УДК 539.43

СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ В РЕОЛОГИИ КОНСТРУКЦИЙ

О.С. Садаков

Приведен сжатый обзор развития одного из научных направлений кафедры «Прикладная механика, динамика и прочность машин» ЮУрГУ. Это – моделирование микронеоднородного неупругого деформирования и разрушения конструкционных материалов и макромоделирование на этой основе неупругого деформирования конструкций (неоднородное напряженно-деформированное состояние). В связи со спецификой обзорной работы мы здесь избегаем подробностей, которые при желании можно найти в прилагаемом списке литературы (выполненном в хронологическом порядке и включающем более ранние обзоры [21, 24, 34, 35]).

1. Прочностные расчеты неупругих конструкций

Актуальность проблемы связана с необходимостью разработки грамотных методов расчетной оценки прочности конструкций, выполненных из пластичных материалов. До сих пор такие расчеты ведутся чаще всего по условию непревышения максимальным напряжением в конструкции допускаемой величины. Естественно, эта величина – и для хрупкой, и для пластичной конструкции – не выходит за предел упругости и расчеты достаточно просты. Однако разрушение конструкции из пластичного материала обычно происходит при значительных пластических деформациях. Исключение составляют потеря жесткости (в частности, устойчивости) и усталость материала при большом числе повторяющихся воздействий, не выходящих за предел упругости.

Правильнее в таких случаях, по-видимому, использовать *основной* критерий прочности – не по напряжениям (вычисляемой реакции конструкции), а по внешнему задаваемому при эксплуатации воздействию. Например, при действии нагрузки P вводят понятие коэффициента запаса прочности $n=P_0/P$ (P_0 – *расчетное* значение разрушающей нагрузки) и условие прочности записывают в виде $n \geq [n]$, где $[n]$– нормативный коэффициент, призванный компенсировать неизбежные ошибки расчета. На это условие прочности полезно взглянуть с другой стороны: оно эквивалентно условию

$$[n]\,P \geq P_0. \qquad (1)$$

Оно означает, что в прочностном расчете нагрузка на конструкцию должна быть задана в $[n]$ раз больше действительной эксплуатационной нагрузки; конструкция прочна только в случае, когда и эта нагрузка (по расчету) не разрушит конструкцию. Таким образом, величина $[n]$ устанавливает соответствие между расчетным и действительным значением разрушающей нагрузки; она обычно заметно выше единицы, что говорит о неоправданном оптимизме расчетчиков, который компенсируется выражением (1).

Условие прочности по максимальным напряжениям, о котором мы упоминали вначале, следует из данного при выполнении в расчетной модели двух условий:

а) максимальное напряжение пропорционально нагрузке;

б) принято, что конструкция разрушится, если в ее единственной точке напряжение достигает предельного значения.

Первое условие отвечает идеально упругой или статически определимой задаче, второе – только статически определимой ферме. В других случаях такой расчет не оправдан. Заметим, что сама техника *опытного* установления значения $[n]$ не позволяет говорить, что расчет по упругим напряжениям идет «в запас прочности».

Разрушение статически неопределимой неупругой конструкции определяется всей историей развития неупругих деформаций и обычно требует расчета их эволюции. Для проведения такого расчета требуется решить следующие основные проблемы:

- Моделирование деформационного поведения неупругого материала (при изотермическом и неизотермическом нагружении, простом и сложном напряженном состоянии, пропорциональном и непропорционально, с выдержками или без).
- Моделирование поведения неупругих конструкций.

- Моделирование накопления повреждений и образования трещин малоцикловой усталости.
- Моделирование развития трещины (стадия живучести).
- Моделирование разрушения детали (оценка критической длины трещины).

Все эти проблемы не только существенно усложняют задачу оценки прочности конструкции, но и пока еще далеко не до конца решены. Не удивительно стремление расчетчиков обойти эти трудности.

2. Модели среды

2.1. Различают три подхода к математическому моделированию: эмпирический (непосредственное описание данных эксперимента), феноменологический (формулировка гипотез о свойствах объекта и их последующая проверка) и онтологический (предположение о скрытых механизмах явления и моделирование этих механизмов).

При моделировании поведения *упругого* материала вполне удобен эмпирический путь, но для неупругого тела он ведет к практически непреодолимым трудностям в связи со сложностью и многоплановостью явления. Феноменологический путь (например, модель идеально пластической или идеально вязкой среды) позволяет получить приблизительное описание неупругих свойств материала, но в большом числе ситуаций модель оказывается чрезмерно примитивной. Наконец, онтологический путь обещает существенно лучшие результаты, но настолько громоздок, что эти прогнозы пока остаются обещаниями.

2.2. Ряд работ русских и зарубежных исследователей подсказал еще одну возможность моделирования реологических свойств материалов, лежащую на границе между феноменологией и онтологией и сочетающую лучшие стороны той и другой. Этот подход, связанный с моделированием *микронеоднородности* среды, дал серию реологических моделей, которые впоследствии были названы структурными.

Гипотеза *однородности* лежит в основе современной механики сплошной среды и в большинстве разделов механики совершенно необременительна, однако в процессах *неупругого* деформирования, как показывают исследования, реальная неоднородность среды (микронеоднородность) оказывается одним из наиболее значащих факторов.

Структурные модели, в отличие от онтологических, моделируют микронеоднородность *формализованно*, в предположении, что она по своей природе не отличается от конструкционной неоднородности. Считается, что элементарный объем однородной сплошной среды работает подобно некоторой конструкции, составленной из подэлементов (ПЭ), как-то связанных между собой и наделенных (феноменологически) некоторыми достаточно простыми реологическими свойствами. Эти связи и эти свойства и отличают одну структурную модель от другой.

