УДК 517.53

# МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ КАК КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА

*В.М. Адуков*

**В работе дается новое определение аппроксимации Паде для матричного степенного ряда, основанное на аналогии с процедурой построения канонической функции краевой задачей Римана для вектора. Показано, что задача аппроксимации Паде становиться после этого задачей факторизации Винера – Хопфа для блочно-треугольной матрицы-функции специального вида.**

## 1. Введение

Матричные аппроксимации Паде представляют большой интерес в связи с многочисленными применениями. Эти применения в основном относятся к теоретической физике [1], особенно к ядерной физике и физике элементарных частиц [2]; в математической теории систем задача минимальной частичной реализации эквивалентна задаче построения матричных аппроксимаций Паде в бесконечно удаленной точке [3]; в численном анализе матричные аппроксимации Паде используются для ускорения медленно сходящихся векторных и матричных последовательностей [4–6].

Формальный перенос классического определения аппроксимаций Паде по Фробениусу и определения Бейкера на матричный случай не представляет труда и был проделан в ряде работ [2], [7–10]. Некоммутативность умножения особых проблем не доставляет и приводит лишь к необходимости различать правые и левые аппроксимации Паде.

Классическое определение (правой) матричной аппроксимации Паде является калькой определения скалярной аппроксимации Паде по Фробениусу и выглядит следующим образом.

Пусть $a(z)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_i \in \mathbf{C}^{p\times q}$, – (формальный) степенной ряд с матричными коэффициентами. Здесь $\mathbf{C}^{p\times q}$ – множество всех комплексных матриц размером $p\times q$. *Правая матричная аппроксимация Паде* типа $(n,m)$ для $a(z)$ есть рациональная матрица-функция $\pi^R_{n,m}(z)=P^R_{n,m}(z)Q^R_{n,m}(z)^{-1}$ такая, что матричные многочлены $P^R_{n,m}(z)$, $Q^R_{n,m}(z)$ размером $p\times q$ и $q\times q$, соответственно, удовлетворяют следующим условиям:

1. $\deg P^R_{n,m}(z)\le n$, $\deg Q^R_{n,m}(z)\le m$;
2. $\det Q^R_{n,m}(z)\not\equiv 0$;
3. $a(z)Q^R_{n,m}(z)-P^R_{n,m}(z)=O(z^{n+m+1})$, $z\to 0$.

Если дополнительно выполняется условие Бейкера

4. $\det Q^R_{n,m}(0)\ne 0$,

то условие 3 может быть переписано в следующей эквивалентной форме:

3*. $a(z)-\pi^R_{n,m}(z)=O(z^{n+m+1})$, $z\to 0$.

Левая аппроксимация Паде $\pi^L_{n,m}(z)$ определяется аналогичным образом.

Принципиальным отличием от скалярного случая является то, что для $p\ne q$ классическая аппроксимация Паде (в смысле Фробениуса) не всегда существует, поскольку соответствующая однородная система для определения коэффициентов знаменателя $Q_{n,m}(z)$ может не иметь ненулевого решения. Если правая и левая аппроксимации Паде типа $(n,m)$ существуют, то, хотя многочлены $P^R_{n,m}(z)$, $Q^R_{n,m}(z)$ находятся, вообще говоря, неединственным образом, сами рациональные матрицы-функции $\pi^R_{n,m}(z)$, $\pi^l_{n,m}(z)$ единственны и совпадают.

Матричная аппроксимация Паде в смысле Бейкера может не существовать и в случае $p = q$. Необходимые и достаточные условия ее существования и единственности получены в работе [9] для квадратного и в [10, 11] для прямоугольного случаев.

В вышеприведенных работах при определении аппроксимации Паде использовалась только одна степень: степень матричного многочлена. Это означает, что все элементы числителя $P_{n,m}(z)$ и знаменателя $Q_{n,m}(z)$ рассматривались как скалярные многочлены одной и той же формальной степени $n$ или $m$, соответственно. Другой крайний случай, когда все элементы этих матриц имеют индивидуальную степень, осуществляется в определении совместных аппроксимаций Паде (см., например, [12]) и в определении совместных приближений нескольких линейных форм [13].

Разумный компромисс между этими двумя крайними случаями был предложен в работе А. Бултхила и М. ван Барела [14], в которой предлагалось фиксировать степени строк (или столбцов) матричных многочленов $P_{n,m}(z)$ и $Q_{n,m}(z)$. В ней подробно изучен матричный алгоритм Евклида для получения аппроксимаций Паде, расположенных на антидиагоналях таблицы Паде. Ранее этот алгоритм был предложен А. Антоласом [15]. Идея А. Бултхила и М. ван Барела использовать степени столбцов или строк $Q_{n,m}(z)$, причем выбирать их по возможности минимальным, будет применена и в этой работе.

Условие минимальности степени $Q_{n,m}(z)$ в скалярном случае использовалось автором в работе [16]. При этом оказалось, что задача скалярной аппроксимации Паде является частным случаем краевой задачи Римана для вектора с треугольной матрицей второго порядка.

Отметим еще один немаловажный факт. Для скалярных аппроксимаций Паде добавление к классическому определению условия минимальности степени знаменателя $Q_{n,m}(z)$ приводит к наиболее приемлемому определению, поскольку теперь аппроксимация Паде всегда существует, единственна, ее знаменатель определяется единственным образом с точностью до постоянного множителя. Ясно, что аппроксимация Паде в смысле нового определения является и классической. Кроме того, она автоматически удовлетворяет условию Бейкера, если только для аппроксимируемой функции существует аппроксимация Паде в смысле Бейкера. Такого хорошего определения в матричном случае пока нет.

В этой работе мы дадим более общее определение матричных аппроксимаций Паде, чем классическое. Возможно, что оно удовлетворяет всем вышеперечисленным условиям для хорошего определения. Пока это полностью не доказано. В нашем подходе матричные аппроксимации Паде определяются с помощью канонической системы решений некоторой задачи векторной аппроксимации, которая будет полным аналогом канонической системы краевой задачи Римана. Более того, формальная аналогия имеет на самом деле глубокие корни, поскольку далее мы покажем, что задача аппроксимации Паде является частным случаем краевой задачи Римана с матрицей блочно-треугольного вида (задачи факторизации Винера – Хопфа матриц-функций). Цель данной работы – получить этот результат.

Здесь мы не приводим никаких применений обнаруженной связи между аппроксимациями Паде и краевой задачей Римана. Отметим, однако, что метод, с помощью которого мы получим эту связь (метод существенных многочленов [17]), является одинаково эффективным как при явном построении факторизации Винера – Хопфа матриц-функций [18], так и при исследовании сходимости матричных [19] и скалярных [20] аппроксимаций Паде.

## 2. Задача векторной аппроксимации Паде и ее каноническая система

Если переписать условие 3 классического определения в виде

$$a(z)Q_{n,m}(z) = P_{n,m}(z)\left(\operatorname{mod} z^{n+m}\right),$$

где равенство по модулю $z^{n+m}$ означает совпадение коэффициентов при $1, z, \ldots, z^{n+m}$, то специалист в области краевых задач для аналитических функций сразу обнаружит формальную аналогию с однородной краевой задачей Римана (см., например, [21]). Таким образом, задачу нахождения пары многочленов $\left(P_{n,m}(z),Q_{n,m}(z)\right)$ можно рассматривать как некий конечномерный аналог однородной векторной краевой задачи Римана.

Пользуясь этой формальной аналогией, начнем с определения следующей векторной задачи аппроксимации.

