

ПЛАНИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОДНОВРЕМЕННОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЯЗКОСТИ И ПЛОТНОСТИ НЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДЫ

И.В. Елюхина

В работе методами математического моделирования проведено планирование оптимального вискозиметрического эксперимента, позволяющего судить о корректности данных прямых измерений.

Введение. Экспериментальные данные, получаемые разными авторами с помощью основного метода исследования вязкостных свойств агрессивных и высокотемпературных сред, а именно: метода крутильных колебаний Швидковского Е.Г. [1], являются достаточно *противоречивыми* (см., например, данные по вязкости жидкого железа (рис. 1), полученные в подавляющем большинстве именно данным методом при декларируемой авторами погрешности менее 5%).

В связи с этим *разработка методов проверки корректности данных прямых измерений* и их последующей обработки представляется весьма своевременной.

В одном из таких методов заключение о получении надежной оценки вязкости жидкости выводится из сравнения известного из независимых источников значений плотности и оцененного *при одновременном определении вязкости и плотности среды* из вискозиметрического уравнения. Идея метода появилась уже достаточно давно [3, 4], но до сих пор, насколько это известно, не реализована на практике.

Основы теории и проблематика вопроса одновременного восстановления вязкости и плотности. Вискозиметрическое уравнение [1], связывающее свойства ньютоновской среды с наблюдаемыми в эксперименте параметрами колебаний, можно представить в виде

$$F = F = \left[p \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 + q_0^2}{p^2 + q^2} \right) - 2p_0 \right] K + i \cdot \left[q \cdot \left(1 - \frac{p_0^2 + q_0^2}{p^2 + q^2} \right) \right] K - (L_1 + L_2) = 0, \quad (1)$$

$$L_1 = -2\nu M \beta \frac{J_2(\beta)}{J_1(\beta)}, \quad L_2 = a \cdot \frac{M k^2}{H \nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{th(\theta_n H)}{\mu_n^2 \theta_n^3}, \quad (2)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $p = \delta / \tau$ – коэффициент затухания колебаний; $q = 2\pi / \tau$ – циклическая частота; $p_0 = \delta_0 / \tau_0$; $q_0 = 2\pi / \tau_0$; δ и τ – логарифмический декремент и период колебаний заполненного жидкостью цилиндра соответственно; τ_0 и δ_0 – период и логарифмический декремент собственных установившихся затухающих колебаний пустой системы; K – момент инерции всей подвешенной системы без жидкости относительно оси цилиндра; M – масса среды; ν – кинематическая вязкость; $\beta = R\sqrt{k/\nu}$; $k = p + i \cdot q$; R – внутренний радиус цилиндра; H – полувысота цилиндра;

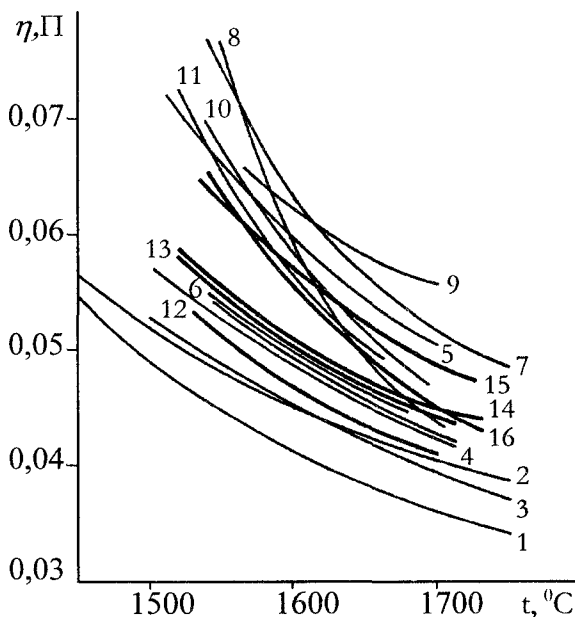


Рис. 1. Зависимость вязкости от температуры для жидкого железа
1, 2 ...16 – см. номера литературных источников в [2]

$\theta_n^2 = \mu_n^2 - k/v$; μ_n – характеристические числа, определяемые из уравнения $J_1(\mu_n R) = 0$; J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка; L_1, L_2 – функции трения, отражающие роль сил трения на боковой поверхности цилиндра и его торцах соответственно; $a = 4$ – при учете контакта жидкости с крышкой; $a = 2$ – в случае свободной поверхности.