2.3. Исходный вариант структурной модели [1–5], предложенный в наших работах (в дальнейшем эта модель называется *базовой*), построен по принципу максимальной простоты. При ее построении нами вначале ставилась задача только очертить круг *свойств* среды, которые могут быть описаны таким образом. Предполагалось сопоставить эти свойства с реальными (в лаборатории кафедры производились испытания многих металлов, большей частью жаропрочных сплавов) и лишь затем определить пути совершенствования модели. В базовой модели, подобно модели Бесселинга [6], тензоры деформаций ПЭ считаются одинаковыми и равными тензору деформации элемента объема. Напряжение последнего вычисляется как среднее по ПЭ. Свойства ПЭ полагаются идеальными (идеальная пластичность, установившаяся ползучесть) и изотропными в девиаторном пространстве. Тем самым свойства каждого ПЭ характеризуются его реологической функцией

$$p'_k = F_k(\sigma_k) \tag{2}$$

– зависимостью интенсивности скорости неупругой деформации от интенсивности напряжения. Здесь k – номер ПЭ. В отличие от модели [6], реологическая функция ПЭ не ограничивается степенным законом. Нам удалось разработать технику идентификации модели при произвольном виде F_k – если считать эти функции подобными:

$$F_k = F(\sigma_k/z_k). \tag{3}$$

Здесь F – «реологическая функция материала» (РФ), коэффициенты z_k – «параметры прочности ПЭ» – идентифицирующие ПЭ константы. Подобие (3) принято в базовой модели. От вида функции F зависит, является материал склерономным или реономным, или неупругая деформация представляет сумму пластической деформации и деформации ползучести. Произвольность РФ сыграла важную роль в дальнейшей эволюции теории – не только для описания деформационных, но и *прочностных* свойств.

2.4. Расчетный и теоретический анализ показали, что *предельные* характеристики однородной (идеальной) модели и неоднородной (базовой) при одной и той же РФ одинаковы: при выдержках с постоянным напряжением скорости установившейся ползучести одинаковы, при деформировании с постоянной скоростью предельные напряжения одинаковы (в обоих случаях напряжение и скорость деформации определяются РФ). Но в остальном (при нестационарном нагружении, то есть практически всегда) это две различные среды: с *памятью* о предыстории и без. Ввиду предельной простоты базовой модели она представляет, по сути, полный отчет о том, как на поведение среды влияет ее неоднородность.

В общих чертах это влияние характеризуется зависимостью текущего значения предела текучести от предыстории – и от пластической, и от вязкой деформаций, а также зависимостью текущей скорости ползучести (кроме текущего значения напряжения) от предыстории – и от пластической, и от вязкой деформации. И пластическое, и вязкое неупругое деформирование «упрочняет» среду (уменьшается скорость ползучести, возрастает предел текучести), но это упрочнение анизотропно: смена знака нагрузки обнаружит, что скорость ползучести увеличилась, а предел текучести уменьшился. Подобные эффекты характеризуют термином «анизотропное упрочнение» (его же называют *деформационным*). Таким образом, известная первая стадия на кривой ползучести относится к этой же группе эффектов. Структурная модель позволяет отчетливо увидеть, что эти эффекты, называемые также эффектами памяти материала от предыстории нагружения, связаны с перераспределением микронапряжений в среде в связи с неоднородностью микропластических деформаций (термин «микро» здесь относится не к величине напряжений или деформаций, а к «величине» ПЭ).

2.5. Сопоставление с экспериментами показало, что для адекватного описания и диаграмм повторно-переменного деформирования, и кривых ползучести при практически произвольной истории нагружения во времени *достаточно* базовой модели – если материал циклически стабилен, то есть отсутствуют *изотропное* упрочнение или разупрочнение [8]. Адекватность модели до сих пор превышает известные феноменологические подходы. Это позволяет полагать, что микронеоднородность не просто влияет на деформационные свойства материалов, но ее роль оказывается определяющей в основных эффектах памяти среды о предыстории нагружения. Материальным носителем этой памяти являются микропластические деформации. Заметим сразу, что совершенно аналогичные свойства обнаруживаются и у конструкций и по совершенно аналогичным причинам.

2.6. Важная роль микронапряжений в реологических свойствах особенно заметно проявляется в эффектах *непропорционального* нагружения – при задании ПЭ простейшего свойства идеальной пластичности с поверхностью текучести Мизеса [9], [10]. Обнаруживается изменение «поверхности текучести» – ее формы и размеров, неортогональность приращения неупругой деформации к этой поверхности (при сохранении устойчивости материала), кросс-эффект Баушингера и другие закономерности, наблюдаемые в испытаниях и практически не поддающиеся феноменологическому описанию.

2.7. Использование модели позволяет определять РФ материалов не только по данным установившейся ползучести, но и по кривым неустановившейся ползучести, кривым деформирования, кривым релаксации [18]. Естественно, диапазон аргументов при этом оказывается значительно шире, чем в стандартных испытаниях на установившуюся ползучесть. Было обнаружено что практически во всех сталях отчетливо различаются два (в доступном для наших экспериментальных установок диапазоне скоростей) механизма ползучести [22], что можно отразить выражениями

$$F = A_1\sigma^{n1} + A_2\sigma^{n2} \quad \text{или} \quad F = A_1\exp(B_1\sigma) + A_2\exp(B_2\sigma) \qquad (4$$

– в зависимости от того, в какой шкале – полулогарифмической или двойной логарифмической – данные опытов лучше ложатся на билинейную кривую. Оба механизма имеют отчетливо *реономный* характер, то есть это два вида ползучести. Мы полагаем, что неупругая деформация всегда реономна, а склерономная деформация представляет лишь идеализацию (часто весьма удобную) реального поведения материала. Это становится почти очевидным при рассмотрении термофлуктуационного механизма неупругой деформации.

