порождают  $\mathcal{N}_l^R$ , то система (3.1) — базис  $\mathcal{N}_l^R$ . Аналогично можно рассмотреть случаи  $l = \mu_i + 2, l = \mu_{i+1}$ .

Теорема доказана. ■

Аналогичная теорема справедлива и для левых ядер.

**Теорема 3.2.** Пусть  $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu, \nu = 0, 1,$  — индексы, а  $(L_{\alpha_\nu+1}^\nu(t), \dots, L_{2(p+q)}^\nu(t))$  — левые существенные многочлены  $T + H$ -последовательности.

Тогда, если  $l \in [\mu_{i-1}^\nu, \mu_i^\nu - 2]$ , то производящие многочлены для элементов базиса  $\ker_L S_i$  есть:

$$\left\{ t^{k_j} L_j^\nu(t), t^{k_j+1} (t + 1)^2 L_j^\nu(t), \dots, t (t + 1)^{2(k_j-1)} L_j^\nu(t), (t + 1)^{2k_j} L_j^\nu(t) \right\}_{j=i}^{2(p+q)}.$$

Здесь  $k_j = \frac{\mu_j^\nu - l}{2} - 1$ .

Для удобства в случае  $\alpha_0 = 0$  положено  $\mu_0^\nu = M - 2$  и, если  $\alpha_1 = 0, \mu_0^\nu = M - 1$ .

## 4. Обращение $T + H$ -матриц

В заключение приведем формулу для производящей функции для обратной к  $T + H$ -матрице.

Положим  $M = -m, N = n$ . Пусть  $S_0 = \|a_{i-j} + b_{i+j}\|$  — обратимая блочная теплиц-плюс-ганкелевая матрица блочных размеров  $n \times m$  с блоками из  $\mathbb{C}^{p \times q}$  и  $B = \|b_{ij}\|_{\substack{i=0,1,\dots,m \\ j=0,1,\dots,n}}$

$(b_{ij} \in \mathbb{C}^{q \times p})$  — обратная к ней матрица.

Введем для матрицы  $B$  производящий многочлен от двух переменных  $t$  и  $s$ :

$$B(t, s) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} t^i s^j.$$

**Теорема 4.1.** Пусть матрица  $S_0$  обратима и  $M \equiv \nu \pmod{2}$ ,  $R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)$  - правые, а  $L_1(t), \dots, L_{2(p+q)}(t)$  - левые существенные многочлены порядка  $\nu$  данной  $T + H$ -последовательности.

Тогда производящий многочлен для обратной матрицы строится по формуле:

$$B(t, s) = \frac{\mathcal{R}(t)\Lambda^{-1}\mathcal{L}(s)}{(t-s)(1-ts)},$$

где  $\mathcal{R}(t) = (R_1(t) \dots R_{2(p+q)}(t))$ ,  $\mathcal{L}(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) \\ \vdots \\ L_{2(p+q)}(s) \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \Lambda_L \Lambda_0 \Lambda_R$ ,

$$\Lambda_L = ( \mathcal{L}_0 \quad \sigma_L^T \{s^{m+1}\mathcal{L}(s^{-1})\} + \sigma_L^H \{s^{m-1}\mathcal{L}(s)\} \quad \mathcal{L}_{n+2} \quad \sigma_L^T \{s\mathcal{L}(s^{-1})\} + \sigma_L^H \{s^{-1}\mathcal{L}(s)\} ),$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad \Lambda_R = \begin{pmatrix} \sigma_R^T \{t^{-1}\mathcal{R}(t)\} + \sigma_R^H \{t^{-1}\mathcal{R}(t)\} \\ \mathcal{R}_{m+2} \\ \sigma_R^T \{t^{-n-1}\mathcal{R}(t)\} + \sigma_R^H \{t^{n-1}\mathcal{R}(t)\} \\ \mathcal{R}_0 \end{pmatrix},$$

$I_p$  — единичная матрица порядка  $p$ .

Здесь  $\mathcal{R}_{m+2}$  и  $\mathcal{L}_{n+2}$  — старшие коэффициенты правых и левых существенных многочленов,  $\mathcal{R}_0, \mathcal{L}_0$  — их свободные члены. Неявно присутствующие в  $\Lambda_R, \Lambda_L$  матрицы  $a_{-m-1}, a_{n+1}, b_{-1}, b_{m+n+1}$  — любые матрицы размеров  $p \times q$ .