Неизвестные параметры – вязкость ν и плотность ρ жидкости – определим методами *параметрической идентификации* [5] из условия минимума функции качества вида

$$f(\nu, \rho) = \sqrt{c_1 \cdot \text{Re}^2(F) + c_2 \cdot \text{Im}^2(F)}, \quad (3)$$

где c_1, c_2 – весовые коэффициенты; Re, Im – действительная и мнимая части от функции F .

Детальное обсуждение возможности одновременной оценки вязкости и плотности ньютоновской жидкости из измеряемых в эксперименте параметров крутильных колебаний цилиндра проведено в *работе Ньюводта Дж., Сенгерса Дж. и Кестина Дж.* [4]. Но полученные результаты являются лишь хорошим *начальным приближением* в силу многих *факторов*, в частности:

- 1) исследования проведены в приближении двух частных случаев большого и малого цилиндров и в этом смысле *не являются универсальными*;
- 2) принятая для исследования *точность измерения* периода и декремента *не всегда может быть реализована* практически;
- 3) при определении ошибок измерения плотности и вязкости были приняты во внимание *только ошибки прямых измерений периода и декремента* затухания подвесной системы;
- 4) обычно в вискозиметрической практике реализуются значения радиуса цилиндра $R \sim 0,5 - 1,5$ см с целью повышения качества эксперимента, например, для обеспечения изотермичности при исследовании металлических расплавов. В [4] данный *диапазон значений радиуса является нерабочим* при точности измерений $\overline{\Delta\tau} \sim 10^{-5}$ и $\overline{\Delta\delta} \sim 10^{-6}$, где знак $\overline{\quad}$ означает, что значения даны в относительных единицах.

Таким образом, достаточно *актуальным* является вопрос *разработки методов одновременного измерения вязкости и плотности* ньютоновских жидкостей в эксперименте по Швидковскому Е.Г, которые были бы свободны от указанных выше недостатков.

Анализ условий, обеспечивающих надежную оценку характеристик среды. Причинами, затрудняющими решение задачи, являются недостаточная точность измеряемых в эксперименте величин, большая чувствительность к их изменению некоторых оцениваемых параметров и, как следствие, овражистый характер функции качества (3).

Проведенные расчеты показали *криволинейный тип оврага*, ось которого слегка искривлена и составляет небольшой угол с направлением градиента плотности. Исходя из качественного и количественного анализа поведения функции $f(\nu, \rho)$ (3) на плоскости (ν, ρ) установлено, что локальное направление дна оврага, т.е. кривой, где $f'_\rho(\nu(\rho), \rho) = 0$, в пределах точности численных методов можно считать совпадающим с мгновенным значением производной $\rho'_\nu = \frac{\partial \rho}{\partial \nu} = \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \cdot \frac{\nu^*}{\rho^*}$ в точке (ν^*, ρ^*) , где индекс * соответствует значению величины в некоторой исследуемой точке).

Существование оврага связано с видом вискозиметрического уравнения (1), где плотность входит только в *торцевые слагаемые* L_2 в функции трения и не содержится в L_1 (2), отражающем роль сил трения на боковых поверхностях вискозиметра. В случае только одного торцевого слагаемого ρ'_ν увеличивается приблизительно в два раза, и несколько увеличивается чувствительность оцениваемых характери-

стик ν'_x и ρ'_x к измеряемым величинам x . Здесь $\nu'_x = \frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{\partial \nu}{\partial x} \cdot \frac{x^*}{\nu^*}$; $x = \tau, \tau_0, \delta, M, R$ или K и

$$\rho'_x = \nu'_x \cdot \rho'_\nu. \quad (4)$$

Проанализируем изменение чувствительности ρ'_ν в зависимости от изменения параметров установки и колебаний. Очевидно, что значение ρ'_ν зависит в значительной степени от отношения H/R , а при варьировании параметрами τ_0 и K наблюдается слабый поворот дна оврага.