Даже при нормальной температуре материалы реономны, хотя здесь удобнее ввести предельное значение напряжения и ограничить ползучесть (соответствующим выбором РФ) лишь небольшим диапазоном в окрестности этого значения. Это относится к ПЭ; для модели в целом мы обнаруживаем ограниченную реономность практически при любом напряжении. Таким образом весьма адекватно отражается явление циклической ползучести (и циклической релаксации) при несимметричном мягком (жестком) циклическом нагружении [7].

2.8. Важнейшим этапом развития подхода было обобщение модели на *неизотермическое* нагружение. И здесь простейшее допущение о том, что с температурой изменяется лишь реологическая функция (и константы упругости) привело к получению относительно простой, но вполне адекватной для металлических сплавов (со стабильной структурой) модели [12]. Выяснилось, что в выражениях (4) от температуры существенно сильнее зависят множители A_i, чем остальные. Это, на наш взгляд, подтверждает, что слагаемые в (4) соответствуют физически различающимся механизмам неупругого деформирования (возможно, внутризеренному или межзеренному смещению атомов) и участки реологической функции с различными наклонами отвечают преобладанию одного механизма над другим. Позже для описания накопления поврежденности, приводящей к малоцикловой усталости, была построена модель, в которой фигурируют два вида поврежденности, отвечающие этим двум механизмам. Экспериментальная проверка показала хорошую адекватность модели [16, 20]. Добавим, что неизотермическое неупругое деформирование, как и непропорциональное, феноменологически не удается описать сколько-нибудь корректно.

2.9. При анализе распределения напряжений в ПЭ при *пропорциональном* нагружении базовой модели было обнаружено его подобие распределению при начальном нагружении. Отсюда следуют принцип Мазинга и его обобщение на неизотермическое нагружение вязкого материала [14, 28]. Это обобщение представляет уравнение состояния (УС) в параметрах всего ансамбля ПЭ. Оно потребовало введения двух новых параметров состояния материала (S – относительный суммарный вес ПЭ, вошедших в существенно неупругое деформирование и s – их относительная нагруженность) и специальных правил памяти о предыстории, определяемых значениями этих параметров и позволяющих найти $\{S, s\}$ по диаграммам деформирования на плоскости $\{\varepsilon, \sigma\}$. Оказалось, что текущее значение скорости неупругой деформации однозначно определяется этими параметрами и текущим значением температуры – если пренебречь их небольшими отклонениями от УС, приводящими к циклической ползучести. Из одного уравнения состояния с единых позиций мы получаем кривые деформирования и кривые ползучести при произвольных программах повторно-переменного нагружения, включая неизотермическое. Сопоставление этих кривых между собой выявило систему закономерностей, связывающих быстрое неупругое деформирование и ползучесть при выдержках, характеризующих определенное *подобие* кривых, названную принципом подобия (ПП). Именно с помощью ПП удается для идентификации модели конкретного материала использовать неустановившуюся ползучесть или релаксацию, или нагружение с постоянной скоростью деформации или напряжения. Это позволило расширить диапазон аргументов РФ, выявляемой экспериментально и, в частности, обнаружить два механизма ползучести (п.2.7).

2.10. Структурная модель оказалась исключительно удобным инструментом для решения проблемы описания неупругого деформирования *физически анизотропных* сред. Для обычного феноменологического подхода (с введением внутренних параметров состояния и определяющих функций для них) задача описания деформационной анизотропии на фоне физической практически неразрешима. Но в структурной модели подэлементы не обладают деформационной анизотропией. Следовательно, достаточно отказаться от постулата изотропии для ПЭ и ввести соответствующие поверхность текучести – для склерономных свойств и потенциал ползучести – для реономных. Тем самым вводится физическая анизотропия, а деформационная получается автоматически, благодаря совместной работе пакета ПЭ с различающимися значениями коэффициента прочности z. Разработаны конкретные варианты потенциалов пластичности и ползучести в шестимерном пространстве напряжений для материалов ортоизотропных (соответствующих симметрии куба – если изотропию сравнивать с симметрией сферы), трансверсально изотропных (цилиндическая симметрия), ортотропных (симметрия спичечного коробка). Идеология построения потенциалов наследует *постулат изотропии* А.А.Ильюшина, который в анизотропных телах переходит в постулаты *симметрии*: потенциалы пластичности и ползучести обладают той же симметрией, что и потенциал *упругости* [29, 31].

К сожалению, отсутствие экспериментальных данных не позволило верифицировать модель. Полагаем все же, что такой подход позволит получить разумные результаты при минимальном усложнении модели.

2.11. Для описания *изотропного упрочнения*, существенно влияющего на свойства некоторых материалов на первых циклах нагружения, базовая модель была усложнена введением зависимости F_k от параметра Удквиста подэлемента (и позднее еще от времени – для отражения снятия изотропного упрочнения при выдержках)[11]. Проверки показали, что такое описание корректнее, чем введение зависимости диаграммы деформирования от номера цикла.

2.12. Интересен пример использования структурной модели для моделирования конструкционного *графита*, который долгое время считался хрупким. Деформация, при которой графит разрушается, действительно довольно мала, но упругая и пластическая деформации при этом имеют один порядок, и модель линейной упругости совершенно не адекватна. Была разработана структурная модель графита, которая обладала следующими особенностями: разносопротивляемость на растяжение и сжатие; нелинейность упругих свойств; влияние накапливаемого повреждения на деформационные свойства; квазистатический критерий разрушения; физическая анизотропия (трансверсальная изотропия, то есть цилиндрическая симметрия деформационных свойств, связанная с особенностями технологии изготовления графита и, в отличие от обычной трансверсальной изотропии, характеризующаяся одинаковыми свойствами при сдвигах вдоль и поперек оси цилиндра). Экспериментальное определение критерия статического разрушения показало, что соответствующее эквивалентное напряжение при сложном нагружении, кроме квадратичного, содержит и линейное по напряжению слагаемое [41].

