

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ БИОФИЗИКИ

В.И. Заляпин, В.А. Кривошапов

Рассматривается проблема восстановления динамики поступления радионуклидов по результатам прижизненного измерения содержания ^{90}Sr в эмали передних зубов. Хорошо известное биофизикам соотношение, связывающее измерения поверхностной β -активности эмали передних постоянных зубов с характеристиками процесса обмена ^{90}Sr , сведено к системе нелинейных интегральных уравнений. Основным методом исследования последней – численная процедура нелинейной регуляризации с использованием априорной информации об отыскиваемых решениях.

Введение

Процесс наращивания производства плутония на ПО «Маяк», а также отсутствие надежных технологий переработки и хранения радиоактивных отходов привели к тому, что с 1949 г. часть сточных вод, содержащих радиоактивные вещества, удалялась в реку Теча, причем до июля 1951 г. сбросы были практически бесконтрольными. Это привело к сильному радиоактивному загрязнению речной системы (воды, донных отложений, пойменных почв), а жители прибрежных населенных пунктов подверглись как внешнему (за счет повышенного вблизи реки гамма фона), так и внутреннему облучению от смеси радионуклидов, поступающих в организм с водой и продуктами питания местного производства [1].

Жидкие радиоактивные отходы, удаляемые в реку Теча, представляли собой смесь радионуклидов стронция ($^{89,90}\text{Sr}$), цезия (^{137}Cs), ниобия (^{95}Nb), рутения ($^{103,106}\text{Ru}$), циркония (^{95}Zr) и изотопов редкоземельных элементов. Причем около 25 % суммарной активности приходилось на долю долгоживущих радионуклидов: ^{90}Sr и ^{137}Cs (период полураспада около 30 лет). Сбрасываемые с отходами радиоактивные элементы частично оседали на дне водоема, сорбировались донными отложениями и поглощались биомассой водных растений. Вследствие этих процессов основная активность задержалась в верхнем участке реки, а концентрация радионуклидов резко уменьшалась с увеличением расстояния от места сброса. После прекращения сброса жидких отходов и распада сравнительно короткоживущих радионуклидов основным компонентом радиоактивного загрязнения речной воды стали ^{90}Sr и ^{137}Cs . Цезий-137 достаточно быстро выводится из организма после прекращения поступления (период полувыведения около 100 суток). ^{90}Sr , напротив, прочно фиксируется в кальцифицированных тканях (кости, зубы) и продолжает облучать прилежащие ткани (красный костный мозг и костные поверхности) многие годы после прекращения поступления. Таким образом, основной вклад в дозу внутреннего облучения вносит ^{90}Sr . Знание уровней и динамики его поступления, позволяет рассчитать накопленную дозу облучения от стронция-90 на органы и ткани.

Как уже отмечалось, стронций-90 аккумулируется в костной ткани и тканях зуба, в том числе эмали, являющейся наиболее минерализованной частью скелета. Передние зубы (первые резцы) формируются достаточно быстро в период от 6 месяцев до 2 лет, а выведение ^{90}Sr из эмали происходит чрезвычайно медленно, со скоростью незначительно превышающей скорость радиоактивного распада (около 2,5 % в год).

Поэтому для восстановления динамики его поступления можно попробовать использовать результаты прижизненного измерения содержания ^{90}Sr в эмали передних зубов у лиц, проживавших весь период сбросов на загрязненной территории, и где река была основным источником питьевой воды.

Идея использовать для восстановления динамики поступления многочисленные (более 1000) измерения зубного детектора, выполненные в период 1960–1965 для людей различного возраста в населенном пункте Муслюмово, принадлежит Расину И.М. (1970 г.) [2]. Однако, полученное им решение не соответствует результатам прижизненных измерений содержания ^{90}Sr в организме, полученных после создания счетчика излучений человека – СИЧ-9.1 [3], начиная с 1974 г. В 1985 году эта обратная задача была вновь сформулирована и решена Кожеуровым В.П. [4], абсолютные уровни поступления были определены, исходя из результатов измерений СИЧ-9.1 и модели метаболизма стронция для взрослых (ICRP 20,1973). Это решение также обладало значительными недостатками.