Для наглядности изобразим графически (рис. 2) поворот оси оврага в зависимости от различных отношений вклада от торцевых и боковых поверхностей в суммарный момент сил трения.

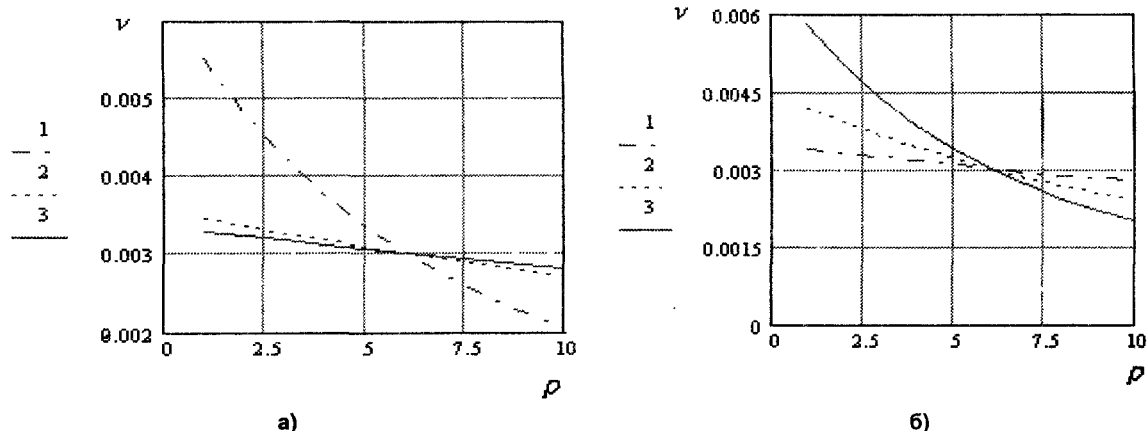


Рис. 2. Зависимость положения оси оврага от параметров установки: а) от массы: 1 – $M = 50$; 2 – $M = 100$; 3 – $M = 160$; б) от радиуса: 1 – $R = 0,7$; 2 – $R = 1$; 3 – $R = 1,3$; $\rho = 6$; $\nu = 0,003$; $\tau_0 = 5$; $K = 120$ (значения параметров здесь и ниже приведены в СГС)

Пределы изменения параметров $M, R, K, \tau_0, \delta_0, \rho, \nu$ в настоящей работе были приняты следующими:

- 1) M выбирается из условия: $2H \sim (1...10) \cdot R$;
- 2) $R \sim 0.5...1.5$ см;
- 3) $K \sim 20...200$ г·см²;
- 4) $\tau_0 \sim 1...10$ с;
- 5) $\delta_0 \sim 0.001...0.004$;
- 6) $\rho \sim 1...20$ г/см³;
- 7) $\nu \sim 0.001...0.05$ ст.

Ошибки оцениваемых параметров свяжем с ошибками измеряемых в эксперименте величин с помощью соотношения, имеющего, например, для вязкости, вид

$$delv = \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \overline{\Delta \tau} + \frac{\partial v}{\partial \tau_0} \cdot \overline{\Delta \tau_0} + \frac{\partial v}{\partial \delta} \cdot \overline{\Delta \delta} + \frac{\partial v}{\partial K} \cdot \overline{\Delta K} + \frac{\partial v}{\partial M} \cdot \overline{\Delta M} + \frac{\partial v}{\partial R} \cdot \overline{\Delta R}, \tag{5}$$

где $\overline{\Delta x}$ – относительная точность измерения какого-либо параметра. Для расчетов принимаем точность измеряемых коэффициентов, обычно реализуемую в экспериментах: $\overline{\Delta \tau} = 0.0001$, $\overline{\Delta \tau_0} = 0.0001$, $\overline{\Delta \delta} = 0.001$, $\overline{\Delta K} = 0.01$, $\overline{\Delta M} = 0.001$, $\overline{\Delta R} = 0.01$.

