

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ КРУТИЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНОГО МЕТОДА ШВИДКОВСКОГО Е.Г.: ИДЕНТИФИКАЦИЯ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ СРЕДЫ

И.В. Елюхина, Г.П. Вяткин, В.П. Бескачко

В работе сделана попытка оценить эффекты, возникающие в крутильно-колебательном вискозиметре при его заполнении неньютоновской средой. Задача решена в приближении длинного цилиндра для жидкостей, реологические свойства которых описываются моделями Бингама, Оствальда–Вейля и Балк-ли–Гершеля.

Введение

Крутильно-колебательный метод [1] широко используется в вискозиметрической практике с момента его обоснования Швидковским Е.Г для ньютоновской жидкости до настоящего времени и получил значительное усовершенствование в аппаратном отношении. Теоретическая база метода позднее была развита в [2, 3] на случай неоднородных жидкостей и учета магнитогидродинамических эффектов, ограничиваясь, однако, по-прежнему ньютоновским поведением среды. Возможности метода в изучении *неньютоновских жидкостей* практически не исследованы. Единственным исключением служит работа [4], где обсуждается измерение вязкоупругих свойств, причем главное внимание уделяется режиму вынужденных высокочастотных колебаний, тогда как в вискозиметре Швидковского реализуется случай свободных затухающих колебаний низкой частоты ($\sim 10^{-1} \dots 10^1$ Гц).

Для *крутильно-колебательного метода* характерно изменение во времени приращений напряжений и деформаций, что делает возможным обнаружение упругих свойств жидких сред, а уменьшение во времени амплитуды скорости сдвига позволяет выявить свойства текучих систем с переменным отношением «напряжение – скорость сдвига». К тому же, в режиме затухающих колебаний можно реализовать как малые скорости деформаций, так и предельно малые полные деформации. Все это позволяет сделать *наблюдаемыми* отдельные *неньютоновские эффекты* у жидкостей, обычно считающихся ньютоновскими.

В методе Швидковского Е.Г. вывод о реологической принадлежности среды делается на основе измерений параметров колебаний, которые могут быть выполнены с высокой точностью, *недоступной* для наблюдаемых параметров в *других методиках*, что дает возможность предположить обнаружение новых классов сред *со слабо выраженными неньютоновскими свойствами* и позволяет решить *фундаментальную задачу о реологической принадлежности* рассматриваемого класса жидкостей.

Заметим, наконец, что ошибочная интерпретация реологической принадлежности среды может приводить к *противоречиям в экспериментальных данных*, вопрос о причинах которых, в частности, в металлических расплавах, является открытым и представляет собой предмет интенсивных дискуссий (см., например, [5]).

Математическая формулировка задачи

Пусть цилиндрический сосуд с внутренним радиусом R и моментом инерции K подвешен вдоль своей оси на упругой нити и совершает вокруг этой оси крутильные колебания с периодом τ_0 и декрементом затухания колебаний δ_0 . При заполнении цилиндра жидкостью, во-первых, вследствие увлечения ее движущимися ускоренно стенками цилиндра возрастает эффективный момент инерции подвесной системы и увеличивается *период колебаний* τ : $\tau > \tau_0$, а во-вторых, растет скорость затухания колебаний, т.е. декремент затухания δ : $\delta > \delta_0$, вследствие дополнительной диссипации механической энергии системы, обусловленной вязким трением между подвергаемыми сдвигу слоями жидкости. Влияние каждой из этих причин на движение цилиндра определяется полем скорости течения, возбуждаемого в жидкости стенками цилиндра. *Задача*

заключается в предсказании закона колебаний $\alpha = \alpha(t)$, т.е. зависимости от времени t углового смещения α цилиндра, заполненного жидкостью с массой M , и вязкостью сопряженной: движение сосуда непосредственно связано с возбуждаемым им движением жидкости. Характер течения жидкости при прочих равных условиях зависит от ее реологического типа, который определяется реологическим уравнением состояния, представляющим собой математи-ческую формулировку предположений, касающихся механического поведения среды. Так, для несжимаемых ньютоновских сред достаточно указать два реологических параметра: кинемати-ческую вязкость ν и плотность ρ , а для ньютоновских к ним добавляются, например, дина-мическая жесткость G (вязкоупругая жидкость), предел текучести σ_0 (вязкопластическая жид-кость), показатель m и постоянная K , степенного закона (псевдопластичные и дилатантные жидкости).