В последние годы в УНПЦ РМ была проведена ревизия данных измерений зубного детектора. Были пересмотрены и некоторые биологические параметры, используемые при решении обратной задачи. Вследствие этого возникла необходимость провести переоценку функции поступления ^{90}Sr на основе измерений зубного детектора, не меняя радикально методологические подходы к расчетам функции поступления

Восстановление динамики поступления ^{90}Sr в организм человека на основе измерений¹ $Y(T)$ –поверхностной β -активности эмали передних постоянных зубов, использует известную [5] связь между показаниями счетчика β -частиц и характеристиками процесса обмена ^{90}Sr :

$$Y(T) = \beta \int_{t_{\text{нач}}}^n \alpha(t-T, t) x(t) k(t-T) R(t-T, t_n - t) dt, \quad T_{\text{мин}} \leq T \leq T_{\text{макс}}. \quad (1)$$

Здесь β – масштабный коэффициент (количество отсчетов, приходящееся на единицу активности в зубах), $\alpha(t-T, t)$ – отношение поступления ^{90}Sr детям к поступлению взрослым; $x(t)$ – скорость поступления ^{90}Sr в момент времени t ; $k(t-T)$ – коэффициент перехода ^{90}Sr из желудочно-кишечного тракта в эмаль передних постоянных зубов; $R(t-T, t_n - t)$ – функция удержания, т.е. доля ^{90}Sr в эмали передних постоянных зубов по истечении некоторого времени после однократного поступления; t_n – момент измерения активности эмали зубов (в используемой базе данных $t_n = 1968$); $t_{\text{нач}}$ – момент начала поступления ^{90}Sr в организм.

Определению подлежат функции $x(t)$ и $k(\tau)$, описывающие динамику поступления ^{90}Sr в организм человека.

Отметим, что относительно основных параметров соотношения (1) известно следующее:

$$t_{\text{нач}} = \begin{cases} 1950, & T \leq 1950; \\ T, & T > 1950. \end{cases}$$

$$R(\tau, \Delta t) = \begin{cases} e^{-\lambda \Delta t}, & \Delta t > 0 \\ 0, & \Delta t \leq 0, \end{cases}$$

где λ – постоянная распада, для которой принято значение $\lambda = 0.025 \frac{1}{\text{год}}$.

Функция $\alpha(t-T, t)$ оценивалась экспертным путем и имеет вид, приведенный на рис. 1.

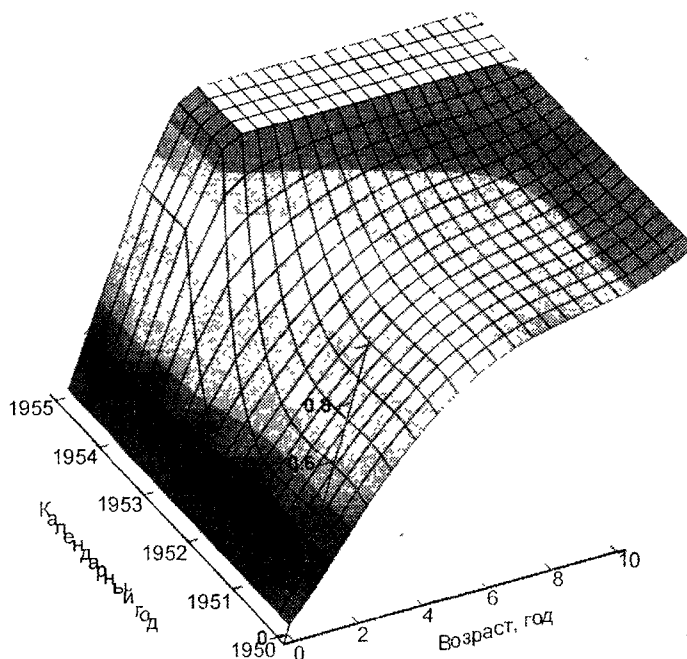


Рис. 1. Рельеф поверхности $\alpha(t-T, t)$

¹ С 1959 года в Уральском научно-практическом центре радиационной медицины проводились измерения β -активности эмали передних зубов с использованием счетчика Гейгера–Мюллера. За весь период наблюдений (с 1959 по 1998 г.) было получено свыше 32 000 измерений для более чем 16 000 человек. Нами были использованы результаты измерений зубного детектора для жителей села Муслюмово, постоянно проживавших в указанном населенном пункте в период массовых сбросов.