**Определение 1.** *Пусть* $a(z)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i z^i$, $a_i\in\mathbf{C}^{p\times q}$, *матричный степенной ряд и* $n,m$ *– произвольные неотрицательные целые числа.*

*Задачей правой векторной аппроксимации типа* $(n,m)$ *для* $a(z)$ *назовем задачу отыскания пары векторных (столбцовых) многочленов* $P_{n,m}(z)\in\mathbf{C}^{p\times1}[\mathbf{z}]$ *и* $Q_{n,m}(z)\in\mathbf{C}^{q\times1}[\mathbf{z}]$, $Q_{n,m}(z)\not\equiv0$, *удовлетворяющих условиям*

$$\deg P_{n,m}(z)\le k,\quad \deg Q_{n,m}(z)\le k-n+m$$

*при некотором* $k$, $n-m\le k\le n+m$, *и таких, что*

$$a(z)Q_{n,m}(z)-P_{n,m}(z)=O(z^{n+m+1}),\quad z\to0. \tag{1}$$

*Число* $k$ *будем называть порядком решения* $\left(P_{n,m}(z),Q_{n,m}(z)\right)$ *этой задачи.*

Здесь, как обычно, мы считаем, что если степень многочлена отрицательна, то многочлен тождественно равен нулю. Ограничения, налагаемые на формальные степени векторных многочленов $P_{n,m}(z)$, $Q_{n,m}(z)$, выбраны таким образом, чтобы при нахождении многочлена $Q_{n,m}(z)$ для любого решения типа $(n,m)$ использовалась одна и та же последовательность $a_{n-m+1}^{n+m}=\{a_{n-m+1},\dots,a_{n+m}\}$ коэффициентов ряда $a(z)$. Ясно, что для классической правой аппроксимации Паде каждая пара столбцов $P_{n,m}^{R}(z)$, $Q_{n,m}^{R}(z)$ образует решение порядка $n$.

Порядок решения этой аппроксимационной задачи является аналогом порядка на бесконечности решения однородной краевой задачи Римана [21]. Однако, в отличие от последней задачи, мы должны использовать формальные степени векторных многочленов $P_{n,m}(z)$, $Q_{n,m}(z)$. Поэтому порядок не определяется однозначно: любое решение порядка $k$ является также решением любого большего, чем $k$, порядка.

Задача векторной аппроксимации близка к задаче о совместном приближении нескольких линейных форм (в частности, к задаче о совместных аппроксимациях Паде) [13]. Но в нашем случае, как уже отмечалось, задаются верхние границы для степеней векторных многочленов $P_{n,m}(z)$, $Q_{n,m}(z)$, а не для степеней каждого элемента этих многочленов, как в работе [13].

Сравнивая коэффициенты при $z^{k+1},z^{k+2},\dots,z^{n+m}$ в левой и правой частях уравнения (1), легко проверить, что вектор-столбец $\left(q_0,q_1,\dots,q_{k-n+m}\right)^t$, составленный из коэффициентов векторного многочлена $Q_{n,m}(z)=q_0+q_1z+\dots+q_{k-n+m}z^{k-n+m}$, $q_j\in\mathbf{C}^{q\times1}$, принадлежит ядру блочной теплицевой матрицы

$$T_{k+1}(a_{n-m+1}^{n+m})=\begin{pmatrix} a_{k+1} & a_k & \dots & a_{n-m+1}\\ a_{k+2} & a_{k+1} & \dots & a_{n-m+2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n+m} & a_{n+m-1} & \dots & a_{2n-k}\end{pmatrix},$$

составленной из элементов последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$. Многочлен же $P_{n,m}(z)$ легко восстанавливается по $Q_{n,m}(z)$. Так как при переходе от матрицы $T_k(a_{n-m+1}^{n+m})$ к $T_{k+1}(a_{n-m+1}^{n+m})$ число столбцов увеличивается, а число строк уменьшается на единицу, то, начиная с некоторого порядка $k=\kappa_1$, рассматриваемая векторная задача аппроксимации всегда будет иметь решение. В скалярном случае рациональная дробь $P_{n,m}(z)Q_{n,m}^{-1}(z)$, соответствующая решению этого минимального порядка, и будет аппроксимацией Паде типа $(n,m)$ в смысле нового определения [16].

В матричном случае, по аналогии со скалярным, мы построим для задачи (1) данного типа $(n,m)$ систему решений минимально возможных порядков. Затем из первых $q$ векторных решений составим матричные многочлены $Q_{n,m}^{R}(z)$ и найдем по ним $P_{n,m}^{R}(z)$. Эта пара матричных многочленов и даст решение задачи матричной аппроксимации Паде. Для существования матричной рациональной дроби $P_{n,m}^{R}(z)Q_{n,m}^{R}(z)^{-1}$ необходимо, чтобы выполнялось условие $\det Q_{n,m}^{R}(z) \not\equiv 0$, т.е. чтобы первые $q$ векторных решений были линейно независимы над полем рациональных функций $\mathbf{C}(z)$. Ясно, что это условие эквивалентно отсутствию линейных зависимостей с *полиномиальными* коэффициентами между столбцами матрицы $Q_{n,m}^{R}(z)$. Однако при таком подходе к определению системы минимальных решений мы не можем получить больше, чем $q$, линейно независимых над $\mathbf{C}(z)$ решений. Как показывает уже скалярный случай [16] этого для наших целей недостаточно. В частности, связь между задачей аппроксимации Паде и краевой задачей Римана тогда не удалось бы установить.

Поэтому при определении канонической системы будем требовать отсутствия полиномиальных зависимостей с ограничениями на степени коэффициентов. Эти ограничения будут сформулированы в процессе построения системы минимальных решений. Так как мы будем рассматривать фиксированный тип $(n,m)$, для упрощения записи будем опускать индекс $(n,m)$.

После этих предварительных соображений приступим к построению вышеупомянутой системы минимальных решений. Как уже отмечалось, среди всех решений задачи правой векторной аппроксимации существуют решения минимального порядка $\kappa_1$. Выберем любое из этих решений и обозначим его $(P_1(z),Q_1(z))$. Среди всех решений задачи порядка $k$, для которых векторный многочлен $Q(z)$ не представляется в виде $q_1(z)Q_1(z)$, где $q_1(z)$ – скалярный многочлен от $z$ степени не выше $k-\kappa_1$, выберем любое решение наименьшего порядка $\kappa_2 \ge \kappa_1$ и обозначим его через $(P_2(z),Q_2(z))$. Продолжим этот процесс, выбирая среди решений задачи, для которых $Q(z) \ne q_1(z)Q_1(z)+q_2(z)Q_2(z)$, где $q_j(z)$ – многочлен степени не выше $k-\kappa_j$, решение наименьшего порядка $\kappa_3 \ge \kappa_2$ и т.д. Поскольку порядок $k$ любого решения нашей задачи не превосходит $n+m$, то процесс закончится за конечное число $r$ шагов. Любую систему решений $(P_1(z),Q_1(z)),\dots,(P_r(z),Q_r(z))$, полученную в результате этого процесса, будем называть *правой канонической системой решений типа* $(n,m)$ для матричного степенного ряда $a(z)$. Порядки $\kappa_1,\dots,\kappa_r$, полученные в результате этого процесса, будем называть *правыми минимальными порядками* этой системы.

Легко заметить, что процесс определения правой канонической системы для задачи векторной аппроксимации моделирует построение канонической системы в теории векторной краевой задачи Римана [21]. Имеется также очевидная аналогия с процессом получения фундаментального ряда решений уравнения $A(z)x(z)=0$ для сингулярного пучка матриц $A(z)$ (см., например, [22]).