Вискозиметрические методики по измерению свойств ньютоновских сред и возможности на-блюдения слабоупругих свойств линейных вязкоупругих жидкостей были обнаружены ранее (см., например, [1-4, 6, 7]). Вискозиметр, заполненный такими средами, после завершения переходного процесса совершает регулярные изохронные колебания, характерные для единственного набора параметров: периодом τ и декрементом затухания δ . Если реологическое уравнение состояния включает пластические или нелинейно-вязкие составляющие, то возможно нарушение подобного асимптотического поведения колебаний. Изучение качественных особенностей колеба-тельных процессов, возникающих при заполнении вискозиметра вязкопластичными и нелинейно-вязкими средами, является целью настоящей работы и здесь будет проведено на примере моделей Бингэма (вязкопластичные среды), *Оставада* – *Вейля* (среды, подчиняющиеся степенному реоло-гическому закону: псевдопластичные ($0 > m > 1$) и дилатантные ($m > 1$)) и модели, представляю-щей комбинацию этих типов – модели *Бакки* – *Гершеля* (нелинейные вязкопластичные среды).

Точное решение рассматриваемой задачи отсутствует даже в простейшем случае ньютонов-ской жидкости ввиду нелинейности уравнений ее движения, пространный и нестационар-ного характера течения. Известные (см., например, [1, 8]) аналитические решения найдены с ис-пользованием ряда приближений, главными из которых являются:

- 1) рассматривается регулярный режим затухающих колебаний (в предположении, что он су-ществует);
- 2) скольжение между жидкостью и внутренней поверхностью цилиндра отсутствует;
- 3) амплитуды колебаний малы, что в свою очередь позволяет допустить:
 - 3.1) единственной существующей компонентой поля скорости является азимутальная, течения жидкости в цилиндре осесимметричное.
 - 3.2) течения жидкости в цилиндре осесимметричное.

В ньютоновском случае задача еще более усложняется, не оставляя надежды на точное ре-шение. По этой причине на данном этапе исследования мы также ограничимся рассмотрением идеализированной ситуации, полагаем справедливыми приближения 2, 3, и, кроме того, будем счи-тать цилиндр достаточно длинным, так что течениями, возбуждаемыми вблизи его торцовых по-верхностей можно пренебречь. Последнее, как известно, составляет дополнительные проблемы в решении задачи, поскольку являются источником вторичных (радиальных и осевых) течений. При сделанных предположениях математическую модель вязкопластических эксперимен-тов по изучению ньютоновских свойств в цилиндрической системе координат можно предста-вить в виде:

1) уравнение движения жидкости

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{r}{2\sigma_{r\phi}}, \quad (1)$$

где v – азимутальная компонента скорости, $\sigma_{r\phi}$ – $r\phi$ -ая компонента тензора напряжений σ ;

2) уравнение движения цилиндра

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + 2\delta_0 \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{2\pi}{2\pi} \left(\frac{r_0}{2} \right) \alpha = \frac{K}{P}, \quad (2)$$

где P – момент сил, приложенных к цилиндру со стороны жидкости, $r = -2Mr^{-1}\sigma_{r\phi}|_{r=R}$; вели-чины P , K и M отнесены к единице длины цилиндра;

3) начально-краевые условия для (1, 2):

$$V(r,0) = 0, \quad V(R,t) = R \frac{d\alpha}{dt}, \quad V(0,t) = 0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0; \quad (3)$$

4) реологическое уравнение состояния, устанавливающее соответствие между тензором напряжений σ и тензором скоростей деформации \mathbf{D} :