1. Анализ основного интегрального соотношения

Область **D** изменения переменных в соотношении (1) описывается множеством точек (t, T) (рис. 2а) таких, что

$$D = \{(t, T): T \leq t \leq t_n, 1950 \leq T \leq T_{max}, 1950 \leq t \leq t_n, T_{min} \leq T \leq 1950\}.$$

Сменим начало отсчета, положив $t = t - 1950$ и $T = T - 1950$ (т.е. примем 1950 год за нулевой) и сделаем в интеграле (1) замену переменной интегрирования, приняв $t = t - T$. Для начального T_{min} и конечного T_{max} моментов рождения сохраним следующие обозначения:

$$T_{min} = T_{min} - 1950 = -T_{min}, T_{max} = T_{max} - 1950 = T_{max}.$$

Уравнение (1) примет вид

$$Y(T, t_n) = \beta \int_0^{t_n} \alpha(t - T, t) x(t) k(t - T) R(t - T, t_n - t) dt, \quad -T_{min} \leq T \leq 0; \quad (2)$$

$$Y(T, t_n) = \beta \int_T^{t_n} \alpha(t - T, t) x(t) k(t - T) R(t - T, t_n - t) dt, \quad 0 \leq T \leq T_{max}. \quad (2')$$

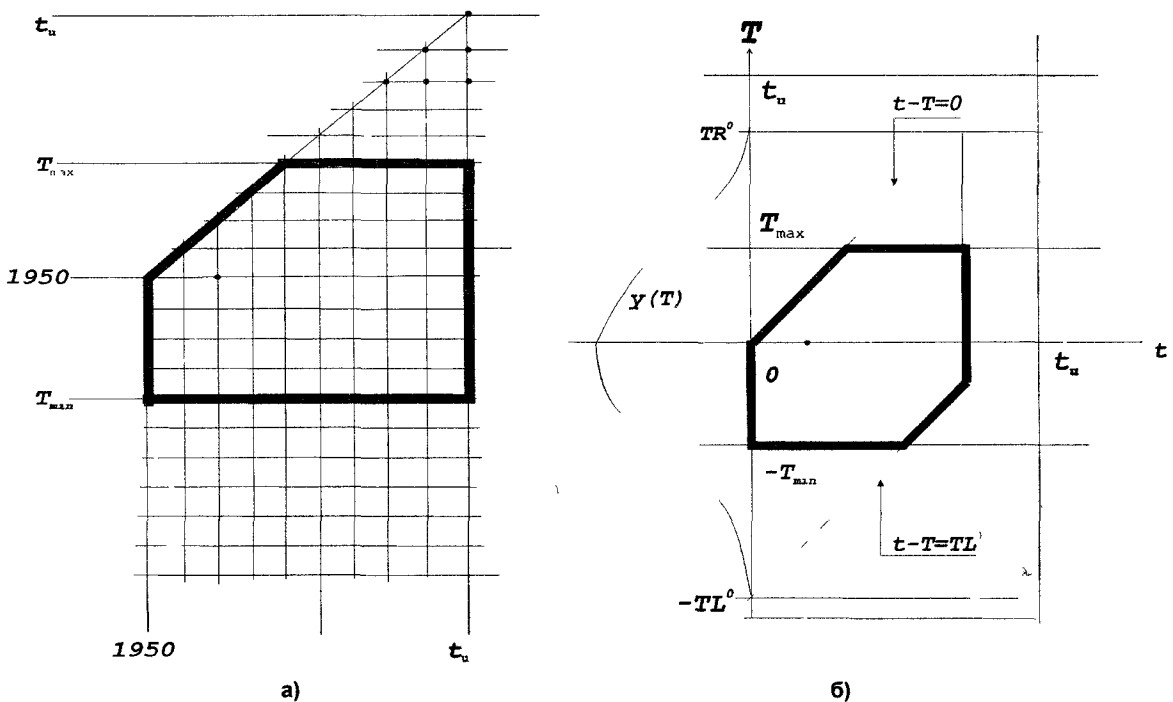


Рис. 2. Область изменения переменных

Известно [5], что функция экспериментальных наблюдений $Y(T, t_n)$ характеризуется быстрым убыванием при $T \rightarrow \pm\infty$ (рис. 3). Это позволяет указать такие два момента времени $-TL^0 > -\infty$ и $TR^0 \leq t_n$ – правый и левый соответственно, что

$$Y(T, t_n) = 0 \quad \forall T: T < -TL^0 \cap T > TR^0.$$

Но в силу неотрицательности подынтегральных функций в уравнениях (2) и убывания функции $Y(T, t_n)$ это влечет

$$x(t) = 0, \forall t: t \geq TR^0, k(\tau) = 0, \forall \tau \leq -TL^0.$$

Поэтому фактически интегрирование в уравнениях (2) осуществляется от 0 и до $\min\{TR^0, T + TL^0\}$ в первом и от T и до $\min\{TR^0, T + TL^0\}$ – во втором уравнении (рис. 2б).