## 3. Каноническая система, существенные многочлены и определение аппроксимаций Паде

Ясно, что каноническая система решений строится не единственным образом. Оказывается, однако, что любые две канонический системы имеют один и тот же набор минимальных порядков $\kappa_1,\dots,\kappa_r$, которые, таким образом, являются целочисленными инвариантами задачи (1). Для того, чтобы их вычислить и получить удобный алгоритм построения канонической системы, установим связь введенных выше понятий с индексами и существенными многочленами последовательности матричных коэффициентов $\{a_{n-m+1},\dots,a_{n+m}\}$. Ниже мы покажем, что набор минимальных порядков совпадают с индексами, а каноническая система состоит из правых существенных многочленов этой последовательности. Таким образом, условие минимальности, как и в скалярном случае, приводит естественным образом к появлению в задаче аппроксимаций Паде индексов и существенных многочленов.

Напомним коротко определение этих понятий (подробное изложение см., например, в [17]). Для матрицы $A$ обозначим $\ker_R A$ ее правое ядро и $\ker_L A$ – левое ядро:

$$\ker_R A = \{x \mid Ax = 0\}, \quad \ker_l A = \{y \mid yA = 0\}.$$

Пусть $A$ – блочная матрица с блоками из $\mathbf{C}^{p\times q}$, имеющая блочные размеры $(n+1)\times(m+1)$. Разобьем столбец $R \in \ker_R A$ на $m+1$ блоков размером $q\times 1$:

$$R = (r_0, r_1, \ldots, r_m)^t$$

и определим для $R$ производящий векторный многочлен $R(z) = r_0 + r_1 z + .. + r_m z^m$. Аналогично, для строки из $\ker_l A$ определим производящий многочлен по переменной $z^{-1}$.

Пусть $a_M^N = \{a_M, \ldots, a_N\}$ ($M < N$) – конечная последовательность комплексных матриц размером $p\times q$. Через $a_M^N(z)$ обозначим производящую функцию этой последовательности. Образуем семейство блочных теплицевых матриц $T_k(a_M^N) = \| a_{i-j} \|_{\substack{i=k,k+1,\ldots,N \\ j=0,1,\ldots,k-M}}$, $k = M, M+1, \ldots, N$, и опишем структуру правых и левых ядер матриц $T_k(a_M^N)$. Для кратности, когда это не вызывает недоразумений, будем применять обозначение $T_k$ вместо $T_k(a_M^N)$. Кроме того, удобнее использовать вместо пространств $\ker_R T_k$, $\ker_L T_k$ пространства производящих векторных многочленов $N_k^R$ и $N_k^l$ $(M \le k \le N)$, соответственно. Положим по определению $N_{M-1}^R = 0$ и обозначим $(N-M+2)q$-мерное пространство всех векторных многочленов от $z$ с коэффициентами из $\mathbf{C}^{q\times 1}$ формальной степени $N-M+1$ через $N_{N+1}^R$. Аналогично, положим $N_{N+1}^l = 0$ и пусть $N_{M-1}^L$ – $(N-M+2)p$-мерное пространство строчных многочленов от $z^{-1}$ с коэффициентами из $\mathbf{C}^{1\times p}$ формальной степени $N-M+1$. Нетрудно показать, что $N_k^R \subset N_{k+1}^R$ и $N_{k+1}^l \subset N_k^L$.

Пусть $\alpha = \dim N_M^R$ и $\omega = \dim N_N^L$. Последовательность $a_M^N$ называется *регулярной слева (справа)*, если $\alpha = 0$ ($\omega = 0$). Последовательность *регулярна*, если $\alpha = \omega = 0$. Число $\alpha$ ($\omega$) будем называть *левым (правым) дефектом* последовательности.

Обозначим через $d_k^R$ ($d_k^l$) размерность пространства $N_k^R$ ($N_k^L$). Пусть $\Delta_k^R = d_k^R - d_{k-1}^R$ $(M \le k \le N+1)$, $\Delta_k^l = d_k^L - d_{k+1}^L$ $(M-1 \le k \le N)$. Используя формулу Грассмана, нетрудно показать, что справедливы следующие неравенства:

$$\alpha = \Delta_M^R \le \Delta_{M+1}^R \le \ldots \le \Delta_N^R \le \Delta_{N+1}^R = p + q - \omega,$$

$$p + q - \alpha = \Delta_{M-1}^l \ge \Delta_M^L \ge \ldots \ge \Delta_{N-1}^L \ge \Delta_N^l = \omega.$$

Отсюда следует, что существует $p+q-\alpha-\omega$ целых чисел $\mu_{\alpha+1} \le \ldots \le \mu_{p+q-\omega}$ таких, что

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_M^R & = & \ldots & = & \Delta_{\mu_{\alpha+1}}^R & = & \alpha, \\ & & \ldots & & & & \\ \Delta_{\mu_i+1}^R & = & .. & = & \Delta_{\mu_{i+1}}^R & = & i, \\ & & \ldots & & & & \\ \Delta_{\mu_{p+q-\omega}+1}^R & = & \ldots & = & \Delta_{N+1}^R & = & p+q-\omega. \end{array} \tag{2}$$

Если $i$-я строка в этих соотношениях отсутствует, то считаем, что $\mu_i = \mu_{i+1}$. По определению положим $\mu_1 = \ldots = \mu_\alpha = M-1$, если $\alpha \ne 0$, и $\mu_{p+q-\omega+1} = \ldots = \mu_{p+q} = N+1$, если $\omega \ne 0$.

Числа $\mu_1,\dots,\mu_{p+q}$ определенные в (1), будут называться *индексами* последовательности $a_M^N$. Так как $\Delta_k^l = p+q-\Delta_{k+1}^R$, то для $\Delta_k^l$ справедливы соотношения подобные (2).

Можно показать (см. [17]), что $N_k^R + zN_k^R$ – подпространство $N_{k+1}^R$ и размерность $h_{k+1}^R$ дополнения $H_{k+1}^R$ этого подпространства равно $\Delta_{k+1}^R - \Delta_k^R$. Из (2) следует, что $h_{k+1}^R \neq 0$ тогда и только тогда, когда $k=\mu_j$ $(j=\alpha+1,\dots,p+q-\omega)$. В этом случае $h_{k+1}^R$ совпадает с кратностью $k_j$ индекса $\mu_j$. Следовательно,

$$N_{k+1}^R = N_k^R + zN_k^R \tag{3}$$

для $k \neq \mu_j$ и

$$N_{k+1}^R = (N_k^R + zN_k^R) \dot{+} H_{k+1}^R. \tag{4}$$

для $k=\mu_j$.

**Определение 2.** *Если $\alpha \neq 0$, то любые многочлены $R_1(z),\dots,R_\alpha(z)$, образующие базис пространства $N_M^R$ будут называться правыми существенными многочленами последовательности $a_M^N$, соответствующими индексу $\mu_1 = \dots = \mu_\alpha$.*

*Любые многочлены $R_j(z),\dots,R_{j+k_j-1}(z)$, образующие базис дополнения $H_{\mu_j+1}^R$ называются правыми существенными многочленами последовательности, соответствующими индексу $\mu_j$, $\alpha+1 \leq j \leq p+q-\omega$.*

Аналогичным образом

$$N_{k-1}^L = N_k^L + z^{-1}N_k^L$$

для $k \neq \mu_j$ и

$$N_{k-1}^l = (N_k^L + z^{-1}N_k^L) \dot{+} H_{k-1}^L.$$

для $k=\mu_j$. Выбирая базисы пространств $N_N^L$ (если $\omega \neq 0$) и $H_{\mu_j-1}^L(\alpha+1 \leq j \leq p+q-\omega)$, мы получаем набор векторных многочленов $L_{\alpha+1}(z),\dots,L_{p+q}(z)$, которые будут называться *левыми существенными многочленами* последовательности $a_M^N$.

Итак, для любой последовательности существует $p+q$ индексов, $p+q-\omega$ правых существенных многочленов и $p+q-\alpha$ левых существенных многочленов. В реальной вычислительной практике найти эти данные можно, используя стандартные средства линейной алгебры, основанные на сингулярном разложении матрицы.