4.1) модель Бингама [9]

$$\sigma_{r\varphi} = \begin{cases} \left(\eta + \frac{\sigma_0}{D} \right) D_{r\varphi} & \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \\ D_{r\varphi} = 0 & \text{при } \sigma < \sigma_0, \end{cases} \quad (4)$$

4.2) модель Оствальда – Вейля [10]

$$\sigma_{r\varphi} = K_v D^{m-1} D_{r\varphi}, \quad (5)$$

4.3) модель Балкли – Гершеля [9]

$$\sigma_{r\varphi} = \begin{cases} \left(K_v D^{m-1} + \frac{\sigma_0}{D} \right) D_{r\varphi} & \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \\ D_{r\varphi} = 0 & \text{при } \sigma < \sigma_0. \end{cases} \quad (6)$$

В (4)–(6) $\eta = \nu\rho$ – динамическая вязкость, $D_{r\varphi}$ – $r\varphi$ -ая компонента \mathbf{D} , σ и D – вторые инварианты σ и \mathbf{D} , $D = |D_{r\varphi}|$, $\sigma = |\sigma_{r\varphi}|$, $D_{r\varphi} = \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}$. Заметим, что для ньютоновской среды

$$\sigma_{r\varphi} = \eta D_{r\varphi}. \quad (7)$$

Метод решения

Бингамовские жидкости

Численно трудно промоделировать поведение «идеальной» Бингамовской модели и на практике удобно использовать модель *bi-viscosity*, где движение нетекучей компоненты рассматривается как движение ньютоновской среды, вязкость которой намного превосходит вязкость текучей компоненты:

$$\sigma_{r\varphi} = \nu\rho D_{r\varphi}, \quad \nu = \begin{cases} \nu_0 + \frac{\sigma_0}{D\rho} & \text{при } D \geq \frac{\sigma_0}{\rho(\nu_r - \nu_0)}, \\ \nu_r = k_r \nu_0 & \text{при } D < \frac{\sigma_0}{\rho(\nu_r - \nu_0)}, \end{cases} \quad (8)$$

где ν_0 – пластическая вязкость, ν_r – ньютоновская вязкость, значение которой выбирается по крайней мере на порядок выше, чем ν_0 , и обычно $k_r = 10^2$; в настоящих расчетах для лучшего соответствия модели (8) истинному вязкопластичному поведению значение модельного коэффициента k_r принималось равным $k_r = 10^3$.

После введения безразмерных переменных

$$U = \frac{V}{dq_0}, \quad T = q_0 t, \quad A = \frac{MR^2}{2K}, \quad \xi_0 = R/d, \quad \xi = r/d, \quad Bm = \frac{\sigma_0}{\nu_0 \rho q_0}, \quad \bar{D} = D/q_0, \quad (9)$$

где $d = \sqrt{\nu_0/q_0}$ – толщина пограничного слоя, $q_0 = 2\pi/\tau_0$ – циклическая частота колебаний пустого тигля, Bm – число Бингама, A – отношение моментов инерции «замороженной» жидкости в тигле и пустой подвесной системы, система уравнений (1–3, 8) имеет следующий вид:

при $\bar{D} < Bm/(k_r - 1)$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = k_r \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi^2} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\delta_0}{\pi} + \alpha = - \frac{4Ak_r}{\xi_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right) \Bigg|_{\xi=\xi_0}, \quad (11)$$

при $\bar{D} \geq Bm/(k_r - 1)$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi^2} \right) + \frac{2Bm}{\rho \xi} \text{sign} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\delta_0}{\pi} + \alpha = - \frac{4A}{\xi_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right) \Bigg|_{\xi=\xi_0} - \frac{4ABm}{\xi_0^2} \text{sign} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right) \Bigg|_{\xi=\xi_0}; \quad (13)$$