При существенном изменении значения производной $v'_x \cdot \overline{\Delta x}$ (например, на 1 %) происходит заметный сдвиг оврага и, следовательно, минимума функции качества, соответствующего оцениваемым вязкости и плотности. На рис. 3 проиллюстрировано данное смещение на примере ошибки в измерении K . Здесь овраг 1 соответствует $K = 150$ (истинному значению), 2 – $K = 152$, 3 – $K = 154$; $\rho = 6$, $\nu = 0.003$, $M = 50$, $R = 1$, $\tau_0 = 5$.

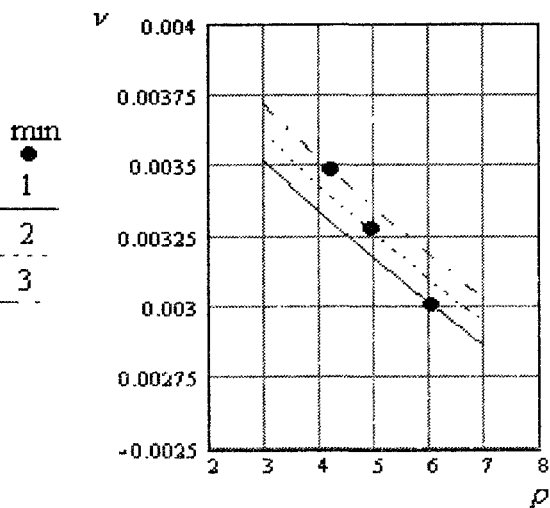


Рис. 3. Смещение оврага в результате ошибки измеряемых параметров

Изучение пределов изменения чувствительности вязкости и плотности для практически реализуемой выборки параметров показало, что чувствительность плотности к вязкости ρ'_v изменялась в среднем в пределах от 1 до 100, и в связи с этим изменялись значения ρ'_x (4).

Результаты расчетов v'_x для двух торцевых поверхностей приведены в таблице. Значения чувствительности по периоду колебаний τ в пределах 1 % совпадают со значениями чувствительности по τ_0 , и поэтому этот параметр отдельно не рассматривается.

Чувствительность вязкости к измеряемым в эксперименте параметрам

$\overline{\frac{\partial v}{\partial \rho}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial \delta}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial K}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial M}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial R}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial \tau_0}}$
Интервал изменения	менее 1	2–2.5	1.5–2.5	2–3.5	до 1000

Обратим внимание на те *параметры*, которые имеют самую *низкую точность измерений*. Это, прежде всего, момент инерции K и радиус тигля R , точность измерения которых не превышает 1 %. Из таблицы видно, что максимальная ошибка в определении вязкости, вносимая данными параметрами может достигать 4–6 %. Отклонение остальных параметров (исключая пока из рассмотрения τ и τ_0) не оказывает существенного влияния на точность оценивания вязкости и плотности.

Из анализа функций качества, построенных только по *действительной* или только по *мнимой частям* вискозиметрического уравнения (1), т.е.

$$f_1(v, \rho, \tau, \delta) = |\operatorname{Re}(F)| \quad \text{и} \quad f_2(v, \rho, \tau, \delta) = |\operatorname{Im}(F)|, \quad (6)$$

установлено, что чувствительности вязкости к измеряемым в эксперименте параметрам, рассчитанные через функции (6) различны на несущественную величину, кроме чувствительности к периодам τ и τ_0 , которая может быть в сотни раз выше для мнимой части по сравнению с действительной. При определении из вискозиметрической функции (1) только вязкости среды требуется одно уравнение (из двух (6)), наиболее подходящее для этой цели в конкретной задаче, а при оценке двух параметров его необходимо дополнить вторым соотношением (например, в [4] проводится совместное решение для f_1 и f_2 (6)).

Разработка методов одновременного определения вязкости и плотности ньютоновской среды. Рассмотрим *методы*, которые можно предложить, исходя из результатов проведенного анализа, для *решения задачи одновременного определения вязкости и плотности*.