2.13. Принципиально новое решение пришлось принять при моделировании *термопластов* [42]. Если раньше разброс свойств между ПЭ характеризовался одним параметром «прочности» z_k, то здесь мы вынуждены были добавить температурный параметр T_{ck}. Это было связано с обнаруженными при анализе экспериментальных данных двумя обстоятельствами. Во-первых, оказалось, что свойством подобия (3) здесь не обойтись; подэлементы пришлось разделить на две группы с заметно отличающимися РФ (двухфазная среда). Для контрастности одну из фаз мы считаем склерономной. Во-вторых, с ростом температуры соотношение «весов» фаз меняется, материал становится все более вязким. Для описания этого была введена своя для каждого ПЭ величина T_{ck} – температура, при которой ПЭ переходит в другую фазу. При поисках путей идентификации модели возникла серьезная проблема определения функции плотности распределения с двумя аргументами. Для ее решения необходимы подробные экспериментальные исследования при повторно-переменном неизотермическом нагружении с проверкой гипотез относительно характера этой функции. Имеющихся пока данных совершенно недостаточно даже для приближенных качественных прогнозов.

3. Модели конструкций

3.1. Параллельно с моделированием материала (и постепенно его вытесняя) мы вели работы по моделированию *конструкций*, то есть тел, находящихся в неоднородном напряженно-деформированном состоянии. При анализе различных путей решения краевой задачи неупругого деформирования (вначале – в геометрически линейной постановке) нам показалось возможным свести численные методы к одной схеме: матричной модели конструкции, в которой все переменные и константы формулируются в виде матриц. Для построения такой модели по разным причинам выбран метод смещений: геометрические соотношения строятся на основании кинематических гипотез, условия равновесия – на основе принципа возможных перемещений, матричные «физические» уравнения основаны на искусственном разделении деформации ε на слагаемые ϑ, p, r – тепловые, неупругие и упругие. Расчеты ведутся шагами по времени нагружения, но искомыми являются не *приращения* напряжений и деформаций, а их *текущие значения*; только неупругая деформация определяется как сумма приращений. Для расчета последней используется в основном базовая структурная модель [15].

3.2. Как отмечалось, практическому использованию прочностных расчетов, основанных на моделях неупругой среды, мешает их относительно высокая трудоемкость. Естественно, это относится и к данной модели конструкции. Однако существуют уже и еще отыскиваются пути ускорения таких расчетов. Этот процесс можно назвать *макромоделированием* – моделированием модели. В качестве оригинала для моделирования мы используем матричную модель. Макромоделирование, как и обычное моделирование, может быть эмпирическим, феноменологическим или онтологическим, требует анализа моделируемого объекта и экспериментальных исследований, но эксперименты производятся не в лаборатории, а на компьютере.

3.3. Для анализа поведения конструкции была разработана *векторная интерпретация* матричной конструкции – представление матриц-столбцов деформаций ε, r, ϑ, p в виде векторов n-мерного евклидова пространства D, метрика которого имеет энергетический смысл ($r\cdot\varepsilon$ – работа напряжений, отвечающих упругим деформациям r, на деформациях ε). Условие совместности деформаций означает принадлежность вектора ε m-мерному подпространству C ($m<n$). Остальные векторы могут быть несовместными; они раскладываются на ортогональные «совместные» и «самоуравновешенные» составляющие (например, $r = r_c + r_y$). Из условий равновесия следует однозначная зависимость вектора r_c от текущих значений обобщенных сил Q_i. Конструкция из идеально вязких ПЭ может рассматриваться как более сложная идеально вязкая конструкция; полагаем, что скорость неупругой деформации зависит от r и нормальна поверхностям равных потенциалов ползучести. Потенциал центрально симметричен и является выпуклым.

3.4. Анализ поведения конструкции выявил те же свойства деформационного анизотропного упрочнения, что наблюдались и в структурной модели; они связаны с эволюцией вектора $r_y = -\vartheta_y - p_y$, неупругая составляющая которого зависит от предыстории и определяет «память» конструкции. Любое несовместное изменение вектора p ведет к такому изменению r_y, которое отвечает *уменьшению потенциала* ползучести. С этим, в частности, связаны переход из нестационарной ползучести в стационарную и стабилизация поведения конструкции при циклическом нагружении. Если в структурной модели материала имеется *идеально упругий* ПЭ (а именно к такому выводу мы приходим, анализируя экспериментальные кривые деформирования и ползучести на участках до начала заметного накопления поврежденности или потери устойчивости), то стационарный циклический процесс (СЦП) при регулярном нагружении всегда представляет *знакопеременное* неупругое деформирование (возможно, с исчезающе малым размахом p) на фоне односторонне *накопленной* деформации, рост которой прекратился (возможно, через очень большое число циклов). При малых изменениях модуля упругости с изменением температуры размахи неупругой деформации в объемах конструкции («циклическая» часть реакции конструкции) мало зависят от постоянных составляющих нагрузки и температуры; это может быть использовано для упрощения расчетов.

3.5. Названные и другие выявленные особенности поведения конструкций, в том числе в ряде частных ситуаций, подсказали несколько *направлений* макромоделирования. Одно из них связано с уменьшением *степени подвижности* конструкции m. В инженерных расчетах основную роль играет деформирование по нескольким наиболее актуальным формам деформационной подвижности, тогда как желание подробнее описать эволюцию неупругих деформаций заставляет увеличивать размерность n полей деформации. При использовании метода конечных элементов (МКЭ) эти две величины обычно тесно связаны. Однако в матричной модели кинематические гипотезы формулируются независимо от дискретизации полей напряжений и при сохранении размера n число m может быть сильно снижено [13, 19]. Та же идея используется в модификации МКЭ [17]: произведя серию пробных расчетов, находим несколько наиболее существенных для данной конструкции и для данного вида нагружения полей деформаций, и основные расчеты ведем в сильно сокращенном совместном пространстве (m=3–6). Более того, возможно предварительное ортонормирование базиса этого пространства, тогда матрица жесткости конструкции становится единичной и решение краевой задачи не требует решения системы алгебраических уравнений.