$$U(\xi, 0) = 0, \quad U(\xi_0, T) = \frac{d\alpha}{dT} \xi_0, \quad U(0, T) = 0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{d\alpha}{dT} \Bigg|_{T=0} = 0. \quad (14)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (10)–(14) используем метод прямых. На промежутке $x \in [0, \xi_0]$ выберем эквидистантную сетку узловых точек: $x_j = jh$, $h = \xi_0/n$, $j = 1, 2, \dots, (n-1)$, $x_0 = 0$, $x_k = \xi_0$. Обозначим приближенные решения в этих точках как $u_j \sim U(x_j, T)$ и аппроксимируем производные по координате x трехточечными разностными формулами. Тогда при $D_j < Bm/(k_r - 1)$ для системы (10), (11), (14) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= k_r \left[\frac{1}{h^2} (u_2 - 2u_1 + u_0) + \frac{1}{2hx_1} (u_2 - u_0) - \frac{u_1}{x_1^2} \right], \quad u_0 = 0; \\ \frac{du_j}{dt} &= k_r \left[\frac{1}{h^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \frac{1}{2hx_j} (u_{j+1} - u_{j-1}) - \frac{u_j}{x_j^2} \right]; \\ \frac{du_{n-1}}{dt} &= k_r \left[\frac{1}{h^2} (u_k - 2u_{n-1} + u_{n-2}) + \frac{1}{2hx_{n-1}} (u_k - u_{n-2}) - \frac{u_{n-1}}{x_{n-1}^2} \right], \quad u_k = \xi_0 u_{n+1}; \\ \frac{du_n}{dt} &= u_{n+1}; \\ \frac{du_{n+1}}{dt} &= \bar{P} - u_n - \frac{\delta_0}{\pi} u_{n+1}, \quad \bar{P} = - \frac{4k_r A}{\xi_0^2} \left(\frac{u_k - u_{n-1}}{h} - \frac{u_k}{\xi_0} \right); \\ t = 0: \quad u_n &= \alpha_0 = 6^\circ \cong 0,1047 \text{ рад}, \quad u_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, (n-2), (n-1), (n+1)), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$D_j = \left| \frac{(u_{j+1} - u_{j-1})}{2h} - \frac{u_j}{x_j} \right|, \quad j = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Для системы (12)–(14) (при $D_j \geq Bm/(k_r - 1)$) преобразования проводятся аналогично, например, последнее уравнение в (15) будет иметь вид

$$\frac{du_{n+1}}{dt} = \bar{P} - u_n - \frac{\delta_0}{\pi} u_{n+1}, \quad \bar{P} = - \frac{4A}{\xi_0^2} \left[\left(\frac{u_k - u_{n-1}}{h} - \frac{u_k}{\xi_0} \right) + Bm \cdot \text{sign} \left(\frac{u_k - u_{n-1}}{h} - \frac{u_k}{\xi_0} \right) \right]. \quad (16)$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (15), (16) интегрировалась методом Рунге – Кутты четвертого порядка с контролем точности и автоматическим выбором шага по времени.

Нелинейно-вязкие жидкости

Путем введения безразмерных параметров (9) и положив, кроме того, $b = cq_0^{m-1}$, где $c = K_v / (v_0 \rho)$, v_0 – номинальная вязкость, систему (1)–(3), (5) можно представить как

$$\frac{\partial U}{\partial T} = b \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right|^{m-1} \left[\frac{2}{\xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right) + m \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{U}{\xi^2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\delta_0}{\pi} + \alpha = -\frac{4Ab}{\xi_0^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right]^{m-1} \Bigg|_{\xi=\xi_0} \quad (17)$$

с начально-краевыми условиями (14).

Численная реализация процесса решения проводится аналогично описанному для вязкопластичной среды. При расчетах с $m < 1$ необходимо вводить адаптивную неравномерную сетку вблизи оси цилиндра или использовать аппроксимацию

$$v = \begin{cases} K_v D^{m-1} & \text{при } D \geq D_0, \\ K_v D_0^{m-1} & \text{при } D < D_0, \end{cases} \quad (18)$$

где D_0 – пороговое значение D , которое можно принять $\sim 10^{-6} \dots 10^{-5}$.