1. Пусть мы решаем задачу, *аналогичную* рассмотренной в работе [4], т.е., учитывая отклонение от истинных значений только периода и декремента затухания колебаний, определяем области одновременной оценки вязкости и плотности при ошибке менее 1 %.

Учтем тот факт, что нахождение свойств среды из действительной части вискозиметрического уравнения представляет собой определение по «декременту затухания», а из мнимой части – «по периоду колебаний» (иначе говоря, v'_τ принимает высокие значения только при расчете через f_2 (6)). Если выбрать две экспериментальные точки, соответствующие различным наборам параметров $M, R, K, \tau_0, \delta_0, \rho, v$ и провести расчет *только по действительным частям* уравнений, то можно получить соответствующие решения с ошибкой менее 0,1 % и по вязкости, и по плотности. Достаточно простым для практической реализации представляется выбор точек с различными значениями масс или периодов τ_0 . Лучший поворот оси оврага, исходя из анализа чувствительности, обеспечивается вариацией массы, поэтому остановимся именно на этом варианте.

Рассмотрим планирование данного вискозиметрического эксперимента в терминах теории чувствительности. На множестве всех допустимых выборок измерений определим точки, минимальное число которых (а именно, 2) обеспечивает однозначное, устойчивое и надежное решение рассматриваемой задачи. Воспользуемся условием (см., например, [6])

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \delta^1}{\partial \rho} & \frac{\partial \delta^1}{\partial v} \\ \frac{\partial \delta^2}{\partial \rho} & \frac{\partial \delta^2}{\partial v} \end{array} \right| \rightarrow \max, \quad (7)$$

т.е. $\left| \frac{\partial \delta^1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \delta^2}{\partial \rho} - \frac{\partial \delta^1}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \delta^2}{\partial v} \right| \rightarrow \max$, где ^{1,2} – номера измерений.

Таким образом, оси оврага должны расходиться на *максимально возможную величину*, что также подтверждается и качественным анализом. Так, если массы принимают *минимально воз-*

возможные значения (т.е. когда сильнее влияние торцевых поверхностей), тогда оси оврага находятся близко друг к другу, дно оврага становится шире, и большая поверхность $f(v, \rho)$ имеет значения, близкие по порядку к минимальному. Подобная ситуация возникает и в случаях:

1) использования при расчетах действительной и мнимой частей функции качества для одной экспериментальной точки;

2) непрерывного изменения массы, т.е. построения функций вида $\tau = \tau(M)$, $\delta = \delta(M)$. Здесь, к тому же, существует большая возможность накопления ошибок измерения массы, периодов τ , τ_0 и декремента.

При использовании значений *масс*, различных на максимально возможную величину, средняя чувствительность ρ'_v будет больше, и ошибка в определении ρ будет сильнее превосходить ошибку в определении v . Но в связи с тем, что оценивание ρ при максимально различных массах осуществляется со значительно большей точностью, ошибка в значении плотности здесь будет ниже ошибки при расчете по близким значениям масс.

2. Теперь учтем зависимость ошибок оцениваемых параметров от ошибок всех измеряемых в эксперименте величин, т.е. воспользуемся формулой (4). Напомним, что в большей степени ошибки в одновременном измерении ρ и v связаны с ошибками в опытных значениях параметров установки: момента инерции K и радиуса тигля R , а $v'_{\tau_0} \cong v'_{\tau}$. В связи с этим кривые, определяющие 1%-ную границу в [4], описывают границу в среднем до 5 % при измерении v и до $5 \cdot \rho'_v$ (т.е. до нескольких сотен) % при оценке ρ .

Учтем, что в экспериментальных значениях характеристик колебаний заключены некие эффективные значения радиуса и момента K . Достаточно очевидным в данном направлении представляется метод, основанный на определении 4-х параметров (v, ρ, R, K) из нескольких действительных частей вискозиметрических уравнений, построенных для различных экспериментальных точек ($\tau, \tau_0, \delta, \delta_0, M$) с одинаковым набором (R, K).