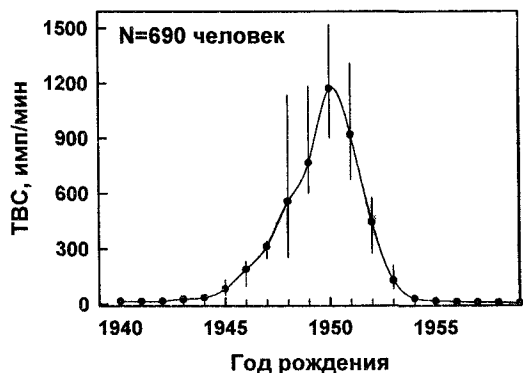


Рис. 3. Динамика изменения функции $Y(T)$

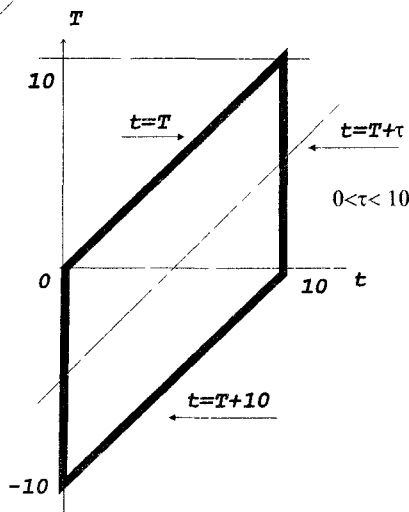


Рис. 4. Фактическая область изменения переменных

Имеющиеся экспериментальные данные таковы, что с учетом принятой оценки точности измерений значений функции $Y(T, t_n)$, можно считать $T_{\min} = TL^0 = 10$, $T_{\max} = TR^0 = 10$. Поэтому фактически область изменения переменных (t, T) описывается соотношениями (рис. 4):

$$D = \{(t, T): T \leq t \leq 10; 0 \leq T \leq 10; 0 \leq t \leq T + 10; -10 \leq T \leq 0\}.$$

Уравнения (2) принимают вид

$$Y(T, t_n) = \begin{cases} \beta \int_0^{T+10} \alpha(t-T, t)x(t)k(t-T)R(t-T, t_n - t)dt, & -10 \leq T \leq 0; \\ \beta \int_T^{10} \alpha(t-T, t)x(t)k(t-T)R(t-T, t_n - t)dt, & 0 \leq T \leq 10. \end{cases} \quad (3)$$

Для дальнейшего нам будет удобно использовать другую форму записи этих уравнений.

Во-первых, напомним, что в силу принятых допущений,

$$R(t, \Delta t) = R(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}.$$

В первом из уравнений (3) введем новую переменную U , положив $T + 10 = U$. Поскольку $-10 \leq T \leq 0$, то $0 \leq U \leq 10$. Уравнение примет вид

$$y(U - 10) = \beta \int_0^U \alpha(t - U + 10, t)x(t)k(t - U + 10)e^{-\lambda(t_n - t)}dt, \quad 0 \leq U \leq 10.$$

Во втором уравнении заменим переменную интегрирования, положив $t = t - T$. Обозначая $10 - T = V$, приходим к уравнению

$$y(10 - V) = \beta \int_0^V \alpha(t, t - V + 10)x(t - V + 10)k(t)e^{-\lambda(t_n - t + V - 10)}dt, \quad 0 \leq V \leq 10.$$

Уравнения (3) теперь принимают вид

$$y(U - 10) = \beta \int_0^U \alpha(t - U + 10, t)x(t)k(t - U + 10)e^{-\lambda(t_n - t)}dt, \quad 0 \leq U \leq 10; \quad (4)$$

$$y(10 - V) = \beta \int_0^V \alpha(t, t - V + 10)x(t - V + 10)k(t)e^{-\lambda(t_n - t + V - 10)}dt, \quad 0 \leq V \leq 10. \quad (4')$$