Результаты и обсуждение

В дальнейшем под *периодом колебаний* будем понимать величину $\tau = 2\Delta T_\tau$, где ΔT_τ – разность между двумя соседними моментами времени, когда угловое смещение α обращается в нуль, а *декремент затухания* определим как $\delta = 2 \ln \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right|$, где α_1, α_2 – соседние экстремальные значения α ($|\alpha_1| > |\alpha_2|$). Напомним, что для вискозиметра, заполненного ньютоновской жидкостью и находящегося в режиме установившихся затухающих колебаний, величины τ и δ есть константы, не зависящие от номера колебаний.

Используемые ниже для сравнения результаты, отвечающие ньютоновской жидкости, рассчитаны по моделям (10)–(14) и (17) при $m = 1$ и $Bm = 0$ и соответствуют результатам, полученным с помощью точного решения, приведенного в [1].

Бингамовская жидкость

На рис. 1 показано поведение периода и декремента затухания колебаний как функций номера N колебания в зависимости от различных чисел Бингама Bm . Здесь $\tau_{\text{ньют}}$ и $\delta_{\text{ньют}}$ – период и декремент затухания при $Bm = 0$, а $\tau_{\text{ме}}$ – период колебаний вискозиметра, полностью заполненного твердым ядром. По мере затухания колебаний, т.е. роста N , область, где сдвиговые напряжения превосходят предел текучести σ_0 , будет распространяться от оси цилиндра к его стенкам. Когда твердое ядро заполнит весь объем, эффективный момент инерции системы достигнет своего наибольшего значения, равного сумме моментов инерции «замороженной» жидкости $K_{\text{ж}}$ и K , вместе с ним наибольшим станет и период, так как $\tau \sim (K + K_{\text{ж}})^{1/2}$. В этом состоянии δ должен стать минимальным и совпадающим с δ_0 ввиду отсутствия диссипации механической энергии вследствие вязкого трения. Эти качественные соображения целиком подтверждаются в расчетах.

Зависимость $\tau = \tau(N)$ (рис. 1а) является монотонно возрастающей и тем быстрее достигает значения $\tau_{\text{ме}}$, чем больше Bm , а $\delta = \delta(N)$ (рис. 1б) сначала растет до некоторого значения δ а затем сравнительно быстро падает до $\delta \cong \delta_0$. При уменьшении числа Bm кривая $\delta = \delta(N)$ смещается к оси ординат и становится монотонно убывающей. Заметим, что при малых Bm , когда колебания затухают быстрее, чем достигается максимум δ_m , поведение $\delta(N)$ и $\tau(N)$ сходно с характерным для псевдопластичных сред (см. рис. 3 и пояснения к нему).

Число колебаний $N_{\text{ме}}$, которое успевае совершиться прежде, чем пластическое ядро заполнит весь объем, можно определить как $\delta(N_{\text{ме}}) \cong \delta_0$ или $\tau(N_{\text{ме}}) \cong \tau_{\text{ме}}$. При фиксированном числе $N_{\text{ме}}$ зависит от находящегося в распоряжении экспериментатора отношения $A = MR^2/(2K)$ (рис. 2 для $\xi_0 = 12$, $Bm = 1$) и наоборот, что позволяет сделать приближенную

