

ПЛАСТИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ И УСЛОВИЯ РАЗРУШЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ ТОРОВОЙ ОБОЛОЧКИ

В.Л. Дильман

На основании гипотезы о постоянстве радиуса круговой оси тонкостенной торовой оболочки получены новые формулы для вычисления напряжений в стенке оболочки, деформируемой под действием внутреннего давления. На этой основе получены аналитические выражения для вычисления критических значений напряжений, деформаций и внутреннего давления, при которых оболочка теряет несущую способность.

Хорошо известно, что в торообразной тонкостенной оболочке в зоне упругих деформаций безмоментное напряженное состояние может возникнуть лишь под действием «экзотической» нагрузки [1, с. 332]; равномерное внутреннее давление такой нагрузкой не является. Нетрудно показать, что равномерное внутреннее давление не приводит к безмоментному напряженному состоянию оболочки из упрочняемого материала и при ее пластическом деформировании. Тем не менее, при исследовании несущей способности и условий разрушения криволинейных участков трубопроводов, изогнутых труб, отводов и тонкостенных торовых оболочек, работающих под внутренним давлением, в целях упрощения теоретических построений нередко используются формулы Фёпля [1] безмоментной теории:

$$\begin{cases} \sigma_{\varphi} = \frac{pr}{2t} \cdot \frac{2R + r \sin \alpha}{R + r \sin \alpha}, \\ \sigma_{\Theta} = \frac{pr}{2t}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь σ_{φ} и σ_{Θ} – меридиональные (кольцевые, тангенциальные) и широтные (продольные, осевые) напряжения соответственно; p – внутреннее давление; r – внутренний радиус меридионального сечения оболочки; R – радиус круговой оси внутренней торовой поверхности; α – угол между радиус-вектором точки этой поверхности в меридиональном сечении и осью вращения тора.

Другой упрощающий подход может быть основан на экспериментально обоснованных гипотезах относительно поведения геометрических параметров оболочки в процессе нагружения. В работе [2] утверждается, что экспериментально проверены гипотезы о поведении тонкостенной торовой оболочки при ее пластическом деформировании под действием внутреннего давления:

- 1) сечение меридиональной плоскостью остается круглым;
- 2) радиус круговой оси тора R постоянен.

Эти гипотезы значительно облегчают теоретические расчеты и позволяют найти напряжение в любой точке стенки оболочки в момент потери ее несущей способности, соответствующее критическое давление и рассчитать толщину стенки равнопрочной оболочки [3, 4]. В то же время эти гипотезы противоречат безмоментному характеру нагружения, и при их выполнении формулы (1) неверны. Точнее говоря, гипотеза 1 в инженерных расчетах может быть принята и на основе безмоментной теории: можно показать, что параметр овализации (отношение полуосей меридионального сечения) в процессе пластического деформирования при напряжениях, подчиняющихся закону (1), мало отклоняется от единицы. Однако гипотеза 2 приводит к формулам для вычисления напряжений, отличающимся от уравнений Фёпля (1):

$$\begin{cases} \sigma_{\Theta} = \frac{pr}{2t} \cdot \frac{(R+3r \sin \alpha)(R+r \sin \alpha)}{R^2+3Rr \sin \alpha+3r^2 \sin^2 \alpha}, \\ \sigma_{\varphi} = \sigma_{\Theta} \frac{2R+3r \sin \alpha}{R+3r \sin \alpha}. \end{cases} \quad (2)$$

Напряжения, вычисленные по формулам (1) и (2), мало отличаются при значениях параметра гнутья $\gamma = r/R = 0,1 - 0,2$ и меньше, но заметно отличаются для крутоизогнутых оболочек.

Целью работы является вывод формул (2) и определение на их основе критических деформаций и напряжений в стенке оболочки, а также внутреннего давления, соответствующих моменту потери оболочкой стабильности пластического деформирования. Пластическая стабильность может рассматриваться как критерий несущей способности [3]. Она определяется на основе принципа Свифта–Марциньяка [5], который в случае нагружения оболочки только внутренним давлением равносителен критерию максимума внутреннего давления: оболочка теряет стабильность своего пластического деформирования в момент достижения внутренним давлением своего наибольшего значения. В работе предполагается, что напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки в зоне развитых пластических деформаций подчиняется теории течения, согласно которой

$$\frac{\sigma_{\varphi} - \sigma}{d\varepsilon_{\varphi}} = \frac{\sigma_{\Theta} - \sigma}{d\varepsilon_{\Theta}} = \frac{\sigma_r - \sigma}{d\varepsilon_r}, \quad (3)$$

где σ_r – радиальные напряжения в стенке оболочки, $\sigma = 1/3(\sigma_{\varphi} - \sigma_{\Theta} - \sigma_r)$; ε_{φ} , ε_{Θ} и ε_r – истинные деформации в меридиональном, широтном и радиальном направлениях. Кроме того, в процессе пластического деформирования оболочки предполагается выполнение условия постоянства объема

$$\varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_{\Theta} + \varepsilon_r = 0 \quad (4)$$