Введем следующие обозначения

$$e^{\lambda t_n} \cdot y(U - 10) = \varphi(U), \quad e^{\lambda t_n} \cdot y(10 - V) = \phi(V), \quad e^{\lambda t_n} \cdot x(t) = z(t).$$

В этих обозначениях предыдущие уравнения запишутся в форме

$$\varphi(U) = \beta \int_0^U \alpha(t - U + 10, t)k(t - U + 10)z(t)dt, \quad 0 \leq U \leq 10; \quad (5)$$

$$\phi(V) = \beta \int_0^V \alpha(t, t - V + 10)k(t)z(t - V + 10)dt, \quad 0 \leq V \leq 10. \quad (5')$$

каковую и будем считать окончательной.

2. Постановка задачи

Суммируя вышеизложенное, отметим, что задача состоит в определении из системы интегральных уравнений (5)–(5') неизвестных функций $z(t)$, $k(t)$, $0 \leq t \leq 10$ и неизвестной постоянной β .

Если предположить, что у такой задачи есть, по крайней мере, одно решение, то очевидно что для любых ненулевых постоянных c_1, c_2 набор $z_1 = c_1 \cdot z(t), k_1 = c_2 \cdot k(t), \beta_1 = \frac{1}{c_1 \cdot c_2} \cdot \beta$ также

будет решением.

С целью устранения отмеченной неоднозначности потребуем чтобы дополнительно выполнялось $\beta \cdot k(0) = 1$ и положив $k(t) = \frac{k(t)}{k(0)}$, придем к системе:

$$\varphi(U) = \int_0^U \alpha(t-U+10, t) k(t-U+10) z(t) dt, \quad 0 \leq U \leq 10; \tag{6}$$

$$\phi(V) = \int_0^V \alpha(t, t-V+10) k(t) z(t-V+10) dt, \quad 0 \leq V \leq 10; \tag{6'}$$

$$k(0) = 1,$$

задача решения которой и есть основная задача настоящей работы.

3. Линеаризация

Введем в рассмотрение операторную форму записи задачи (6)–(6'):

$$Af = \Phi, \tag{7}$$

где $f = \begin{bmatrix} k(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ – векторная функция неизвестных; $\Phi = \begin{bmatrix} \varphi(U) \\ \phi(U) \end{bmatrix}$ – вектор правых частей системы

(6); $A = \begin{bmatrix} A_1(f) \\ A_2(f) \end{bmatrix}$ – нелинейный интегральный оператор.

Для решения задачи (7) применим итерационный метод Ньютона–Канторовича, позволяющий линеаризовать рассматриваемую задачу в окрестности некоторого начального приближения

$$f_0 = \begin{bmatrix} k_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Подробнее, полагая

$$f = f_0 + \Delta f,$$

перейдем от нелинейного уравнения (7) относительно f к линейному уравнению относительно поправки Δf :

$$A'(f_0)\Delta f = -A(f_0) + \Phi. \tag{8}$$

Здесь $A'(f_0)$ – линейный оператор (производная оператора A). Фактически в рассматриваемой ситуации уравнение (8) представляет собой систему двух линейных интегральных уравнений относительно компонент $(\Delta k, \Delta z)$ векторной поправки Δf :

$$\begin{aligned} & \int_0^U \alpha(t-U+10, t) \Delta k(t-U+10) z_0(t) dt + \int_0^U \alpha(t-U+10, t) k_0(t-U+10) \Delta z(t) dt = \\ & = \varphi(U) - \int_0^U \alpha(t-U+10, t) k_0(t-U+10) z_0(t) dt; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^V \alpha(t, t-V+10) \Delta k(t) z_0(t-V+10) dt + \int_0^V \alpha(t, t-V+10) k_0(t) \Delta z(t-V+10) dt = \\ & = \phi(V) - \int_0^V \alpha(t, t-V+10) k_0(t) z_0(t-V+10) dt; \end{aligned} \tag{9'}$$

$$\Delta k(0) = 0. \tag{9''}$$

Процедура решения системы (6)–(7) представляет собой итерационный процесс, начинающийся в некоторой начальной точке f_0 и реализуемый в соответствии с правилом $f_{N+1} = f_N + \Delta f$. Поправка Δf определяется на каждом шаге процедуры как решение линейной системы (9)–(9')–(9'').