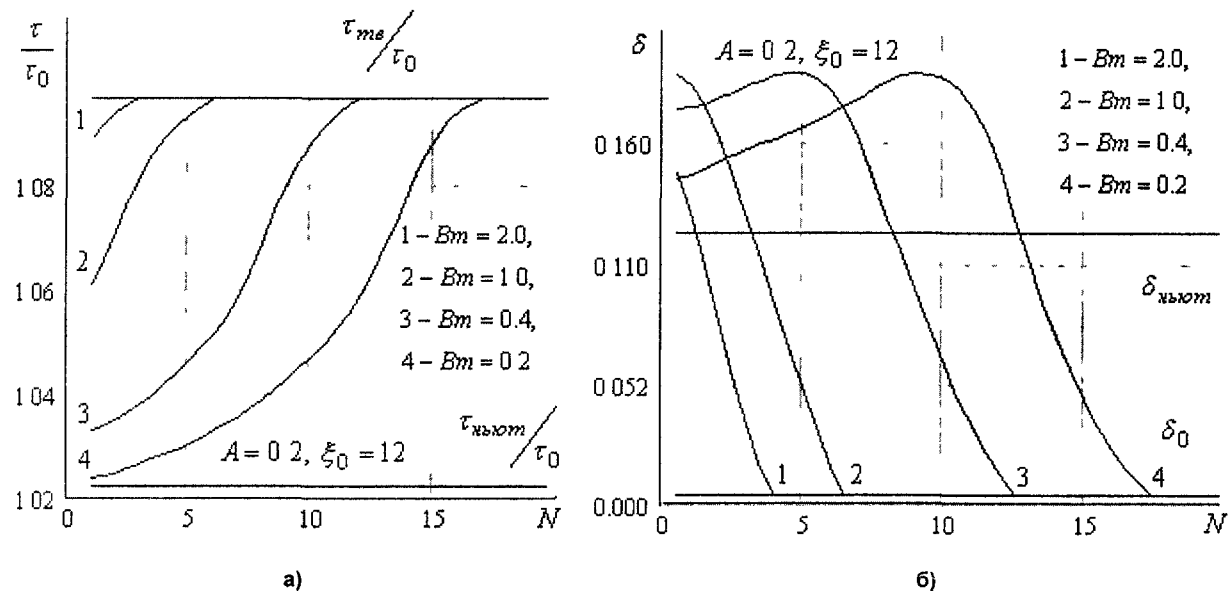


Рис. 1. Зависимость периода (а) и декремента (б) затухания колебаний

оценку значения числа Bm . Число N_{me} растет с уменьшением A , период $\tau_{ньют}$ и декремент δ_m падают с ростом ξ_0 и уменьшением A , и соответствующим образом изменяются $\tau_{me}/\tau_{ньют}$ (рис. 2) и $(\delta_m - \delta_0)$. Это дает возможность изменять условия наблюдаемости и идентифицируемости пластических свойств путем варьирования временного интервала изменения параметров колебаний и их чувствительности к числу Бингама.

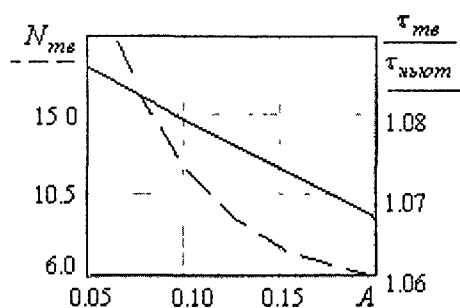


Рис. 2. Зависимости от A
 N_{me} и $\tau_{me}/\tau_{ньют}$

Нелинейно-вязкие жидкости

В режиме затухающих колебаний амплитудное значение скорости сдвига со временем уменьшается, и для дилатантных жидкостей кажущаяся вязкость

$K_v \left| \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right|^{m-1}$ падает, а для псевдопластических – растет. Напомним, что в ньютоновском случае период колебаний τ уменьшается при уменьшении вязкости ν , т.е. росте ξ_0 при фиксированных R и q_0 , а поведение декремента δ зависит от величины ξ_0 : при $\xi_0 > \xi_0|_{\delta_{max}}$ с ростом ξ_0 декремент уменьшается, а при $\xi_0 < \xi_0|_{\delta_{max}}$ – растет, где $\xi_0|_{\delta_{max}} \cong 4,2$ [1]. Эти закономерности качественно подтверждаются и в случае нелинейно-вязких сред, что проиллюстрировано на рис. 3, 4. Здесь

$$\xi_{0NV} = \left(\sqrt{b\tilde{D}^{m-1}} \right)^{-1} \cdot \xi_0, \quad \tilde{D} = \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right|_{\xi=\xi_0}, \quad (19)$$

где \tilde{D} определено при амплитудном значении α , а ξ_0 отвечает номинальной величине вязкости. В общем случае \tilde{D} находится как интегральная характеристика по полупериоду, и ввиду того, что четко уловить границу $\xi_{0NV}|_{\delta_{max}}$ для нелинейно-вязких сред нельзя, она колеблется в не больших пределах в зависимости от ξ_0, b, A и m . Отметим также, что для ньютоновских сред при больших значениях ξ_0 с ростом ξ_0 период уменьшается слабее, чем декремент, что для нелинейно-вязких сред можно проследить на рис. 3: выход на асимптотический режим, характери-