3.6. Другой путь упрощения расчетов связан со снижением *размерности* матриц-столбцов переменных напряжений и деформаций n. Довольно типична ситуация, когда деталь работает упруго, кроме некоторой зоны повышенных напряжений. Матричный анализ показывает, что вместо всей конструкции достаточно рассмотреть эту зону, причем в качестве внешнего воздействия выступает история *фиктивных* напряжений в этой зоне (так в теории приспособляемости называют напряжения в линейно-упругой конструкции той же геометрии при той же программе изменения нагрузок и температур). Решив предварительно термоупругую задачу (историю фиктивных деформаций во всей конструкции), выделяем часть ее, относящуюся к *неупругой* зоне, и с использованием предварительно найденной матрицы влияния неупругой деформации рассчитываем кинетику деформирования неупругой зоны. Практическая реализация методики варьируется в зависимости от конкретной задачи. Предельным ее случаем является подход Нейбера расчета по фиктивному напряжению в *одной* – опасной – точке конструкции.

3.7. Большая часть неупругих расчетов относится к циклическому нагружению. Разбивая каждый цикл на сотни шагов, просчитывают эволюцию неупругих деформаций, изменяющихся от цикла к циклу до тех пор, пока эти изменения перестанут быть существенными (достижение СЦП)– иногда в течение сотен циклов. Однако в ряде случаев из анализа модели среды можно получить *физические уравнения*, характеризующие поведение материала в *стабилизированном* цикле. Если их дополнить статическими и геометрическими, то можно получить полную систему уравнений для *прямого расчета*, минующего начальные, переходные циклы [27, 37]. Для простейшего случая быстрого циклического неизотермического нагружения между двумя экстремальными состояниями нагрузки и температуры из анализа структурной модели получены такие физические уравнения. Расчет СЦП с их помощью сводится к решению краевой задачи для двух экстремальных моментов цикла итерациями по одновременному определению двух полей неупругой деформации в экстремальных состояниях конструкции (метод двух состояний). Если же пренебречь влиянием температуры на упругие свойства или изменение температуры в цикле несущественно, то расчет еще проще. Это два последовательных расчета: для размахов напряжений и деформаций – по заданным размахам нагрузки – и затем для односторонне накопленных деформаций – по статическому воздействию и по размахам, найденным в предыдущем расчете (метод двух расчетов). При вполне корректном описании петель пластического гистерезиса расчет ускоряется на порядки.

3.8. Если нагружение близко к пропорциональному $Q_i=F(t)Q^*_i$ (Q^*_i – константы, t – время) или к циклически пропорциональному, когда пропорционально изменяется только переменная составляющая воздействия), то для конструкции выполняются соотношения подобия, частный случай которых представляет принцип подобия, обнаруженный при анализе поведения структурной модели (ПП, п.2.9). Изменения поля напряжений после реверса практически подобно одному из полей напряжений при базисном начальном нагружении. В структурной модели это позволило перейти от уравнений состояния для подэлементов к уравнениям состояния для элемента объема. В конструкции также возможна интеграция: вместо расчета полей напряжений и деформаций можно использовать уравнение состояния, формулируемое в параметрах обобщенных сил и обобщенных координат. С его помощью могут быть описаны процессы деформирования конструкции при разгрузках, новых нагружениях, выдержках и т.д. В публикации на эту тему [32] были предложены два варианта УС – для мягкого (силового) и для жесткого нагружения. Последующие исследования показали, что более актуальный вариант – для силового нагружения – в приведенном виде, к сожалению, некорректен. Правильная формулировка УС требует введения условного кинематического параметра w – например, $w=q_iQ^*_i$, где q_i – обобщенные координаты конструкции. Эта обобщенная «обобщенная координата» позволяет вычислять работу внешних сил dA по формуле $dA = F{\cdot}dw$. Базисная кривая деформирования $F=f(w)$ должна быть получена при выбранном постоянном значении $dw/dt=v_b$. Естественно, это требует специального расчета конструкции; в этом и состоит идентификация обобщенной модели. Далее для заданной истории нагружения $F(t)$ используется УС:

$$dw_p/dt=\Phi(s)(K-f'(w_*/\kappa))v_b/K,\quad w_p\equiv w-F/K,\quad K\equiv f'(0),\quad f'(x)\equiv df/dx,\quad w_*\equiv w-w_r,\quad s\equiv\kappa+s_r, \tag{5}$$

где $\Phi(s)$ – РФ материала, приведенная к безразмерному виду, индекс r отмечает значение параметра в момент последнего реверса, κ – параметр, определяемый текущими значениями изменений w_* и $F_*\equiv F-F_r$ (из выражения $F_*= \kappa f(w_*/\kappa)$) и правилами памяти – такими же, как и для УС материала [21].

3.9. Приведенное УС и правила памяти отличаются только обозначениями от соответствующих соотношений для материала. Это подсказывает новую возможность: чтобы не программировать УС и сложные правила памяти, в интеграции можно сделать шаг назад и снова ввести ПЭ – но уже для получения структурной модели конструкции (СМК). Она отличается от базовой модели только обозначениями ($w\sim\varepsilon$, $F\sim\sigma$, $w_p\sim p$, $K\sim E$). Ее идентификация производится по кривой $F=f(w)$ так же, как идентификация базовой модели по кривой деформирования. Но если модель материала годится для любого расчета конструкции из этого материала, то СМК годится только для данной конструкции при данном виде нагружения (Q^*_i). При изменении ситуации необходим новый идентификационный расчет – однократное нагружение – для получения новой кривой f.