4. Решение системы (9)–(9')–(9''). Регуляризация

Известно [6], что система (9) неустойчива по отношению к погрешностям задания правых частей и задача ее решения является некорректно поставленной по Тихонову А.Н. задачей.

Для ее решения используем процедуру регуляризации, заменив задачу решения системы (9) задачей минимизации [7] сглаживающего функционала

$$M^\alpha(\Delta f) = \|A' \Delta f + A - \Phi\|^2 + \alpha \cdot \Omega(\Delta f), \tag{10}$$

где $\|\bullet\|^2 - L^2$ -отклонение левых частей системы (9) от правых; Ω – стабилизатор первого порядка, задаваемый соотношением

$$\Omega(\Delta f) = \int_0^{10} [(\Delta k)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta k)'^2 + (\Delta z)'^2] dt,$$

α – параметр регуляризации, который должен быть определен из уравнения

$$\|A' \Delta f_\alpha + A - \Phi\|^2 = \delta^2. \tag{10'}$$

В последнем соотношении Δf_α – решение задачи (10) как функция параметра регуляризации; $\delta - L^2$ -точность задания правой части уравнения (8)–(9).

5. Основные расчетные соотношения

Численная процедура регуляризации (т.е. решение задачи минимизации функционала (10)) уравнения (9)–(9') на каждом шаге (N) итерационного процесса осуществлялась параллельно методом Хука–Дживса и методом Ритца, основанном на дискретизации задачи кусочно-линейными функциями с использованием локального базиса Лагранжа на промежутке $[0, 10]$.

Подробнее, зададим на промежутке $0 \leq t \leq 10$ сетку $(t_i, i = 0, 1, \dots, n)$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 10$ и определим $\Lambda_i(t)$ – кусочно-линейные функции, принимающие в узле с номером i значение 1, во всех прочих узлах – значение 0. Функции $\Lambda_i(t), i = 0, 1, \dots, n$ линейно независимы и образуют базис (базис Лагранжа) в пространстве кусочно-линейных функций на заданной сетке.

Положим

$$\Delta k(t) = \sum_0^n x_i \Lambda_i(t), \Delta z(t) = \sum_1^n y_i \Lambda_i(t).$$

Заметим, что при подобной дискретизации коэффициенты $x = (x_i), y = (y_i)$ представляют собой просто значение искомых функций в узлах сетки.

Функционал (10), скалярная форма которого

$$\begin{aligned} M^\alpha(\Delta k, \Delta z) = & \\ = & \int_0^{10} \int_0^U \{ \alpha(t-U+10) [\Delta k(t-U+10)z_0(t) + k_0(t-U+10)\Delta z(t) + k_0(t-U+10)z_0(t)] dt - \phi(U) \}^2 du + \\ & + \int_0^{10} \int_0^U \{ \alpha(t, t-U+10) [\Delta k(t)z_0(t-U+10) + k_0(t)\Delta z(t-U+10) + k_0(t)z_0(t-U+10)] dt - \phi(U) \}^2 du + \\ & + \alpha \cdot \int_0^{10} [(\Delta k)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta k)'^2 + (\Delta z)'^2] dU, \Delta k(0) = 0, \end{aligned}$$

становится квадратичной функцией относительно неизвестных (x, y)

$$M^\alpha(\Delta k, \Delta z) = M_n^\alpha(x, y) = Q_n^1(x, y) + Q_n^2(x, y) + \alpha \cdot \Omega_n(x, y). \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_n^1(x, y) &= \int_0^{10} [\sum_0^m m_i^1(U)x_i + \sum_1^n l_i^1(U)y_i + r^1(U)]^2 dU; \\ Q_n^2(x, y) &= \int_0^{10} [\sum_0^m m_i^2(U)x_i + \sum_1^n l_i^2(U)y_i + r^2(U)]^2 dU; \end{aligned}$$

$$\Omega_n(x, y) = \int_0^{10} [(\sum x_i \Lambda_i(U))^2 + (\sum y_i \Lambda_i(U))^2 + (\sum x_i \Lambda'_i)^2 + (\sum y_i \Lambda'_i)^2] dU;$$

$$m_i^1(U) = \int_0^U \alpha(t-U+10, t) z_0(t) \Lambda_i(t-U+10) dt, l_i^1(U) = \int_0^U \alpha(t-U+10, t) k_0(t-U+10) \Lambda_i(t) dt;$$

$$r^1(U) = \int_0^U \alpha(t-U+10, t) z_0(t) k_0(t-U+10) dt - \varphi(U).$$

Коэффициенты $m_i^2(U)$, $l_i^2(U)$ и $r^2(U)$ вычисляются аналогично.