Оказывается, что всегда можно пополнить системы $R_1(z),\dots, R_{p+q-\omega}(z)$ и $L_{\alpha+1}(z),\dots,L_{p+q}(z)$ до полных систем, состоящих из $p+q$ многочленов. Кроме того, полные системы правых и левых существенных многочленов можно определенным образом согласовать между собой так, что, зная одну из систем многочленов, можно найти другую. Процедуры пополнения и согласования систем существенных многочленов подробно описаны в [17].

Теперь мы можем перейти к установлению связи между минимальными порядками и канонической системой для правой задачи векторной аппроксимации типа $(n,m)$ и индексами и правыми существенными многочленами последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$.

**Теорема 1.** *Пусть $(P_1(z),Q_1(z)),\dots,(P_r(z),Q_r(z))$ – любая правая каноническая система типа $(n,m)$ для степенного ряда $a(z)$ и $\kappa_1,\dots,\kappa_r$ – минимальные порядки для этой системы. Тогда $r=p+q-\omega$ и числа $\kappa_1,\dots,\kappa_{p+q-\omega}$ совпадают с индексами $\mu_1,\dots,\mu_{p+q-\omega}$, а многочлены*

*$Q_1(z),\dots,Q_{p+q-\omega}(z)$ являются правыми существенными многочленами последовательности $a_{n-m+1},\dots,a_{n+m}$.*

*Наоборот, если $R_1(z),\dots,R_{p+q-\omega}(z)$ – любые правые существенные многочлены этой последовательности, то справедливо представление*

$$a(z)R_j(z)=P_j(z)+O(z^{n+m+1}),\quad j=1,\dots,p+q-\omega,$$

*где $P_j(z)$ – векторный многочлен от $z$ формальной степени $\mu_j$. При этом система $\left(P_1(z),R_1(z)\right),\dots,\left(P_{p+q-\omega}(z),R_{p+q-\omega}(z)\right)$ является правой канонической системой типа $(n,m)$ для $a(z)$.*

**Доказательство.** Пусть

$$\kappa_1=\dots=\kappa_{r_1}<\kappa_{r_1+1}=\dots=\kappa_{r_2}<\dots<\kappa_{r_s+1}=\dots=\kappa_r$$

Из определения минимального порядка $\kappa_1$ следует, что $N_k^R=0$ для $k\le\kappa_1$ и векторные многочлены $Q_1(z),\dots,Q_{r_1}(z)$ образуют базис пространства $N_{\kappa_1+1}^R$. Это означает, что $\kappa_1=\dots=\kappa_{r_1}=\mu_1=\dots=\mu_{r_1}<\mu_{r_1+1}$, а $Q_1(z),\dots,Q_{r_1}(z)$ являются правыми существенными многочленами, соответствующими индексу $\mu_1$.

Возьмем теперь любое $k$, удовлетворяющее неравенствам $\kappa_{r_1}<k<\kappa_{r_2}$. По определению минимального порядка $\kappa_{r_1+1}$ любой многочлен $R(z)$, принадлежащий $N_{k+1}^R$, представляется в виде

$$R(z)=q_1(z)Q_1(z)+\dots+q_{r_1}(z)Q_{r_1}(z),\tag{5}$$

где $q_j(z)$ – многочлен степени не выше $k-\mu_1$.

Поэтому

$$N_{k+1}^R=N_{k+1}^R+zN_{k+1}^R,\quad \kappa_{r_1}<k<\kappa_{r_2}.$$

Пространство $N_{\kappa_{r_2}+1}^R$ содержит подпространство $N_{\kappa_{r_2}}^R+zN_{\kappa_{r_2}}^R$, и, кроме того, в нем существуют многочлены $Q_{r_1+1}(z),\dots,Q_{r_2}(z)$, которые не представляются в виде (5), т.е. являются линейно независимыми по модулю подпространства $N_{\kappa_{r_2}}^R+zN_{\kappa_{r_2}}^R$. Более того, очевидно, что $r_2-r_1$ – максимальное число векторов линейно независимых по модулю этого подпространства. Таким образом,

$$N_{\kappa_{r_2}+1}^R=N_{\kappa_{r_2}}^R+zN_{\kappa_{r_2}}^R\dotplus\operatorname{span}\{Q_{r_1+1},\dots,Q_{r_2}\}.$$

Учитывая структуру пространств $N_k^R$ (см. соотношения (3), (4)), получаем

$$\kappa_{r_1+1}=\dots=\kappa_{r_2}=\mu_{r_1+1}=\dots=\mu_{r_2}<\mu_{r_2+1}.$$

Ясно, что $Q_{r_1+1}(z),\dots,Q_{r_2}(z)$ являются при этом правыми существенными многочленами, соответствующими индексу $\mu_{r_2}$.

Продолжая этот процесс, получаем

$$\kappa_{r_s+1}=\dots=\kappa_r=\mu_{r_s+1}=\dots=\mu_r,$$

и многочлены $Q_1(z),\dots,Q_r(z)$ являются правыми существенными многочленами, соответствующими индексам $\mu_1,\dots,\mu_r$. Если при этом $r<p+q-\omega$, то существует индекс $\mu_{r+1}\ge\mu_r$. Но тогда существовал бы многочлен $Q_{r+1}(z)\in N_{\mu_{r+1}+1}$, который не представлялся бы в виде $q_1(z)Q_1(z)+\dots+q_r(z)Q_r(z)$, где $\deg q_j(z)\le\mu_{r+1}-\mu_j$. Поэтому каноническая система решений состояла бы из большего, чем $r$, числа решений, что невозможно. Условие $r>p+q-\omega$ также невозможно, так как его выполнение привело бы к появлению существенного индекса

$\mu_{p+q-\omega+1} \neq n+m+1$. Значит, $r = p+q-\omega$ и первая часть теоремы доказана. Вторая часть теоремы доказывается аналогичными рассуждениями.

Отметим, что, так как $\omega \leq p$, число $r$ решений в канонической системе всегда не меньше $q$.

Каноническая система обладает рядом свойств, вполне аналогичных свойствам канонической системы краевой задачи Римана для вектора (см. [21]). Для полноты приведем эти свойства. В данной работе мы использовать их не будем и потому доказательства опускаем.

**Свойство 1.** *Пусть* $(P_1(z),Q_1(z)),\ldots,(P_{p+q-\omega}(z),Q_{p+q-\omega}(z))$ *– любая каноническая система типа* $(n,m)$ *для степенного ряда* $a(z)$. *Тогда любое решение* $(P(z),Q(z))$ *порядка* $k$ $(\mu_i < k \leq \mu_{i+1})$ *задачи векторной аппроксимации может быть представлено в виде*

$$(P(z),Q(z)) = q_1(z)(P_1(z),Q_1(z))+\ldots+q_i(z)(P_i(z),Q_i(z)),$$

*где* $q_j(z)$ *– многочлен от* $z$ *степени не выше* $k-\mu_j$.

**Свойство 2.**

$$rank\begin{pmatrix} P_1(z) & \ldots & P_{p+q-\omega}(z) \\ Q_1(z) & \ldots & Q_{p+q-\omega}(z) \end{pmatrix} = p+q-\omega$$

*для любого* $z \neq 0$.

Очевидно, что в точке $z=0$ свойство 2 может не выполняться. Вместо него справедливо

**Свойство 3.**

$$rank\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_{p+q-\omega} \\ Q_1(0) & \ldots & Q_{p+q-\omega}(0) \end{pmatrix} = p+q-\omega,$$

*где вектор* $A_j$ *находится из условия 3 определения 1:*

$$a(z)Q_j(z)-P_j(z) = A_j z^{n+m+1}+\ldots.$$

Следующее свойство описывает поведение канонической системы на бесконечности.