и условия тонкостенности

$$\sigma_r = 0. \quad (5)$$

Обозначим $m = \sigma_{\Theta} / \sigma_{\varphi}$ – коэффициент двухосности нагружения стенки оболочки. Тогда из (3)–(5) следует, что

$$\frac{d\varepsilon_{\Theta}}{d\varepsilon_{\varphi}} = \frac{2m-1}{2-m}. \quad (6)$$

Рассмотрим сечение тора плоскостью, содержащей ось тора. В этой плоскости введем систему координат (ρ, α) , где ρ – расстояние от оси тора до точки, α – угловая координата точки; при этом

$$\rho = R + r \sin \alpha. \quad (7)$$

Из гипотезы 2 о постоянстве R в процессе деформирования следуют формулы для вычисления элементарных приращений истинных деформаций $d\varepsilon_{\varphi}$ и $d\varepsilon_{\Theta}$:

$$d\varepsilon_{\varphi} = \frac{dr}{r}; \quad d\varepsilon_{\Theta} = \frac{dr}{r} \left(1 - \frac{R}{\rho} \right)$$

откуда

$$\frac{d\varepsilon_{\Theta}}{d\varepsilon_{\varphi}} = 1 - \frac{R}{\rho}.$$

Из этого равенства, формул (6) и (7) получаем

$$m = \frac{3\rho - 2R}{3\rho - R} = \frac{R + 3r \sin \alpha}{2R + 3r \sin \alpha}. \quad (8)$$

В частности, на стенках, где одна из двух главных кривизн нулевая ($\alpha = 0$), $m = 0,5$; на выпуклой стенке $\left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right)$ и вогнутой стенке $\left(\alpha = -\frac{\pi}{2} \right)$ соответственно

$$m = \frac{R+3r}{2R+3r} \text{ и } m = \frac{R-3r}{2R-3r}.$$

Если $R \gg r$, т.е. радиус круговой оси тора велик по сравнению с радиусом трубы (кривизна изогнутого участка трубопровода мала), то $m \approx 0,5$ во всех точках – хорошо известный факт для цилиндрической оболочки, находящейся под внутренним давлением. Для применяемых в промышленности отводов с диапазоном значений параметра $\gamma = r/R$ порядка 0,3...0,5 на вогнутой стенке $m \approx 0$, причем, при $\gamma > 0,33$ $m < 0$, т.е. в широтном направлении на вогнутой стенке могут возникнуть отрицательные нормальные (сжимающие) напряжения. На выпуклой стенке $m > 0,5$.

В принятых предположениях напряжения σ_φ и σ_Θ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_\varphi}{r} + \frac{\sigma_\Theta}{r + R/\sin \alpha} = \frac{\rho}{t}, & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_\Theta}{\sigma_\varphi} = \frac{R + 3r \sin \alpha}{2R + 3r \sin \alpha}. & (10) \end{cases}$$

Здесь (9) – уравнение Лапласа для торовой оболочки, (10) следует из (8). Решая эту систему, получаем (2).

В силу определения логарифмических деформаций,

$$t = t_0 \exp \varepsilon_n, \quad \rho = \rho_0 \exp \varepsilon_0. \quad (11)$$

Покажем, что при условии $R = \text{const}$ выполняется, хотя бы в первом приближении, равенство

$$r = r_0 \exp \varepsilon_\varphi,$$

т.е. что относительное изменение радиуса пропорционально относительному изменению длины дуги. Действительно, из (6) и (8) следует, что

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{d\varepsilon_\Theta} = \frac{1 + \gamma \sin \alpha}{\gamma \sin \alpha}. \quad (12)$$

В процессе нагружения γ изменяется незначительно, поэтому в первом приближении $\gamma = \text{const}$.

Тогда

$$\varepsilon_\Theta = \frac{\gamma \sin \alpha}{1 + \gamma \sin \alpha} \varepsilon_\varphi. \quad (13)$$

Используя теперь (7), (11) и (13), с точностью до слагаемых порядка ε_φ^2 , получаем

$$\begin{aligned} r &= \frac{R - \rho}{\sin \alpha} = \frac{R - \rho_0 \exp \varepsilon_\Theta}{\sin \alpha} = \frac{R - \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma \sin \alpha}{1 + \gamma \sin \alpha} \varepsilon_\varphi \right)}{\sin \alpha} = \\ &= r_0 + \frac{\rho_0 \gamma \varepsilon_\varphi}{1 + \sin \alpha} = r_0 (1 + \varepsilon_\varphi) = r_0 \exp \varepsilon_\varphi, \end{aligned}$$

что и требовалось. Заметим еще, что из условия постоянства объема (4) и формулы (13)

$$\varepsilon_r = -\frac{1 + 2\gamma \sin \alpha}{1 + \gamma \sin \alpha} \varepsilon_\varphi. \quad (14)$$

