Математика

УДК 517.53

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ДЛЯ ПРЕДПОСЛЕДНЕЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СТРОКИ

В.М. Адуков

Пусть $a(z)$ – мероморфная функция, имеющая в круге $|z|<R$ точно λ полюсов. В работе изучается асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде для $(\lambda-2)$-й строки (предпоследней промежуточной строки) таблицы Паде функции $a(z)$ в случае одного доминирующего полюса. Используется метод, разработанный ранее автором для последней промежуточной строки.

1. Введение

Пусть $a(z)$ – функция, мероморфная в круге $D_R=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z|<R\right\}$ и аналитическая в начале координат. Пусть $z_1,\dots,z_\ell$ ее различные полюсы кратностей $s_1,\dots,s_\ell$, соответственно, и $\lambda=s_1+\dots+s_\ell$ – число ее полюсов в D_R. Пусть $\rho\equiv|z_1|=\dots=|z_\mu|>|z_{\mu+1}|\ge\dots\ge|z_\ell|$.

Если $m=\sum_{j=1}^{\ell}s_j$ или $m=\sum_{j=\mu+1}^{\ell}s_j$, то по теореме Монтессу (см., например, [2]) аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z)$ сходятся при $n\to\infty$ к $a(z)$ равномерно на компактных подмножествах области $D_R\ \ ,\ \{z_1,\dots,z_\ell\}$ или $D_\rho\ \ ,\ \left\{z_{\mu+1},\dots,z_\ell\right\}$, соответственно. Строка таблицы Паде с номером m, удовлетворяющим неравенствам $\sum_{j=\mu+1}^{\ell}s_j<m<\sum_{j=1}^{\ell}s_j$, называется *промежуточной строкой*. Достаточные условия сходимости всей промежуточной строки были получены в [3].

Для строки с номером $m=\lambda-1=\sum_{j=1}^{\ell}s_j-1$ (*последняя промежуточная строка*) известно асимптотическое поведение знаменателей $Q_{n,\lambda-1}(z)$ аппроксимаций Паде $\pi_{n,\lambda-1}(z)$ и найдены все предельные точки полюсов $\pi_{n,\lambda-1}(z)$ [1]. Оказалось, что асимптотика $Q_{n,\lambda-1}(z)$ в основном определяется арифметической природой *доминирующих полюсов* $a(z)$, то есть полюсов, имеющих максимальный модуль и максимальную кратность. Знание предельных точек полюсов позволяет найти множество, внутри которого равномерно сходится вся последняя промежуточная строка. Тем самым для данной строки построена полная теория равномерной сходимости.

Метод работы [1] основан на соображениях устойчивости. Он позволяет свести изучение сходимости строки таблицы Паде мероморфной функции $a(z)$ к такой же задаче, но для более простой рациональной функции (рациональной части $a(z)$).

Соображения устойчивости без каких-либо ограничений на функцию $a(z)$ можно применять только к строкам с номерами $m=\lambda$, $m=\lambda-1$. Однако для некоторых классов функций метод может оказаться эффективным и для других промежуточных строк. Цель работы – продемонстрировать это на примере предпоследней промежуточной строки для мероморфной функции с одним доминирующим полюсом.

2. Критерий устойчивости

В работе [1] показано, что в задаче аппроксимаций Паде естественно возникают понятия индексов и существенных многочленов, введенные в [4]. (Определения и обозначения из этих работ

$$S_m^{(2)}(\tau)=(m+1)(s_1-1)C_1 z_1^{m+1}+\sum_{i=2}^{\nu_2+1} C_i\tau_i\left(1-\frac{z_1}{z_i}\right)\left(z_1^{m+1}-z_i^{\ m+1}\right).$$

Для сумм $S_m^{(2)}(\tau)$ справедлив аналог предложения 1 (только длина последовательности теперь равна ν_2+1), так же определяется плюс-дефект $\delta_+^{(2)}(\tau)$, $0\le\delta_+^{(2)}(\tau)\le\nu_2$. Как и ранее, может быть доказана

Теорема 4. *Пусть* $\nu_1=1$, $s_1=s_2+2$, τ *– произвольная точка группы* $\mathbf{F}_2$, *а* Λ_τ *– соответствующая ей последовательность номеров. Пусть* $\delta_+^{(2)}$ *– плюс-дефект точки* τ.

Тогда для всех достаточно больших $n\in\Lambda_\tau-\lambda$ *знаменатель* $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *аппроксимации Паде типа* $(n,\lambda-2)$ *для мероморфной функции* $a(z)$ *можно* $(\lambda-\delta_+^{(2)}-2)$*-нормировать и для последовательности нормированных многочленов* $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n,\lambda-2}(z)=\frac{1}{S_{\delta_+^{(2)}}^{(2)}(\tau)}\omega^{(2)}(z,\tau)\frac{D(z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)\dots(z-z_{\nu_2+1})},$$

$n\in\Lambda_\tau-\lambda,$ *где*

$$\omega^{(2)}(z,\tau)=C_1(s_1-1)z_1\Delta_1^{(2)}(z)+\sum_{j=2}^{\nu_2+1}C_j\tau_j\frac{(z_j-z_1)^2}{z_j}\Delta_j^{(2)}(z),$$

$$\Delta_j^{(2)}(z)=\frac{\Delta^{(2)}(z)}{z-z_j},\quad \Delta^{(2)}(z)=(z-z_1)\dots(z-z_{\nu_2+1}).$$

В частности, при $\nu_1=\nu_2=1$ *существует предел всей последовательности* $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *равный* $\dfrac{D(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$.

Все возможные пределы сходящихся подпоследовательностей каким-либо образом нормированных $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *исчерпываются многочленами* $W^{(2)}(z,\tau)$. **#**

Таким образом, асимптотика знаменателей $Q_{n,\lambda-2}(z)$ для одного доминирующего полюса первого уровня получена и в этом случае мы знаем все предельные точки полюсов аппроксимаций Паде. Как и в работе [1] мы можем теперь исследовать равномерную сходимость подпоследовательностей аппроксимаций Паде $\pi_{n,\lambda-2}$(z), что в свою очередь позволяет найти множество, внутри которой предпоследняя промежуточная строка сходится равномерно.

Асимптотика знаменателя $Q_{n,\lambda-2}(z)$ для предпоследней промежуточной строки может быть исследована и в других случаях, которые мы здесь не рассматриваем, поскольку цель этой работы – продемонстрировать, что эффективность метода статьи [1] не ограничивается последней промежуточной строкой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006.

Литература

1.Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory – 2003. – V. 122. – P. 160–207.

2.Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

3.Sidi A. Quantitative and constructive aspects of the generalized Koenig's and de Montessus's theorems for Padé approximants// J. Comput. Appl. Math. – 1990. – V. 29. – P. 257–291.

4.Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices// Linear Algebra Appl. – 1998. – V. 274. – P. 85–124.

Поступила в редакцию 24 сентября 2004 г.