**Доказательство.** Всюду далее в этом доказательстве запись  $[B(t, s)]^j$  ( $[B(t, s)]_j$ ) будет означать  $j$ -й столбец (строку) матрицы  $B(t, s)$ .

Докажем вначале, что  $(t-s)(1-ts)[B(t, s)]^j \in \mathcal{N}_2^R$ . Заметим, что для  $l = 0, \dots, n$

$$\sigma_R^{T,t} \{t^{-l}B(t, s)\} + \sigma_R^{H,t} \{t^l B(t, s)\} = \sum_{j=0}^n \delta_{lj} I_p s^j = s^l I_p. \tag{4.1}$$

Здесь верхний индекс  $t$  у оператора означает, что он действует только на эту переменную.

Из условий (4.1) следует, что для  $i = 2, \dots, n$

$$\sigma_R^{T,t} \{t^{-i}(t-s)(1-ts)B(t, s)\} + \sigma_R^{H,t} \{t^{i-2}(t-s)(1-ts)B(t, s)\} = 0.$$

По определению (2.1) это означает, что  $(t-s)(1-ts)[B(t, s)]^j \in \mathcal{N}_2^R$ . Аналогично, с использованием условия

$$\sigma_L^{T,s} \{s^{-l}B(t, s^{-1})\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-l}B(t, s)\} = t^{-l} I_q, \quad l = 0, -1, \dots, -m$$

можно показать, что для  $i = -2, -3, \dots, -m$  выполняется

$$\sigma_L^{T,s} \{s^{-i}(t-s^{-1})(1-ts^{-1})B(t, s^{-1})\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i}(t-s)(1-ts)B(t, s)\} = 0, \tag{4.2}$$



что по определению (2.1) означает, что  $(t-s)(1-ts)[\mathcal{B}(t,s)]_j \in \mathcal{N}_{-2}^L$ .

Так как  $R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)$  базис для  $\mathcal{N}_2^R$ , мы имеем

$$(t-s)(1-ts)[\mathcal{B}(t,s)]^j = \sum_{k=1}^{2(p+q)} R_k(t)V_{kj}(s), \quad j = 1, \dots, p.$$

В матричной форме  $(t-s)(1-ts)\mathcal{B}(t,s) = \mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s)$ , где

$$\mathcal{R}(t) = (R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)), \quad \mathcal{V}(s) = \begin{pmatrix} V_{11}(s) & \dots & V_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{2(p+q)1}(s) & \dots & V_{2(p+q)p}(s) \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} & \sigma_L^{T,s} \{s^{-i}\mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s^{-1})\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i}\mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s)\} = \\ & = \mathcal{R}(t) \begin{pmatrix} \sigma_L^{T,s} \{s^{-i} [\mathcal{V}(s^{-1})]_1\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i} [\mathcal{V}(s)]_1\} \\ \dots \\ \sigma_L^{T,s} \{s^{-i} [\mathcal{V}(s^{-1})]_{2(p+q)}\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i} [\mathcal{V}(s)]_{2(p+q)}\} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

для  $i = -2, \dots, -m$ . Так как многочлены  $R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)$  линейно независимы, мы имеем  $\sigma_L^{T,s} \{s^{-i} [\mathcal{V}(s^{-1})]_j\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i} [\mathcal{V}(s)]_j\} = 0$  для  $j = 1, \dots, 2(p+q)$ . По определению (2.1) это означает, что  $[\mathcal{V}(s)]_j \in \mathcal{N}_{-2}^L$ .

Так как  $L_1(s), \dots, L_{2(p+q)}(s)$  – базис  $\mathcal{N}_{-2}^L$ , мы получаем

$$[\mathcal{V}(s)]_j = \sum_{k=1}^{2(p+q)} v_{jk}L_k(s), \quad j = 1, \dots, 2(p+q), \quad v_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Представим эти уравнения в матричной форме  $\mathcal{V}(s) = V\mathcal{L}(s)$ , где

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{12(p+q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{2(p+q)1} & \dots & v_{2(p+q)2(p+q)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) \\ \vdots \\ L_{2(p+q)}(s) \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$(t-s)(1-ts)\mathcal{B}(t,s) = \mathcal{R}(t)V\mathcal{L}(s). \quad (4.3)$$

Осталось найти матрицу  $V$ . Докажем, что  $\Lambda_R V \Lambda_L = \Lambda_0$ . Для этого нужно вычислить 16 элементов матрицы  $\Lambda_R V \Lambda_L$ .