**Свойство 4.** *Ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} z^{-\mu_1}P_1(z) & \ldots & z^{-\mu_{p+q-\omega}}P_{p+q-\omega}(z) \\ z^{-\mu_1+n-m}Q_1(z) & \ldots & z^{-\mu_{p+q-\omega}+n-m}Q_{p+q-\omega}(z) \end{pmatrix}$$

*на бесконечности равен* $p+q-\omega$.

Дадим теперь основное определение в данной работе – определение правых матричных аппроксимаций Паде.

**Определение 3.** *Пусть* $(P_1(z),Q_1(z)),\ldots,(P_q(z),Q_q(z))$ *– первые* $q$ *решений из произвольной правой канонической системы типа* $(n,m)$ *для* $a(z)$. *Составим матричные многочлены:*

$$P^R_{n,m}(z) = (P_1(z)\ldots P_q(z)), \quad Q^R_{n,m}(z) = (Q_1(z)\ldots Q_q(z)).$$

*Если* $\det Q^R_{n,m}(z) \not\equiv 0$, *то рациональная матрица-функция*

$$\pi^R_{n,m}(z) = P^R_{n,m}(z)Q^R_{n,m}(z)^{-1} \tag{6}$$

*называется правой аппроксимацией Паде типа* $(n,m)$ *для* $a(z)$.

В силу теоремы 1 знаменатель $Q^R_{n,m}(z)$ правой аппроксимации Паде выражается через первые $q$ правых существенных многочленов:

$$Q^R_{n,m}(z) = R_1(z) \equiv (R_1(z)\ldots R_q(z)).$$

Поэтому правая аппроксимация Паде типа $(n,m)$ существует тогда и только тогда, когда для последовательности $a^{n+m}_{n-m+1}$ найдутся правые существенные многочлены, для которых $\det R_1(z) \not\equiv 0$. По поводу существования таких многочленов можно высказать следующее предположение.

**Предположение.** *Если* $\mu_q < \mu_{q+1}$, *то любые правые существенные многочлены* $R_1(z),\ldots,R_q(z)$ *линейно независимы над полем* $\mathbf{C}(\mathbf{z})$ *и, следовательно, всегда* $\det R_1(z) \not\equiv 0$. *Если же* $\mu_q = \mu_{q+1}$, *то правые существенные многочлены, соответствующие индексу* $\mu_q$, *можно пронумеровать таким образом, чтобы многочлены* $R_1(z),\ldots,R_q(z)$ *также были линейно независимы над полем* $\mathbf{C}(\mathbf{z})$, *и, значит, всегда правые существенные многочлены можно выбрать так, что* $\det R_1(z) \not\equiv 0$

Очевидно, что это предположение справедливо при $q=1$, т.е. для векторных (столбцовых) аппроксимаций Паде. Легко показать, что оно верно и при $p=q=2$. Однако в полном объеме доказать данное предположение пока не удалось. В тех случаях, которые мы рассматривали в теории сходимости матричных аппроксимаций Паде [19], эта гипотеза также справедлива.

Опишем кратко процедуру определения левых аппроксимаций Паде. *Задача левой векторной аппроксимации* ставится аналогично задаче правой аппроксимации. В ней требуется отыскать пару строчных многочленов $\tilde{P}_{n,m}(z) \in \mathbf{C}^{1\times q}[\mathbf{z}]$, $\tilde{Q}_{n,m}(z) \in \mathbf{C}^{1\times p}[\mathbf{z}]$, где $\tilde{Q}_{n,m}(z) \not\equiv 0$, со следующими ограничениями на степени:

$$\deg \tilde{P}_{n,m}(z) \le k, \deg \tilde{Q}_{n,m}(z) \le k-n+m,$$

$n-m \le k \le n+m$, такие, что

$$\tilde{Q}_{n,m}(z)a(z) - \tilde{P}_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}).$$

Число $k$ будем называть *порядком* данного решения. Нетрудно проверить, что $z^{-(k-n+m)}\tilde{Q}_{n,m}(z) \in N^L_{2n-k}(a^{n+m}_{n-m+1})$. В частности, для решения порядка $2n-k+1$ имеем $z^{-(n+m-k+1)}\tilde{Q}_{n,m}(z) \in N^l_{k-1}(a^{n+m}_{n-m+1})$.

*Левая каноническая система типа* $(n,m)$ для $a(z)$ определяется аналогично правой. При этом *левые минимальные порядки* канонической системы совпадают с числами $2n-\mu_{\alpha+1}+1,\ldots,2n-\mu_{p+q}+1$, где $\mu_{\alpha+1},\ldots,\mu_{p+q}$ – индексы последовательности $a^{n+m}_{n-m+1}$. Левая каноническая система строится с помощью левых существенных многочленов $L_{\alpha+1}(z),\ldots,L_{p+q}(z)$ этой последовательности. Свойства левой канонической системы аналогичны вышеприведенным свойствам правой системы.

С помощью левой канонической системы определяется левая аппроксимация Паде:

$$\pi^l_{n,m}(z) = Q^L_{n,m}(z)^{-1}P^L_{n,m}(z), \tag{7}$$

где знаменатель $Q^l_{n,m}(z)$ левой аппроксимации Паде выражается через последние $p$ левых существенных многочленов:

$$Q^l_{n,m}(z) = L^+_2(z) \equiv \begin{pmatrix} z^{n+m-\mu_{q+1}+1}L_{q+1}(z) \\ \vdots \\ z^{n+m-\mu_{p+q}+1}L_{p+q}(z) \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что в отличие от классической матричной аппроксимации Паде правые и левые аппроксимации Паде в смысле определений (6), (7) могут существовать только одновременно. Для доказательства этого утверждения нам потребуется лемма. В ней множества $\ker_R R_1$, $\ker_L L_2$ рассматриваются как линейные пространства над полем рациональных дробей $\mathbf{C}(z)$, а системы правых и левых существенных многочленов выбираются согласованными (определение этого понятия см. в [17]).

**Лемма 1.** *Пусть* $R(z)$, $L(z)$ *– матрицы согласованных существенных многочленов последовательности* $a^N_M$ *и* $R_1(z)$, $(L_2(z))$ *– матрицы, составленные из первых (последних)* $q$ $(p)$ *правых (левых) согласованных существенных многочленов.*

*Тогда справедливо равенство*

$$\dim\ker_R R_1 = \dim\ker_L L_2.$$

**Доказательство.** Согласованность систем правых и левых существенных многочленов означает, что $\beta_+(z)L^+(z) = I_p$ и $R(z)L(z)^+ = 0$ для некоторого матричного многочлена $\beta_+(z)$. Здесь $L^+(z) = z^{N+1}d^{-1}(z)L(z)$, $d(z) = diag[z^{\mu_1},\dots,z^{\mu_{p+q}}]$.

Поэтому $rank\, L^+ = p$ и столбцы $[L^+]^1,\dots,[L^+]^p$ образуют базис $\ker_R R$. Пусть $d = \dim\ker_R R_1$ и $X_1,\dots,X_d$ – базис пространства $\ker_R R_1$. Здесь $X_j$ – столбец, состоящий из $q$ элементов кольца $\mathbf{C}[z]$ многочленов над $\mathbf{C}$. Продолжим столбцы $X_j$ нулевыми многочленами до столбцов $\overline{X_j}$ длиной $p+q$. Ясно, что $\overline{X_1},\dots,\overline{X_d}$ линейно независимы и принадлежат $\ker_R R$. Разложим их по базису $[L^+]^1,\dots,[L^+]^p$, и из коэффициентов этого разложения построим строки $Y_1,\dots,Y_d$ длиной $p$ с элементами из $\mathbf{C}(z)$. Образовав из столбцов $\overline{X_j}$ и строк $Y_j$ матрицы $\overline{X}$ и $Y$, имеем

$$\overline{X} = L^+Y.$$

Отсюда следует, что $rank\, Y = d$, т.е. строки $Y_1,\dots,Y_d$ линейно независимы. Кроме того, учитывая структуру матрицы $\overline{X}$, получаем

$$L_2^+Y = 0,$$

т.е. строки $Y_1,\dots,Y_d$ принадлежат пространству $\ker_L L_2$. Это означает, что $d$ не превосходит $\dim\ker_L L_2$. Аналогично доказывается противоположное неравенство. Лемма доказана.