Выбор точек осуществим как в терминах матрицы Якоби, так и путем численного анализа поведения функций чувствительности для различных выборок измеряемых параметров. Математическое моделирование вискозиметрического эксперимента для ньютоновской жидкости показало, что использование комплекса параметров с максимально возможно различными массами и периодами τ_0 (т.е. четыре точки с M_{\min}, M_{\max} при $\tau_{0\min}$ и M_{\min}, M_{\max} при $\tau_{0\max}$) позволяет решить данную задачу оптимально в виду поворота оврага в различных плоскостях пространства (v, ρ, R, K).

Теперь обратимся к численной реализации указанных выше алгоритмов. Функция качества $Z(v, \rho, R, K) = \sum_j [\text{Re}(F_j)]$ (индекс j соответствует номеру экспериментальной точки) имеет че-

тырехмерный овраг в пространстве (v, ρ, R, K), и поэтому особое внимание следует обратить на разработку методов минимизации, приемлемых для данной овражной функции. Оптимальное значение функции $Z(v, \rho, R, K)$ при решении настоящих задач определялось путем комбинированного поиска на основе метода конфигураций Хука–Дживса, предусматривающего локальное изучение поверхности отклика с помощью пробных шагов и ускоренное движение вдоль оси оврага, а также метода случайного поиска и метода исключения областей, в частности, сеточного метода поиска.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе на основе детального анализа в терминах теории чувствительности и оптимального планирования эксперимента разработаны методы одновременного определения вязкости и плотности из вискозиметрического уравнения Швидковского Е.Г., позволяющие при имеющейся точности измерений сделать несущественными ошибки в измерениях:

1) периода (приводящие к ошибкам в значениях вязкости в несколько десятков и в значениях плотности в несколько сотен процентов);

2) момента инерции подвесной системы без жидкости и радиуса тигля (приводящие к ошибкам при определении плотности в отдельных областях до нескольких сотен процентов).

Повторим еще раз, что в общем случае определение неизвестных параметров должно проводиться по действительным частям вискозиметрических уравнений, построенных для четырех точек $(K, R, \tau_{0\min}, \delta_0, M_{\min} \rightarrow \tau_1, \delta_1)$, $(K, R, \tau_{0\max}, \delta_0, M_{\min} \rightarrow \tau_2, \delta_2)$, $(K, R, \tau_{0\min}, \delta_0, M_{\max} \rightarrow \tau_3, \delta_3)$ и $(K, R, \tau_{0\max}, \delta_0, M_{\max} \rightarrow \tau_4, \delta_4)$, совместно с определением характеристик вискозиметра R и K .

Разработанная теория позволяет провести *проверку внутренней согласованности вискозиметрических данных* и дает возможность судить *о корректности выполненных экспериментов* как в отношении непротиворечивости исходных данных, так и об адекватности применения вискозиметрической теории к реализуемым в эксперименте условиям. Данные методы позволяют надежно, эффективно и устойчиво *оценивать неизвестные свойства* ньютоновских сред одновременно *в самостоятельном эксперименте* без проведения дополнительных исследований по измерению плотности жидкости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (№ 01-01-96424) и программы поддержки научного творчества молодежи в вузах Челябинской области.

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
2. Островский О.И., Григорян В.А. О структурных превращениях в металлических расплавах // *Известия вузов. Черная металлургия*. – 1985. – № 5. – С. 1–12.
3. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Уткин Е.А., Щека А.И. Моделирование экспериментов по измерению вязкости методом Швидковского // *Расплавы*. – 1990. – № 2. – С. 57–64.
4. Nieuwoudt J.C., Sengers J.V., Kestin J. On the theory of oscillating-cup viscometers / *Physica*. – 1988. – 149A. – P. 107–122.
5. Yelyukhina I.V., Toropov E.V. Estimation of heat and mass transfer coefficient by parametric identification methods // *Mater. of Internat. seminar «Modelling, advanced process technology, expert and control system of heat and mass transfer phenomena»*. – Ekaterinburg, 1996.
6. Елюхин В.А., Холпанов Л.П. Статистическое оценивание параметров в задачах идентификации // *Теорет. основы хим. технологии*. – 1990. – Т. 24, № 6. – С.784–793.