Необходимые условия экстремума функции (11) по переменным $x_i, s=1, 2, \dots, n$; $y_j, j=0, 1, 2, \dots, n$, приводят к соотношениям:

$$\frac{\partial M_n^\alpha}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial M_n^\alpha}{\partial y_j} = 0.$$

Первые n из указанных соотношений дают:

$$\int_0^{10} [\sum m_i^1(U) x_i + \sum l_i^1(U) y_i + r^1(U)] \cdot m_i^1(U) dU + \int_0^{10} [\sum m_i^2(U) x_i + \sum l_i^2(U) y_i + r^2(U)] \cdot m_i^2(U) dU +$$

$$+ \alpha \cdot \int_0^{10} [\sum x_i \Lambda_i(U) \cdot \Lambda_i(U) + \sum x_i \Lambda'_i(U) \cdot \Lambda'_i(U)] dU = 0, \quad s=1, 2, \dots, n,$$

здесь суммирование по индексу i ведется от 1 до n (т.е. учтено, что $x_0 = 0$).

Остальные $(n+1)$ уравнение могут быть записаны в аналогичной форме

$$\int_0^{10} [\sum m_i^1(U) x_i + \sum l_i^1(U) y_i + r^1(U)] \cdot l_i^1(U) dU + \int_0^{10} [\sum m_i^2(U) x_i + \sum l_i^2(U) y_i + r^2(U)] \cdot l_i^2(U) dU +$$

$$+ \alpha \cdot \int_0^{10} [\sum y_j \Lambda_j(U) \cdot \Lambda_j(U) + \sum y_j \Lambda'_j(U) \cdot \Lambda'_j(U)] dU = 0, \quad s=0, 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, мы приходим к системе $(2n+1)$ линейных уравнений относительно неизвестных x, y , зависящих от параметра α :

$$\sum_{i=1}^n A_{vi}^1(\alpha) \cdot x_i + \sum_{i=0}^n A_{vi}^2 \cdot y_i = A_v^3, \quad s=1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^n B_{vi}^1 \cdot x_i + \sum_{i=0}^n B_{vi}^2(\alpha) \cdot y_i = B_v^3, \quad s=0, 1, 2, \dots, n.$$

Коэффициенты этой системы даются соотношениями:

$$A_{vi}^1(\alpha) = \int_0^{10} [m_i^1(U) \cdot m_i^1(U) + m_i^2(U) \cdot m_i^2(U) + \alpha \cdot (\Lambda_i(U) \cdot \Lambda_i(U) + \Lambda'_i(U) \cdot \Lambda'_i(U))] dU;$$

$$A_{vi}^2 = \int_0^{10} [l_i^1(U) \cdot m_i^1(U) + l_i^2(U) \cdot m_i^2(U)] dU, \quad A_v^3 = - \int_0^{10} [r^1(U) \cdot m_i^1(U) + r^2(U) \cdot m_i^2(U)] dU;$$

$$B_{vi}^1 = \int_0^{10} [m_i^1(U) \cdot l_i^1(U) + m_i^2(U) \cdot l_i^2(U)] dU, \quad B_v^3 = - \int_0^{10} [r^1(U) \cdot l_i^1(U) + r^2(U) \cdot l_i^2(U)] dU;$$

$$B_{vi}^2(\alpha) = \int_0^{10} [l_i^1(U) \cdot l_i^1(U) + l_i^2(U) \cdot l_i^2(U) + \alpha \cdot (\Lambda_i(U) \cdot \Lambda_i(U) + \Lambda'_i(U) \cdot \Lambda'_i(U))] dU.$$

Решение интересующей нас задачи минимизации (11) – это решение системы (12), отвечающее значению параметра регуляризации α , определяемому из уравнения (10’):

$$Q_n^1(x(\alpha), y(\alpha)) + Q_n^2(x(\alpha), y(\alpha)) = \delta^2.$$

6. Результаты счета

Задача решалась на сетке 20×20 (шаг $\Delta t = 1/2$ года). Начальное приближение выбиралось исходя из эмпирических представлений о характере поступления. Восстановленная таким образом динамика поступления ^{90}Sr представлена на рис. 5.