Изучим теперь вопросы существования, единственности введенных аппроксимаций Паде и их знаменателей и выясним, как они связаны с классическими аппроксимациями Паде. В следующей теореме, чтобы избежать громоздких формулировок, ограничимся рассмотрением только наиболее интересного случая, когда $\mu_q < \mu_{q+1}$.

**Теорема 2.** *Пусть индексы последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$ удовлетворяют условию $\mu_q < \mu_{q+1}$. Знаменатель $Q_{n,m}^R(z)$ $(Q_{n,m}^L(z))$ правой (левой) аппроксимации Паде типа $(n,m)$ определяется единственным образом с точностью до умножения справа (слева) на унимодулярный матричный многочлен $U(z)$ следующей структуры:*

$$U(z) = \begin{pmatrix} U_1 & * & \cdots & * \\ 0 & U_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_s \end{pmatrix}. \tag{8}$$

*Здесь $U_1,\dots,U_s$ – постоянные матрицы, порядки которых совпадают с кратностями индексов $\mu_1,\dots,\mu_q$ $(\mu_{q+1},\dots,\mu_{p+q})$, а на местах, помеченных звездочкой, стоят скалярные многочлены степени не выше $\mu_j - \mu_i$ $(\mu_{q+j} - \mu_{q+i})$, если $\mu_j - \mu_i \geq 0$ $(\mu_{q+j} - \mu_{q+i} \geq 0)$, и 0 если $\mu_j - \mu_i < 0$ $(\mu_{q+j} - \mu_{q+i} < 0)$.*

*Правая и левая матричные аппроксимации Паде типа $(n,m)$ существуют или не существуют одновременно и определяют одну и ту же единственную рациональную матрицу-функцию $\pi_{n,m}^R(z) = \pi_{n,m}^l(z)$.*

*Если существует аппроксимация Паде в смысле определения 3, то для существования правой (левой) классической аппроксимации Паде типа $(n,m)$ необходимо и достаточно, чтобы для индекса $\mu_q$ $(\mu_{q+1})$ последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$ было справедливо неравенство*

$$\mu_q \le n \quad (\mu_{q+1} \ge n+1).$$

*Если это условие выполнено, то аппроксимация Паде в смысле определения (3) является классической.*

*Правая (левая) матричная аппроксимация Паде в смысле определения Бейкера существует тогда и только тогда, когда* $\mu_q \le n$ $(\mu_{q+1} \ge n+1)$ *и, хотя бы для одного набора существенных многочленов, выполнялось условие*

$$R_1(0)\text{- обратима} \quad (L_2^+(0)\text{- обратима}).$$

*В этом случае аппроксимация Паде является аппроксимацией Паде – Бейкера.*

**Доказательство.** Пусть для индексов последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$ выполняется условие $\mu_q < \mu_{q+1}$ и $Q_{n,m}^R(z)$, $\tilde{Q}_{n,m}^R(z)$ – любые два знаменателя аппроксимации Паде типа $(n,m)$, порожденные разными каноническими системами. Тогда, в силу теоремы 1,

$$Q_{n,m}^R(z) = \left(R_1(z)\ldots R_q(z)\right), \quad \tilde{Q}_{n,m}^R(z) = \left(\widetilde{R}_1(z)\ldots\widetilde{R}_q(z)\right),$$

где $R_1(z),\ldots,R_q(z)$; $\widetilde{R}_1(z),\ldots,\widetilde{R}_q(z)$ – различные системы первых $q$ правых существенных многочленов последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$.

Учитывая условие $\mu_q < \mu_{q+1}$, из теоремы 3.1 работы [17] о структуре ядра блочной теплицевой матрицы, примененной к $T_{\mu_q+1}$, получаем

$$\widetilde{R}_j(z) = \sum_{i=1}^{q} u_{ij}(z)R_i(z), \qquad j=1,\ldots,q,$$

где $u_{ij}(z)$ – скалярный многочлен степени не выше $\mu_j - \mu_i$, если $\mu_j - \mu_i \ge 0$ и $q_{ij}(z) \equiv 0$ для $\mu_j - \mu_i < 0$. В матричной форме эти соотношения можно переписать в виде

$$\tilde{Q}_{n,m}^R(z) = Q_{n,m}^R(z)U(z).$$

Очевидно, что $U(z)$ – унимодулярный матричный многочлен, имеющий вид (8).

Предположим теперь, что существует, например, правая аппроксимация Паде типа $(n,m)$ в смысле определения 3. Тогда найдутся правые существенные многочлены последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$, для которых $\det R_1(z) \not\equiv 0$, т.е. $\dim\ker_R R_1(z) = 0$ над полем $\mathbf{C}(z)$.

Если эти существенные многочлены входят в полную систему правых существенных многочленов, то для согласованных левых существенных многочленов по лемме 1 выполняется условие $\det L_2(z) \not\equiv 0$. Это означает, что в данном случае существует левая аппроксимация Паде типа $(n,m)$.

Предположим теперь, что система правых существенных многочленов не полна, т.е. $\omega \ne 0$ и $p > q$. Но тогда можно выбрать полную систему левых существенных многочленов (см. [17, §5]). Пусть $\widetilde{R}(z)$ – матрица согласованных с ними правых существенных многочленов. В силу условия $\mu_q < \mu_{q+1}$ справедливо равенство $R_1(z) = \widetilde{R}_1(z)U(z)$, где $U(z)$ – матрица-функция вида (8). Поэтому $\det \tilde{R}_1(z) \not\equiv 0$, и осталось снова применить лемму 1. Существование левой аппроксимации Паде доказано.

Докажем, что рациональные функции $\pi_{n,m}^R(z)$ и $\pi_{n,m}^L(z)$ совпадают. Из определения аппроксимаций Паде следует, что

$$Q_{n,m}^L(z)P_{n,m}^R(z) - P_{n,m}^L(z)Q_{n,m}^R(z) = O(z^{n+m+1}). \tag{9}$$

Оценим степень произвольного элемента этой матрицы. В силу условия $\mu_q < \mu_{q+1}$ для $i=1,\ldots,p,$ $j=1,\ldots,q$ имеем

$$\deg\left[Q^{L}_{n,m}(z)P^{R}_{n,m}(z)\right]_{ij}=$$
$$=\deg[Q^{L}_{n,m}(z)]_i+\deg\left[P^{R}_{n,m}(z)\right]^j\le n+m+1-(\mu_{q+i}-\mu_j)\le n+m.$$

Эта же оценка справедлива и для $\left[P^{L}_{n,m}(z)Q^{R}_{n,m}(z)\right]_{ij}$. Условие (9) тогда означает, что

$$Q^{L}_{n,m}(z)P^{R}_{n,m}(z)-P^{L}_{n,m}(z)Q^{R}_{n,m}(z)=0,$$

т.е. $\pi^{R}_{n,m}(z)=\pi^{L}_{n,m}(z)$.