Сравним в (4.3) коэффициенты при  $s^0$ :

$$t\mathcal{B}(t,0) = \mathcal{R}(t)V\mathcal{L}_0. \quad (4.4)$$

Заметим, что  $t\mathcal{B}(t,0)$  многочлен по  $t$  степени не большей  $m+1$ , а  $\mathcal{R}(t)$  не большей  $m+2$ . Тогда получаем следующее условие:  $\mathcal{R}_{m+2}V\mathcal{L}_0 = 0$ . Фактически мы нашли элемент  $\lambda_{21}$  матрицы  $\Lambda_0$ . Если сравнить в (4.4) коэффициенты при  $t^0$ , то мы получим элемент  $\lambda_{41} = \mathcal{R}_0V\mathcal{L}_0 = 0$ .

Далее заметим, что  $\sigma_R^T \{B(t, 0)\} + \sigma_R^H \{B(t, 0)\} = I_p$ . (Мы не указываем явно на какую переменную действует оператор, если это не вызывает сомнений.) Это приводит к результату  $\lambda_{11} = (\sigma_R^T \{t^{-1}R(t)\} + \sigma_R^H \{t^{-1}R(t)\}) V L_0 = I_p$ . Аналогично, замечая,

$$\sigma_R^T \{t^{-n}B(t, 0)\} + \sigma_R^H \{t^n B(t, 0)\} = 0,$$

получаем  $\lambda_{31} = (\sigma_R^T \{t^{-n-1}R(t)\} + \sigma_R^H \{t^{n-1}R(t)\}) V L_0 = 0$ . Аналогично могут быть найдены и оставшиеся элементы. Ввиду ограниченности места мы не приводим полного доказательства.

Итак,  $\Lambda_R V \Lambda_L = \Lambda_0$ . Все матрицы в этом выражении квадратные и, очевидно,  $(\Lambda_0)^{-1} = \Lambda_0$ . Тогда каждая из  $\Lambda_R, V, \Lambda_L$  обратима и

$$V = \Lambda_R^{-1} \Lambda_0 \Lambda_L^{-1} = (\Lambda_L \Lambda_0 \Lambda_R)^{-1} = \Lambda^{-1}.$$

Теорема доказана. ■

Отметим, что уже созданная теория для теплицевых матриц (см. [2]) не является частным случаем этой теории при нулевой  $H$ -последовательности, так как в данном случае мы иначе определяем разности  $\Delta_k^R$ . Этим объясняются некоторые расхождения с результатами для теплицевых матриц.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 01-01-96422. Один из авторов (Ибряева О.Л.) благодарит за финансовую поддержку программу молодежных грантов для студентов, аспирантов и молодых ученых Челябинской области.

## Литература

1. Адуков В.М. Структура ядра и обращение блочных теплицевых матриц / Ред. Сиб. мат. журн. – Новосибирск, 1985. – 20 с. Деп. в ВИНТИ 29.12.85, N 9030-В.
2. Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices// *Linear Algebra Appl.* – 1998. – V. 274. – P. 85-124.
3. Heinig G., Jankowski P. Kernel structure of block Hankel and Toeplitz matrices and partial realization// *Linear Algebra Appl.* – 1992. – V. 175. – P. 1–30.
4. Адуков В.М. Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций// *Алгебра и анализ.* – 1992. – Т. 4, Вып. 1. – С. 54-74.
5. Адуков В.М. О равномерной сходимости подпоследовательностей  $(\lambda - 1)$ -й строки таблицы Паде// *Известия Челябинского научного центра.* – 2001. – Вып. 1. – С. 3–7.
6. Адуков В.М. О геометрии множества предельных точек полюсов  $(\lambda - 1)$ -й строки таблицы Паде// *Известия Челябинского научного центра.* – 2001. – Вып. 1. – С. 8–11.
7. Adukov V.M. The essential polynomial approach to convergence of matrix Padé approximants// *Contemporary Math.* – 2001. – V. 280. – P. 71–87.