3.10. Несколько иная структурная модель конструкции может быть получена следующим образом. Если каждый элемент объема детали моделируется пакетом из N ПЭ с весами g_k и параметрами «прочности» z_k, то ПЭ можно объединить не по элементам объема, а по номерам k. Тогда конструкция предстанет в виде параллельного пакета из N подконструкций (ПК) из идеального материала, занимающего весь объем детали. Рассчитав поведение одной ПК (например, со значением коэффициента прочности, равным 1), из соображений подобия можно предсказать поведение остальных (при нагрузке, в z_k раз более высокой, деформации во всех точках ПК в z_k раз выше). Этот прием мы использовали при расчетах с помощью пакетов МКЭ, в которые не удается включить структурную модель [43]. В частности, таким путем можно получать диаграмму деформирования материала не из испытаний образцов, а из испытаний конструкции (например, изгиб балки: диаграмма деформирования идеально пластической балки в координатах «момент – кривизна» хорошо известна). Это позволяет, например, оценивать влияние технологии изготовления детали на свойства материала.

3.11. Сразу несколько путей макромоделирования пересекаются на задаче о расчете детали с зоной концентрации напряжений (макромодель слабой точки конструкции – МСТ). С одной стороны, ввиду локализации неупругой деформации в окрестности опасной точки детали x_0, можно использовать подход Нейбера (п. 3.6), в котором внешнее воздействие сводится к фиктивному напряжению в точке x_0. С другой стороны, по той же причине малости зоны неупругих деформаций при достаточно произвольной истории внешних нагрузок (и температурных полей) история фиктивных напряжений в точке x_0 близка к пропорциональной. Это означает возможность перехода к обобщенным координатам (п. 3.8). В качестве параметра нагрузки F, таким образом, должна выступить скалярная мера фиктивного напряжения в x_0, (или, чтобы временно опустить зависимость модуля упругости от температуры, скалярная мера упругой деформации) – интенсивность тензора, умноженная на знак наиболее существенной координаты тензора. В качестве кинематического параметра w мы обычно брали скалярную меру упругопластической деформации в опасной точке [23, 26, 36, 38]. Используя кривую деформирования, с помощью формулы Нейбера (или ее модификаций) получали диграмму $F=f(w)$ и далее для заданного внешнего воздействия, пересчитанного в историю $F(t)$, находили историю деформации $w(t)$ из УС (5). Зная кривую деформирования материала и историю деформаций, повторным расчетом находили историю неупругих деформаций, необходимую для оценки работоспособности детали.

Однако, пользуясь принципом подобия (п. 3.8), можно процедуру еще упростить. Вместо деформации в опасной точке в качестве кинематического параметра можно взять сумму $w=F+P$, где P – скалярная мера неупругой деформации в точке x_0. Зная кривую деформирования материала и используя формулу Нейбера, нетрудно получить этот вариант кривой деформирования конструкции. Далее в расчете по УС величина w_p сразу представляет искомую неупругую деформацию (модуль K при этом равен единице).

Заметим, что при наличии пакета МКЭ использовать формулу Нейбера нет необходимости. Для определения кривой $F=f(w)$ можно использовать МКЭ, задав материал нелинейно-упругим с нужной диаграммой деформирования. Ряд расчетов с возрастающей нагрузкой определит кривую f более надежно, чем известные модификации.

Естественно, имея кривую f, можно вместо УС использовать структурную модель конструкции; расчет опять сведется к расчету по базовой модели. В случае неизотермического деформирования, когда кроме истории $F(t)$ задается история температуры $T(x_0,t)$, расчет по базовой модели заметно более удобен. Наконец, если число опасных точек больше одной, то для данной детали можно построить несколько независимых макромоделей, чтобы оценить прочность каждой опасной зоны в отдельности. Однако если неупругие деформации в разных зонах влияют друг на друга, то предлагаемая модель может оказаться неверной.

4. Малоцикловая усталость и живучесть

Мы отмечали, что структурная модель в отличие от онтологических моделей не отображает реальные механизмы деформирования поликристаллических материалов, она лишь помогает увидеть некоторые среднестатистические закономерности. Когда было получено весьма универсальное уравнение состояния, характеризующее пластичность и ползучесть при повторно-переменном нагружении, с выдержками и без (п. 2.9), стало очевидно, что выявленные таким образом параметры состояния S и s, являющиеся аргументами в УС, действительно имеют отношение к наиболее важным средним характеристикам, определяющим состояние материала. Возникла надежда, что эти параметры могут определять не только ползучесть, но и накопление повреждений в материале. Более того, после выявления двух механизмов (п. 2.7) неупругого деформирования (и в связи с имеющейся в литературе информацией) мы предположили, что каждому механизму ползучести соответствует определенная поврежденность. Механизму, приближающемуся к склерономному деформированию (для краткости мы его называем пластическим) соответствует необратимое накопление повреждений, более вязкому – частично обратимое («залечивание» при ползучести в сжатие). Была разработана техника идентификации модели, проведены экспериментальные исследования при малоцикловой усталости (МЦУ) – в том числе неизотермические, с выдержками; адекватность модели (за разрушение принималось появление трещины длиной 1...1,5 мм) оказалась вполне удовлетворительной [25, 30].

В связи с использованием параметров состояния, характерных для пропорционального нагружения, модель МЦУ ориентирована на пропорциональное нагружение. В последнее время ведется работа по обобщению модели МЦУ на непропорциональное нагружение и на большое число циклов. Вместо пластических деформаций мы анализируем гипотетические микропластические деформации (неупругие деформации, возникающие при напряжениях, существенно меньших предела текучести); идеология модели в определенной мере наследуется из модели МЦУ.