Предположим, что существует правая аппроксимация Паде в смысле определения ? и выполняется условие $\mu_q\le n$. Тогда $\deg[Q_{n,m}(z)]^j\le\mu_j-n+m\le m$ для $j=1,\dots,q$. Это означает, что данная аппроксимация Паде является классической. Наоборот, пусть существует классическая аппроксимация Паде типа $(n,m)$ и $n\in[\mu_i,\mu_{i+1})$ для некоторого $i$, $1\le i\le p+q$. Если $n<\mu_q$, то $i<q$ и базис $N^{R}_{n+1}$ состоит из

$$\left\{R_j(z),zR_j(z),\dots,z^{n-\mu_j}R_j(z)\right\}_{j=1}^{i}.$$

Следовательно, для $k$-го столбца матрицы $Q^{R}_{n,m}(z)$ выполняется

$$\left[Q^{R}_{n,m}(z)\right]^k=q_{1k}(z)R_1(z)+\ldots+q_{ik}(z)R_i(z),$$

$k=1,\dots,q$. Здесь $q_{jk}(z)$ – скалярный многочлен от $z$ и $\deg q_{jk}(z)\le n-\mu_j$. В матричной форме эти соотношения можно переписать в виде

$$Q^{R}_{n,m}(z)=\left(R_1(z)\dots R_i(z)\right)Q(z).$$

Первый множитель имеет размеры $q\times i$, а $Q(z)$ – $i\times q$. Так как $i<q$, то по формуле Бине – Коши получаем $\det Q^{R}_{n,m}(z)\equiv 0$. Таким образом, если $n<\mu_q$, то правая классическая аппроксимация Паде типа $(n,m)$ не существует. Аналогично проверяется условие существования левой классической аппроксимации Паде.

Утверждения теоремы относительно аппроксимации Паде в смысле Бейкера проверяются теперь очевидным образом.

### 4. Матричные аппроксимации Паде и задача факторизации Винера – Хопфа

Мы определили (правую) аппроксимацию Паде типа $(n,m)$ с помощью (правой) канонической системы типа $(n,m)$ для задачи векторной аппроксимации. В свою очередь, правая каноническая система совпадает с системой правых существенных многочленов $R_1(z),\dots,R_{p+q-\omega}(z)$ последовательности $a^{n+m}_{n-m+1}$ (теорема 1). Как показано в [17], задача нахождения индексов и существенных многочленов $a^{n+m}_{n-m+1}$ эквивалентна задаче факторизации Винера – Хопфа блочно-треугольной матрицы-функции

$$A_{nm}(t)=\begin{pmatrix} t^{n-m}I_q & 0\\ a^{n+m}_{n-m+1}(t) & t^{n+m+1}I_p\end{pmatrix}.$$

Поэтому задача нахождения канонической системы для аппроксимаций Паде типа $(n,m)$ также равносильна задаче факторизации для $A_{nm}(t)$. Определение факторизации Винера – Хопфа матриц-функций см., например, [23]. Известно, что знание канонической системы для краевой задачи Римана для вектора, позволяет построить факторизацию Винера – Хопфа для ее матричного коэффициента, и наоборот.

Более естественно связать аппроксимации Паде с задачей факторизации для матрицы-функции $A(t)$, в определении которой используется не отрезок $a^{n+m}_{n-m+1}(z)$ ряда $a(z)$, а сам этот ряд:

$$A(t)=\begin{pmatrix} t^{n-m}I_q & 0 \\ a(t) & t^{n+m+1}I_p \end{pmatrix}.$$

Пусть $a(z)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i z^i$, $a_i\in\mathbf{C}^{p\times q}$, – матричный степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности точки $z=0$ Пусть $\Gamma$ – любой простой замкнутый контур, лежащий в этой окрестности. Таким образом, матрица-функция $a(z)$ является аналитической во внутренней области $\mathrm{D}_+$, ограниченной контуром $\Gamma$, и непрерывной на $\mathrm{D}_+\cup\Gamma$.

Для того, чтобы не усложнять формулировку теоремы, ограничимся рассмотрением только случая, когда для последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$ правый дефект $\omega$ равен нулю. В этой ситуации для ряда $a(z)$ существует полная правая каноническая система типа $(n,m)$.

**Теорема 3.** *Предположим, что для матричного степенного ряда $a(z)$ существует полная правая каноническая система $(P_1(z),Q_1(z)),\dots,(P_{p+q}(z),Q_{p+q}(z))$ типа $(n,m)$. Пусть $\mu_1,\dots,\mu_{p+q}$ – правые минимальные индексы этой системы*

*Тогда $\mu_1,\dots,\mu_{p+q}$ являются правыми факторизационными индексами матрицы-функции $A(t)$, и ее правая факторизация Винера – Хопфа относительно контура $\Gamma$ строится по формулам*

$$A(t)=A_-(t)d(t)A_+(t),t\in\Gamma,$$

*где*

$$A_-(t)=\begin{pmatrix} t^{n-m-\mu_1}Q_1(t) & \dots & t^{n-m-\mu_{p+q}}Q_{p+q}(t) \\ t^{-\mu_1}P_1(t) & \dots & t^{-\mu_{p+q}}P_{p+q}(t) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$A_+^{-1}(t)=\begin{pmatrix} Q_1(t) & \dots & Q_{p+q}(t) \\ -O_1(t) & \dots & -O_{p+q}(t) \end{pmatrix},$$

$$d(t)=diag\left[t^{\mu_1},\dots,t^{\mu_{p+q}}\right].$$

*Здесь $O_j(t)$ – аналитическая вектор-функция, которая единственным образом определяется разложением*

$$a(z)Q_j(z)-P_j(z)=z^{n+m+1}O_j(z),\qquad j=1,\dots,p+q.$$

*Наоборот, если для факторизационных индексов матрицы-функции $A(t)$ выполняется условие $\mu_{p+q}\le n+m$ и*

$$A(t)=A_-(t)d(t)A_+(t),t\in\Gamma,$$

*– любая правая факторизация Винера – Хопфа $A(t)$, то, разбив множитель $A_-(t)$ на блоки размером $q\times(p+q)$ и $p\times(p+q)$:*

$$A_-(t)=\begin{pmatrix} A_1^-(t) \\ A_2^-(t) \end{pmatrix}$$

*и составив многочлены $Q_j(z)=z^{\mu_j-n+m}\left[A_1^-(z)\right]^j$, $j=1,\dots,p+q$, и, построив по ним многочлены $P_j(z)$, получим полную правую каноническую систему $(P_1(z),Q_1(z)),\dots,(P_{p+q}(z),Q_{p+q}(z))$ типа $(n,m)$ для $a(z)$*

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы можно провести по той же схеме, что доказательство теорем 5.1 и 5.2 из [17]. Однако проще свести задачу факторизации $A(t)$ к факторизации $A_{nm}(t)$ и применить вышеуказанные теоремы. Для этого представим матрицу-функцию $a(z)$ в виде

$$a(z) = a_0^{n-m}(z) + a_{n-m+1}^{n+m}(z) + a_{n+m+1}^{\infty}(z),$$

где $a_l^k(z) = \sum_{j=l}^{k} a_j z^j$. Тогда

$$A(t) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ t^{-(n-m)} a_0^{n-m}(t) & I_p \end{pmatrix} A_{nm}(t) \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ t^{-(n+m+1)} a_{n+m+1}^{\infty}(t) & I_p \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Так как $\deg a_0^{n-m}(t) \le n-m$ и $t^{-(n+m+1)} a_{n+m+1}^{\infty}(t)$ – аналитическая в $\mathrm{D}_+$ и непрерывная на $\mathrm{D}_+ \cup \Gamma$ матрица-функция, то крайние множители в этом представлении являются факторизационными. По теореме 5.1 [17]

$$A_{nm}(t) = A_{nm}^{-}(t) d(t) A_{nm}^{+}(t), \quad t \in \Gamma,$$

где

$$A_{nm}^{-}(t) = \begin{pmatrix} R_-(t) \\ \alpha_-(t) \end{pmatrix}, \quad (A_{nm}^{+})^{-1}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ \beta_+(t) \end{pmatrix},$$

$$R(t) = \left( R_1(t) \dots R_{p+q}(t) \right), \quad R_-(t) = t^{n-m} R(t) d^{-1}(t),$$