Исследуем вопрос о критических деформациях и напряжениях. Очевидно из (2), что, во-первых, $\sigma_\varphi > \sigma_\Theta$ во всех точках оболочки при $\gamma < 2/3$, и поэтому разрушение вызывают кольцевые деформации, и, во-вторых, кольцевые напряжения достигают экстремальных значений при $\alpha = \pm \pi/2$, причем, максимум – при $\alpha = -\pi/2$, т.е. на вогнутой стенке. Из (2) следует, что

$$p = \frac{t}{r} \cdot \frac{1 - 3\gamma + 3\gamma^2}{(1 - 1,5\gamma)(1 - \gamma)} \check{\sigma}_\varphi, \quad (15)$$

где $\check{\sigma}_\varphi$ – кольцевые напряжения на вогнутой стенке. Запишем формулу (15) более подробно, используя (11)–(14). Получим (формальные преобразования не приводим) с точностью до слагаемых порядка ε_φ^2 :

$$\begin{cases} \rho = \frac{t_0}{r_0} (1 - K(\gamma_0) \bar{\varepsilon}_\varphi) \bar{\sigma}_\varphi, \\ K(\gamma) = \frac{1-2\gamma}{1-\gamma} + 1 + \frac{3\gamma(1-2\gamma)}{1-3\gamma+3\gamma^2} - \frac{\gamma(2,5-3\gamma)}{1-2,5\gamma+1,5\gamma^2}, \end{cases} \quad (16)$$

где $\bar{\varepsilon}_\varphi$, $\bar{\sigma}_\varphi$ – кольцевые деформации и напряжения на вогнутой стенке.

Считая материал оболочки упрочняемым, зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций аппроксимируем степенной функцией $\sigma_i = A\varepsilon_i^n$, $A = n^{-n} \exp n \sigma_B$, где n – показатель упрочнения, σ_B – временное сопротивление. Тогда [3]

$$\sigma_\varphi = (1 - m + m^2)^{-\frac{1+n}{2}} n^{-n} (\exp n) \varepsilon_\varphi^n \sigma_B. \quad (17)$$

Можно показать, что зависимость величины $\sqrt{1 - m + m^2}$ от ε_φ незначительна [3], и эту величину можно считать постоянной. Тогда из (16) следует, что

$$p = B \exp(-K(\gamma_0) \bar{\varepsilon}_\varphi) \cdot \bar{\varepsilon}_\varphi.$$

Найдем, исходя из критерия максимума внутреннего давления, критическое значение для деформации $\bar{\varepsilon}_\varphi^n$, соответствующее потере оболочки пластической устойчивости. Получим из дифференциального уравнения $p'(\bar{\varepsilon}_\varphi) = 0$ после упрощений

$$\bar{\varepsilon}_\varphi^{\text{кр}} = \frac{n}{K(\gamma_0)}. \quad (18)$$

Подставив это в (17), найдем критическое значение кольцевого напряжения на внутренней стенке $\sigma_\varphi^{\text{кр}}(\gamma_0)$:

$$\bar{\sigma}_\varphi^{\text{кр}}(\gamma) = \frac{(2-3\gamma) \exp n}{\sqrt{3} \sqrt{1-3\gamma+3\gamma^2}} \left(\frac{2-3\gamma}{\sqrt{3}(1-3\gamma+3\gamma^2)K(\gamma)} \right)^n \sigma_B. \quad (19)$$

Для вычисления критического давления следует выражения (18) и (19) подставить в первую из формул (16)

Заметим, что в предельном случае прямой трубы (тонкостенной цилиндрической оболочки), когда $\gamma = 0$, из формул (16), (18) и (19) следует, что коэффициент $K = 2$, $\varepsilon_\varphi^{\text{кр}} = n/2$,

$\sigma_\varphi^{\text{кр}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} (\exp n) \sigma_B$, $p^{\text{кр}} = \frac{t_0}{r_0} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \sigma_B$ – хорошо известные результаты, характеризующие потерю несущей способности цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления.

Литература

1. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
2. Моношков А.Н., Пустин И.А., Сериков С.В. Прочность торových оболочек и отводов при нагружении внутренним давлением // Проблемы прочности. – 1980. – № 5. – С. 112–115.
3. Дильман В.Л., Остсемин А.А. Развитие методики оценки несущей способности равнопрочных тонкостенных торových оболочек и отводов // Заводская лаборатория. – 2002. – Т. 68. – № 3. – С. 47–52.
4. Дильман В.Л. Напряженно-деформированное состояние и пластическая устойчивость торовой разностенной оболочки, нагруженной внутренним давлением // Обзорение прикл. и промышл. матем. – 2001. – Т. 8, в. 2. – С. 585.
5. Дильман В.Л., Остсемин А.А. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность магистральных трубопроводов // Известия РАН. МТТ. – 2000. – № 5. – С. 59–65.

Поступила в редакцию 15 апреля 2003.