зубмый неизменными во времени значениями τ и δ , происходит быстрее по периоду (рис. 3а), чем по декременту (рис. 3б). Для жидкостей со степенным реологическим законом характерны высокие значения ξ_{0NV} , и в этом случае период в процессе колебаний практически не изменяется. Рис. 3, 4 построены для $m \geq 1$, а при $m < 1$ зависимости периода и декремента отображаются практически симметрично относительно прямой, соответствующей ньютоновской среде с $m = 1$ (зависимость $\delta = \delta(N)$ с учетом ξ_{0NV}).

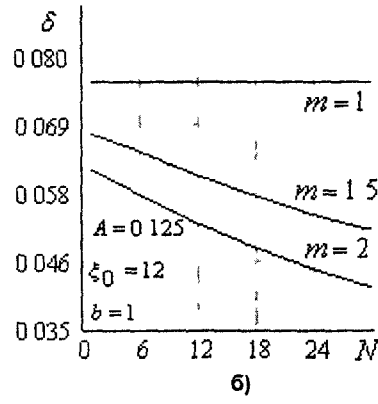
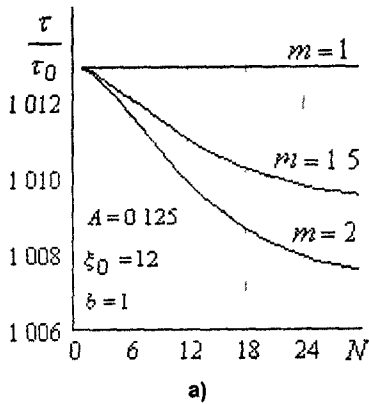


Рис. 3. Зависимость периода (а) и декремента (б) затухания колебаний от их номера для сред Оствальда–Вейля

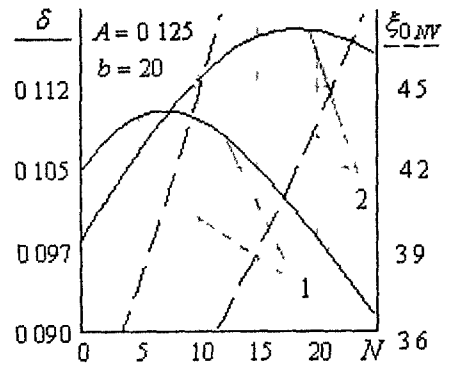


Рис. 4. Зависимость $\delta = \delta(\xi_{0NV})$ от их номера для сред Оствальда–Вейля
1) $\xi_0 = 6, m = 2$; 2) $\xi_0 = 8, m = 1.5$

Если в области малых скоростей сдвига наблюдается нелинейность кривой вязкопластичного течения, то для учета нелинейного фактора в (4) можно использовать модель Балкли–Гершеля (6), представляющую собой комбинацию моделей Бингама (4) и Оствальда–Вейля (5). В этом случае темпы роста периода и изменения декремента во времени для вязкопластичных сред соответственно изменяются (рис. 5).

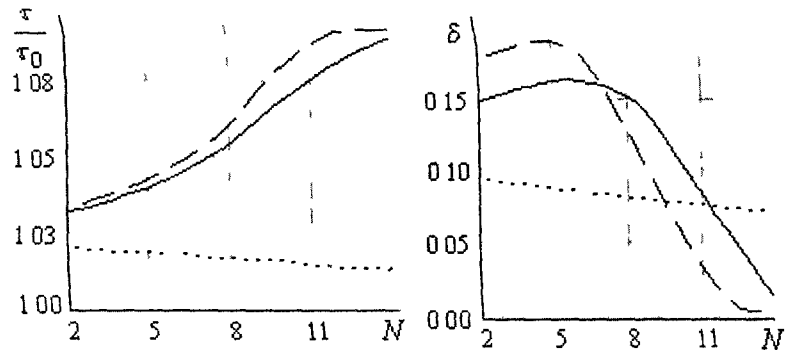


Рис. 5. Зависимость периода и декремента затухания колебаний от их номера для моделей: Бингама — — —, Оствальда–Вейля ·····, Балкли–Гершеля —
 $A = 0.2, \xi_0 = 12, m = 2, Bm = 0.4$