Ту же модель МЦУ мы предполагаем использовать и для оценки живучести конструкции [33, 39]. Почти очевидно, что в момент образования усталостной трещины материал в ее окрестности также заметно поврежден, и при последующем циклическом нагружении его поврежденность продолжает расти (тем более что в устье трещины возникает заметная концентрация напряжений и, главное, неупругих деформаций). Можно предположить, что продвижение устья трещины до новой точки детали определяется тем же, что и для МЦУ, критерием: поврежденность материала (определяемая тем же, что и ранее, уравнением состояния) в этой точке достигает (возможно, того же) критического значения. В этом случае для расчета скорости роста трещины необходимо просчитывать эволюцию неупругих деформаций и накопления повреждений на всей предполагаемой траектории развития трещины. Это весьма громоздкая процедура, она еще более, чем расчет МЦУ, нуждается в макромоделировании; последняя работа еще впереди. Здесь необходимы теоретический анализ, расчетные исследования, соответствующий анализ экспериментальных данных и, возможно, использование для сокращения трудоемкости расчетов соотношений автомодельности и подобия полей НДС в окрестности растущей трещины. Можно надеяться, что и в этой работе будет полезна структурная модель среды.

Литература

1. Иванов И.А., Садаков О.С. Моделирование неоднородности при описании неизотермического деформирования реальных материалов // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1970. – № 10. – С. 42–46.

2. Садаков О.С. К описанию некоторых реономных свойств конструкционных материалов при нормальной температуре // Вопросы прочности и динамики конструкции: Труды ЧПИ. – Челябинск, ЧПИ, 1971. – № 92. – С. 33–38.

3. Кононов К.М., Ребяков Ю.Н., Садаков О.С. Экспериментальная проверка возможности использования структурной модели для описания переменного нагружения конструкционного материала при повышенной температуре // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1971. – № 11. – С. 140–143.

4. Gokhfeld D.A., Kononov K.M., Sadakov O.S. Behaviour features of metals under cyclic deformation at high temperatures and the possibility of their mathematical interpretation // Proc. 4th Conf. on Dimensioning and Strength Calc. – Budapest: Akademiai Kiady, 1973. – P.47–61.

5. Садаков О.С. Анализ напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при циклических неизотермических нагружениях на основе структурной модели среды// Всесоюзный симпозиум по малоцикловой усталости при повышенных температурах. – Челябинск, 1974. – Вып.3. – С. 95–126.

6. Бесселинг Дж.Ф. Теория упруго-пластических деформаций и деформаций ползучести первоначально изотропного материала, обнаруживающего анизотропию деформационного упрочнения, последействия и ползучести // Иностр. лит. Механика, сб. переводов.– 1959. – № 5. – С. 57–73.

7. Мартыненко М.Е., Садаков О.С. О циклической ползучести конструкционных материалов при нормальной температуре // Сб. научн. тр. ЧПИ. – Челябинск, 1974. – № 151. – С. 108–112.

8. Исследование некоторых особенностей взаимного влияния пластической деформации и ползучести стали Х18Н9Т / К.М. Кононов, Е.Т. Кульчихин, Ю.Н. Ребяков, О.С. Садаков // Машиноведение. – 1975. – № 2. – С. 59–61.

9. Гохфельд Д.А., Иванов И.А., Садаков О.С. Описание эффектов сложного нагружения на основе структурной модели среды // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 171–183.

10. Gokhfeld D.A., Sadakov O.S. A mathematical model of medium for analysing the inelastic deforming of structures subjected to repeated actions of load and temperature // Trans. 3rd Int. Conf. Str. Mech. React. Techn. – London, 1975. – V. 5. – P.L5.7/1–L5.7/10.

11. Мадудин В.Н., Садаков О.С. К использованию структурной модели для отражения деформационных свойств циклически нестабильной реономной среды// Сб. научн. тр. ЧПИ. – Челябинск, 1977. – № 201. – С. 46–48.

12. Gokhfeld D.A., Martynenko M.E., Sadakov O.S. On the adequacy of the structural model of elasto-visco-plastic medium under variable repeated nonisothermal loading// Proc. 4th Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Techn. – San Francisco, 1977. – V. L. – P.L5.7/1–L5.7/8.

13. Садаков О.С. Использование базисных функций в расчетах кинетики деформирования конструкций // Прочность машиностроительных конструкций при переменных нагружениях: Сб. науч. тр. ЧПИ. – Челябинск, 1979. – № 236. – С.49–58.

14. Кульчихин Е.Т., Мартыненко М.Е., Садаков О.С. Расширенный принцип Мазинга для описания кривых неизотермического деформирования при испытаниях с выдержками // Проблемы прочности. – 1979. – № 11. – С.46–48.

15. Порошин В.Б., Садаков О.С. Матричный метод расчета кинетики неупругого деформирования диска газовой турбины // Проблемы прочности. – 1982. – № 8. – С. 18–22.

16. Кононов К.М., Порошин В.Б., Садаков О.С. К описанию усталостного повреждения материала при неупругом нагружении с выдержками // Проблемы прочности. – 1982. – № 7. – С. 23–26.

17. Мадудин В.Н., Садаков О.С. Модификация метода конечных элементов применительно к расчету неупругого деформирования конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности, вып. 20. – Горький: ГГУ, 1982. – С. 24–29.

18. Расчеты и испытания на прочность. Расчетные методы определения несущей способности элементов машин и конструкций. МР 60-82. Метод определения параметров кривых ползучести и накопления повреждений при одноосном нагружении / Д.А. Гохфельд, Е.Т. Кульчихин, О.С. Садаков и др. // Методические рекомендации ВНИИНМАШ. – М, 1982. – 91 с.

19. Несмеянов А.С., Садаков О.С. Векторный метод расчета кинетики неупругого деформирования конструкций с применением структурной модели среды // Прочность машин и аппаратов при переменных нагружениях: Сб. тр. ЧПИ. – Челябинск, 1983. – С.75–81.