Полученное решение достаточно хорошо описывает изучаемый процесс, при этом расчетное значение показаний счетчика β -частиц, получаемое при подстановке решения в исходный интеграл, хорошо согласуется с экспериментальными данными (рис. 6).

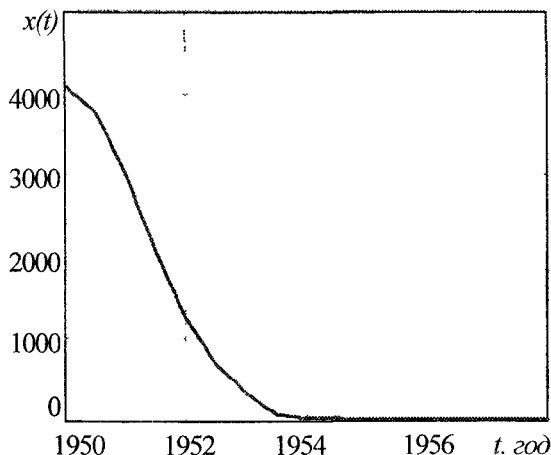


Рис. 5. Динамика поступления ^{90}Sr

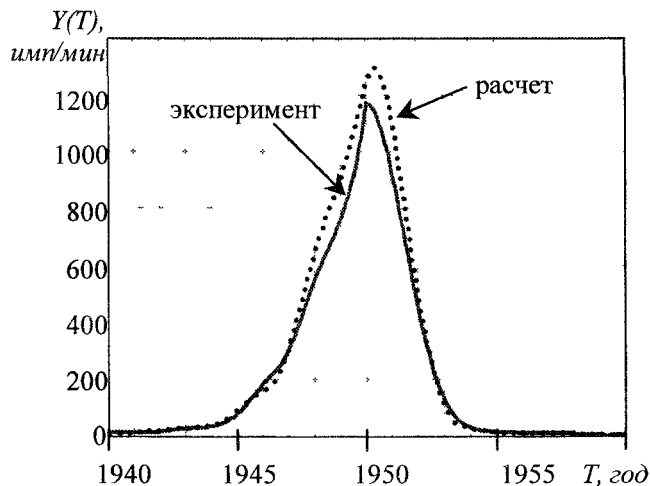


Рис. 6. Невязка

В заключение авторы приносят свою признательность коллективу лаборатории биофизики УНПЦ РМ за полезные и плодотворные обсуждения.

Работа была выполнена при финансовой поддержке Департамента по энергетике США и Федерального управления медико-биологических и экстремальных проблем при Министерстве здравоохранения РФ.

Литература

1. Медико-биологические и экологические последствия радиоактивного загрязнения реки Теча / Под ред. А.В. Аклеева, М.Ф. Киселева. – М.: Вторая типография ФУ «Медбиоекстрем», 2000.
2. Расин И.М. Кинетика накопления стронция-90 и формирование тканевых доз в растущем организме. Дисс. ... канд. биол. наук. – М.: ИБФ, 1970.
3. Белле Ю.С., Ковтун А.Н., Кожеуров В.П., Козловская Л.А., Коровин В.И., Лебедев О.В., Пантелеев Л.И., Злобин Л.И. Спектрометр излучений человека СИЧ-9.1, позволяющий измерять низкие содержания инкорпорированного стронция-90 // *Мед. радиология*. – 1975. – Т. 20. – Вып. 6. – С. 52–58.
4. Kozheurov V.P.; Degteva M.O. Dietary Intake Evaluation and Dosimetric Modeling for the Techa River Residents Based on in vivo Measurements of Strontium-90 in Teeth and Skeleton // *Sci. Tot. Environ.* – 142: 63–72; 1994.
5. Degteva M.O., Kozheurov V.P., Tolstykh E.I. et al. The Techa River Dosimetry System: Methods for the reconstruction of internal dose // *Health Phys.* – 2000. – V. 79, № 1 – P. 24–35.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
7. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М., Наука, 1978.