а матричные многочлены $\alpha_-(t)$ от $t^{-1}$ и $\beta_+(t)$ от $t$ единственным образом находятся из разложения

$$a_{n-m+1}^{n+m}(t) R(t) = \alpha_-(t) d(t) - t^{n+m+1} \beta_+(t). \tag{12}$$

Возьмем в качестве правых существенных многочленов многочлены $Q_1(t), \dots, Q_{p+q}(t)$ из правой канонической системы (см. теорему 1). Тогда

$$A(t) = A_-(t) d(t) A_+(t), \quad t \in \Gamma,$$

где

$$A_-(t) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ t^{-(n-m)} a_0^{n-m}(t) & I_p \end{pmatrix} A_{nm}^{-}(t) = \begin{pmatrix} t^{n-m} R(t) \\ a_0^{n-m}(t) R(t) + \alpha_-(t) d(t) \end{pmatrix} d^{-1}(t)$$

и

$$A_+^{-1}(t) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ -t^{-(n+m+1)} a_{n+m+1}^{\infty}(t) & I_p \end{pmatrix} (A_{nm}^{+})^{-1}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ \beta_+(t) - t^{n+m+1} a_{n+m+1}^{\infty}(t) R(t) \end{pmatrix}.$$

Из разложения (12) следует, что

$$a(t) R(t) = P(t) - t^{n+m+1} O(t),$$

где обозначено

$$P(t) = a_0^{n-m}(t) R(t) + \alpha_-(t) d(t), \quad O(t) = -\beta_+(t) + t^{n+m+1} a_{n+m+1}^{\infty}(t) R(t).$$

Очевидно, что $P(t)$ – матричный многочлен от $t$, причем $\deg[P(t)]^j \le \mu_j$, а $O(t)$ – аналитическая в $\mathrm{D}_+$ и непрерывная на $\mathrm{D}_+ \cup \Gamma$ матрица-функция. Поскольку $\left[R(t)\right]^j = Q_j(t)$, то $\left[P(t)\right]^j = P_j(t)$ и

$$a(t) Q_j(t) - P_j(t) = t^{n+m+1} O_j(t),$$

где $O_j(t) = \left[O(t)\right]^j$, $j = 1, \dots, p+q$. Значит, факторы $A_\pm(t)$ действительно имеют вид (10). Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь для факторизационных индексов матрицы-функции $A(t)$ выполняется условие $\mu_{p+q} \le n+m$, т.е. для последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$ правый дефект $\omega$ равен нулю. Пусть

$$A(t) = A_-(t) d(t) A_+(t), \quad t \in \Gamma,$$

– любая правая факторизация Винера – Хопфа $A(t)$.

Тогда из уравнения (11) получаем, что матрица-функция $A_{nm}(t)$ допускает факторизацию Винера – Хопфа

$$A_{nm}(t) = A^{-}_{nm}(t)d(t)A^{+}_{nm}(t), \quad t \in \Gamma,$$

где

$$A^{-}_{nm}(t) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ -t^{-(n-m)}a_0^{n-m}(t) & I_p \end{pmatrix} A_{-}(t).$$

Разобьем множитель $A_{-}(t)$ на блоки размером $q \times (p+q)$ и $p \times (p+q)$:

$$A_{-}(t) = \begin{pmatrix} A_1^{-}(t) \\ A_2^{-}(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-}_{nm}(t) = \begin{pmatrix} A_1^{-}(t) \\ -t^{-(n-m)}a_0^{n-m}A_1^{-}(t) + A_2^{-}(t) \end{pmatrix}.$$

По теореме 5.2 [17] столбцовые многочлены $Q_j(z) = z^{\mu_j - n + m}\left[A_1^{-}(z)\right]^j$, $j = 1,\dots,p+q$, являются правыми существенными многочленами последовательности $a_{n-m+1}^{n+m}$. Восстановив по многочленам $Q_j(z)$ многочлены $P_j(z)$, получим правую каноническую систему типа $(n,m)$ для $a(z)$.

Случай, когда дефект $\omega \neq 0$ и $p \leq q$, рассматривается аналогично, если правую каноническую систему пополнить с помощью процедуры пополнения системы правых существенных многочленов. Если же $p > q$, то начинать нужно с левой канонической системы, для которой существует аналог теоремы 3. После этого правая каноническая система получается с помощью процедуры согласования.

Итак, мы установили важный факт: *проблема построения канонической системы решений для задачи аппроксимации Паде является частным случаем задачи факторизации Винера – Хопфа (краевой задачи Римана)*. В скалярном случае наши построения приводят к результатам работы [16].

**Литература**


1. Baker G.A., Jr., Gammel J.L. (eds.) The Padé Approximant in Theoretical Physics. – New York: Academic Press, 1970.

2. Bessis D., Graves-Morris P.R.(eds) Topics in the Theory of Padé Approximants, Inst. of Phys., Bristol, 1973. – P. 19–44.

3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.

4. Wynn P. Acceleration techniques for iterated vector and matrix problems// Math. Comp. – 1962. – V. 16. – P. 301–322.

5. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

6. Xu Guo-liang, Zhuang Guo-zhong. Square matrix Pade approximation and convergence acceleration// J. Comput. Math. – 1993. – V. 11. – № 3. – P. 225–235.

7. Draux D. The Padé approximants in a non-commutative algebra and their applications, Lecture Notes in Mathematics 1071, Pade Approximation and Its Applications, Springer-Verlag, 1984.

8. Labahn G., Cabay S. Matrix Padé fraction and their computation// SIAM J. Comput. – 1989. – V. 18. – № 4. – P. 639–657.

9. Xu Guo-liang. Existence and uniqueness of matrix Padé approximants// J. Compt. Math. – 1990. – V.8. – № 1. – P. 65–74.

10. Xu Guo-liang, Bultheel A. Matrix Padé approximation: Definition and properties// Linear Algebra Appl. – 1990. – V. 137/138. – P. 67–137.

11. Xu Guo-liang, Li Jiakai. Generalized matrix Padé approximants// Approx. Theory Appl. – 1989. – V. 5. – № 4. – P. 47–60.

12. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. –: Наука, 1988. – 256 с.

13. Сорокин В.Н. О совместном приближении нескольких линейных форм// Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1983. – №1. – С. 44–47.

14. Bultheel A., Van Barel M. A matrix euclidean algorithm and the matrix minimal Padé approximation problem// Continued Fractions and Padé approximants (C. Brezinski, ed.), – 1990. – P. 11–51.

15. Antoulas A. C. On recursiveness and related topics in linear systems// IEEE Trans. Automat. Control. – 1986. – V. AC-31(12). – P. 1121–1135.

16 Адуков В. М. Задача аппроксимаций Паде как краевая задача Римана //Весці НАН Беларуси, сер. фізіка-матэмат. навук , принята к печати.

17 Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices// Linear Algebra Appl. – 1998. – V. 274. – P. 85–124.

18. Адуков В.М. Факторизация Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций// Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 54–74.

19. Adukov V.M. The essential polynomial approach to convergence of matrix Padé approximants// Contemporary Math. – 2001. – V. 280. – P. 71–87.

20. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory. – 2003. – V. 122. – № 2 – P. 160 – 207.

21. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 380 с.

22. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 492 с.

23. Гохберг И.Ц. Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения// Успехи матем. наук. – 1964. – Т. 19. – Вып. 1. – С. 71–124.

*Поступила в редакцию 21 апреля 2003 года*