20. К оценке долговечности при неизотермическом малоцикловом нагружении с выдержками / Д.А. Гохфельд, К.М. Кононов, В.Б. Порошин, О.С. Садаков // Машиноведение. – 1983. – № 4. – С. 72–77.

21. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. – М.: Машиностроение, 1984. – 256 с.

22. Кульчихин Е.Т., Садаков О.С. О двух механизмах неупругого деформирования конструкционных материалов // Проблемы прочности. – 1985. – № 6. – С. 25–28.

23. Кульчихин Е.Т., Садаков О.С. К построению номограмм для определения размаха неупругой деформации в зоне концентрации напряжений // Прочность машин и аппаратов при переменных нагружениях: Тематический сборник научных трудов. – Челябинск: ЧПИ, 1986. – С. 22–25.

24. Садаков О.С. Анализ общих закономерностей поведения неупругих конструкций и методы расчета // Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций: Сб. науч. трудов. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. – С. 124–129.

25. К описанию малоцикловой усталости при сложном напряженном состоянии с учетом ползучести / Д.А. Гохфельд, К.М. Кононов, В.Б. Порошин, О.С. Садаков // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1986. – С. 89–93.

26. Гохфельд Д.А., Кульчихин Е.Т., Садаков О.С. Повторно-переменное неупругое деформирование в зоне концентрации напряжений // Машиноведение. – 1987. – № 2. – С. 37–43.

27. Апайчев М.В., Садаков О.С. Прямой расчет стационарного циклического состояния трубки теплообменника// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Всесоюзн. межвуз. сб. – Горьк. ун-т, 1989. – С.12–16.

28. Гохфельд Д.А., Кульчихин Е.Т., Садаков О.С. Закономерности подобия в реологических свойствах материалов при повторно-переменных нагружениях // Проблемы прочности. – 1989. – № 3. – С. 21–25.

29. Apajchev M.V., Madudin V.N., Sadakov O.S. On mathemaical modelling of inelastic deformation behavior of anisotropic media// Trans. 10th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology. – Anaheim, USA, 1989. – Vol. L. – P.25–29.

30. Gokhfeld D.A., Kononov K.M., Poroshin V.B., Sadakov O.S. Coupled mathematical models for cyclic inelastic deformation and damage accumulation processes// Trans. 10th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology. – Anaheim, USA, 1989. – Vol. L. – P. 19–24.

31. Sadakov O.S., Madudin V.N., Apajchev M.V. On the state equations for anisjtropic elasto-visco-plastic bodies// Creep in Structures: IUTAM Simp.:Cracow, Poland, 1990.– Springer-Verlag; Berlin; Heidelberg, 1991. – P.179–185.

32. Gokhfeld D.A., Sadakov O.S. Generalized similarity principle for plasticity and creep analysises of structural elements// Trans. 11th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (August 1991). – Tokio, Japan, 1991. – Vol. L. – P. 581–592.

33. Gokhfeld D.A., Poroshin V.B., Sadakov O.S. Plasticity and creep, LCF and crack propagation processes: related state equation// Trans. 11th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (August 1991). – Tokio, Japan, 1991. – Vol. L. – P. 283–288.

34. Садаков О.С., Гохфельд Д.А. Концепция микронеоднородности в реологии конструкций // Динамика, прочность и износостойкость машин (Международный журнал на электронных носителях). – 1995. – Апрель. – Вып. 1. – С. 16–21.

35. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Семейство структурных моделей для описания деформирования и разрушения материалов различного типа// Динамика, прочность и износостойкость машин (Международный журнал на электронных носителях). – 1995. – Апрель. – Вып. 1. – С.9–15.

36. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Анализ неупругого деформирования в области концентрации напряжений при повторных нагружениях// Сборник трудов ЦКТИ им. Ползунова (Специальный выпуск, посвященный памяти проф. Л.М. Качанова). – СПб: Машиностроение, 1995.

37. Gokhfeld D.A., Sadakov O.S.Steady cyclic state of a structure: methods of its direct determination// Inelastic Behavior of Structures under Variable Loads. – Kluwer acad.pub., 1995. – P.449–461.

38. Gokhfeld D.A., Poroshin V.B., Sadakov O.S. On LCF Lifetime Prediction in the Case of Stress Concentration Zone// Trans. IV Int. Conf. on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications (COMPLAS). – Barcelona: Spain, 1995. Pineridge Press, Swansea,U.K. – 6 p.

39. Садаков О.С., Порошин В.Б. Математическое моделирование процессов накопления повреждения и роста трещины при малоцикловом нагружении // Динамика, прочность и износостойкость машин: Междунар. журн. на электрон. носителях. – 1996. – Вып. 2. – С. 46–53.

40. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении (Справочник)/ Д.А. Гохфельд, Л.Б. Гецов, К.М. Кононов и др. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1996.– 408 с.

41. Ивашков И.А., Мартыненко М.Е., Садаков О.С. Экспериментальное определение и математическое описание поверхности разрушения графита при непропорциональном нагружении // Динамика, прочность и износостойкость машин: Междунар. журнал на электронных носителях. – 1996. – Вып. 2. – С.24–28.

42. Асташкин В.М., Ершов А.Л., Садаков О.С. Структурная модель деформационных свойств поливинилхлорида при повторно-переменном неизотермическом нагружении // Известия вузов. Строительство. – 1997. – № 6. – С.144–148.

43. Малоцикловое разрушение в зонах концентрации напряжений: расчет и эксперимент/ Д.А. Гохфельд, А.Н. Петров, В.Б. Порошин и др. // II-я международная конференция «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности металлоконструкций и методы их решения»: Сб. докладов. – СПб: Изд. СПбГТУ, 1997. – С. 28–30.

Поступила в редакцию 15 апреля 2003 г.