Заключение

Таким образом, в настоящей работе:

1) показано, что при заполнении крутильно-колебательного вискозиметра вязкопластичными и нелинейно-вязкими неньютоновскими средами в общем случае нарушаются свойства процесса колебаний, справедливые для ньютоновских и линейных вязкоупругих жидкостей:

1.1) колебания становятся неизосинхронными – период является функцией номера колебаний до момента, пока не исчезнет текучая компонента, в случае бингамовских сред или асимптотически стремится к некоторому пределу для нелинейно-вязких сред (напомним, что подобная ситуация возможна и для вязкопластичных сред при малых числах Бингама),

1.2) декремент затухания также изменяется в процессе колебаний на всем временном интервале, где среда обладает свойством текучести, и может иметь схожий характер для бингамовских и нелинейно-вязких сред;

2) полученные результаты демонстрируют возможность экспериментальной идентификации реологической принадлежности жидкости

2.1) отличительным свойством в бингамовском случае является установление после исчезновения текучей фазы режима «твердотельных» колебаний, характеризующихся единственными значениями $\tau_{те}$ и $\delta_{те}$,

2.2) для нелинейно-вязких жидкостей со степенным реологическим законом режим колебаний с единственными значениями τ и δ устанавливается не за конечное число колебаний, а лишь асимптотически, а их принадлежность к дилатантным или псевдопластическим средам можно выявить по характеру зависимостей $\tau = \tau(N)$ и $\delta = \delta(N)$.

Полученные в приближении бесконечно длинного цилиндра оценки для изменения параметров колебаний в зависимости от реологического типа среды показывают, что эти изменения могут существенно превосходить точность измерений. Последнее позволяет надеяться на наблюдаемость эффектов, связанных с неньютоновским поведением сред, и в натуральных экспериментах.

Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ и Правительства Челябинской области (грант 2003 г. для молодых ученых вузов Челябинской области).

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
2. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Хисматулин М.Б. Теория крутильного вискозиметра, помещенного в осевое магнитное поле // Магнитная гидродинамика. – 1992. – № 2. – С. 65–70.
3. Бескачко В.П., Хисматулин М.Б., Щека А.И. Теория крутильного вискозиметра, заполненного стратифицированной жидкостью // Физико-химические основы металлургических процессов. – Челябинск: ЧГТУ, 1992. – С. 47–52.
4. Kleiman R.N. Analysis of the oscillating-cup viscometer for the measurement of viscoelastic properties // Phys. Rev., 1987. – Vol. 35, № 1. – P. 261–275.
5. Островский О.И., Григорян В.А. О структурных превращениях в металлических расплавах // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1985. – № 5. – С. 1–12.
6. Елюхина И.В. Планирование оптимального эксперимента по одновременному определению вязкости и плотности ньютоновской среды // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». Вып. 1. – Челябинск, 2001. – № 7 (07) – С.71–76.
7. Елюхина И.В. К вопросу наблюдаемости упругих свойств жидких сред в вискозиметрическом эксперименте по Швидковскому Е.Г. // Там же – С.77–81.
8. Kestin J., Newell G.F. Theory of oscillating type viscometers: the oscillating cup. Part I. // J. Appl. Math. Phys., ZAMP, 1957. – V. 8. – P.433–449.
9. Balmforth N.J., Craster R.V. A consistent thin-layer theory for Bingham plastics // J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1999. – № 84. – P.65–81.
10. Fang P., Manglik R.M., Jog M.A. Characteristics of laminar viscous shear-thinning fluid flows in eccentric annular channels // J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1999. – № 84. – P. 1–17.

Поступила в редакцию 15 апреля 2003 г.