УДК 512.64

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ–ЧЕБЫШЕВА

В.М. Адуков, О.Л. Ибряева

Изучена задача линейной аппроксимации Паде–Чебышева. Получено достаточное условие существования, единственности и устойчивости решения этой задачи.

1. Введение

В данной работе речь пойдет о линейных аппроксимациях Паде–Чебышева, являющихся одним из обобщений классических аппроксимаций Паде. Напомним, что аппроксимацией Паде типа (n,m) называется рациональная функция, разложение в ряд Тейлора которой совпадает с разложением аппроксимируемой функции до члена порядка $n+m$ включительно. Числителем этой дроби является многочлен формальной степени n, знаменателем – многочлен формальной степени m.

Это определение естественным образом обобщается на случай функций, разлагающихся в ряд по ортогональным многочленам.

Определение 1.1. Пусть функция $f(z)$ разложена в ряд по многочленам Чебышева $T_i(z)$:
$$f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_iT_i(z)=\frac{1}{2}a_0+a_1T_1(z)+a_2T_2(z)+\dots.$$

Линейной аппроксимацией Паде–Чебышева типа (n,m) функции $f(z)$ называется рациональная дробь $R_{n,m}(z)=\dfrac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$, где $P_{n,m}(z),Q_{n,m}(z)$ – многочлены, такие, что $\deg P_{n,m}(z)\le n$, $\deg Q_{n,m}(z)\le m$, $Q_{n,m}(z)\not\equiv 0$ и выполняется соотношение $Q_{n,m}(z)f(z)-P_{n,m}(z)=\sum\limits_{k=n+m+1}^{\infty}c_kT_k(z).$

В дальнейшем мы будем опускать индексы $n,m,$ поскольку всегда будем иметь дело с аппроксимацией Паде–Чебышева фиксированного типа (n,m).

Известно, что задача нахождения линейных аппроксимаций Паде–Чебышева сводится к задаче о структуре ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц.

В самом деле, воспользовавшись формулой для умножения многочленов Чебышева
$$T_i(z)T_j(z)=\frac{1}{2}\Big(T_{i+j}(z)+T_{|i-j|}(z)\Big),\ \text{получаем}\ f(z)Q(z)=\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_iT_i(z)\sum_{j=0}^{m}{}' q_jT_j(z)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}{}'\sum_{j=0}^{m}{}' a_iq_j\left[T_{|i-j|}(z)+T_{i+j}(z)\right]=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}{}'\left[\sum_{j=0}^{m}{}' q_j(a_{i+j}+a_{|i-j|})\right]T_i(z).$$

Таким образом, для определения коэффициентов линейной аппроксимации Паде–Чебышева имеем следующие системы уравнений:
$$\sum_{j=0}^{m} q_j(a_{|i-j|}+a_{i+j})=0,\quad i=n+1,\dots,n+m, \tag{1}$$
$$1/2\sum_{j=0}^{m} q_j(a_{|i-j|}+a_{i+j})=p_i,\quad i=0,\dots,n. \tag{2}$$

Система однородных уравнений (1) позволяет определить коэффициенты знаменателя $Q(z)$ по данным коэффициентам ряда, затем уравнения (2) определяют коэффициенты числителя $P(z)$ по найденным коэффициентам знаменателя. Матрица системы (1) имеет вид

Так как P_B – проектор на $\ker S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$, то его $(d+1)$-й столбец принадлежит $\ker S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$, то есть совпадает с d-нормированным многочленом $\tilde{R}_1(z)$. Это означает, что $P_B = P_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$.

Тогда получаем, что

$$\left\|R_1(z)-\tilde{R}_1(z)\right\| = \left\|P_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}) - P_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})\right\| \le$$

$$\text{const}\left\|S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}) - S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})\right\| \le \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|.$$

Близость первых существенных многочленов последовательностей a_{n-m+1}^{n+2m} и $\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}$ доказана. Построим по многочленам $R_1(z)$, $\tilde{R}_1(z)$, а точнее по их коэффициентам R_{1i}, $\tilde{R}_{1i}$ (см. (5)), знаменатели $Q(z) \equiv Q_0(z)$ и $\tilde{Q}(z) \equiv \tilde{Q}_0(z)$. Покажем, что и они будут близки.

Действительно,

$$\left\|Q(z)-\tilde{Q}(z)\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{m} 2\left(R_{1i}-\tilde{R}_{1i}\right)T_i(z)\right\| = 2\left\|R_1(z)-\tilde{R}_1(z)\right\| \le \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|. \tag{10}$$

Предложение доказано.

Предложение 4.3. *Если для индексов $T+H$ последовательности a_{n-m+1}^{n+2m}, возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде–Чебышева типа (n,m), выполняется условие $\mu_4 - \mu_1 \le 2$, то числитель линейной аппроксимации Паде–Чебышева является устойчивым.*

Доказательство. Числители $P, \tilde{P}$ получаются с помощью умножения векторов, составленных из коэффициентов знаменателей Q, $\tilde{Q}$ на матрицы $M, \tilde{M}$ (см. (4)). Легко видеть, что $\left\|M-\tilde{M}\right\| \le 3\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$.

Тогда $\left\|P-\tilde{P}\right\| = \left\|MQ-\tilde{M}\tilde{Q}\right\| = \left\|MQ-M\tilde{Q}+M\tilde{Q}-\tilde{M}\tilde{Q}\right\| \le \left\|M\right\|\left\|Q-\tilde{Q}\right\| + \left\|\tilde{Q}\right\|\left\|M-\tilde{M}\right\|$.

В силу (10) имеем $\left\|\tilde{Q}\right\| \le \left\|Q\right\| + \left\|\tilde{Q}-Q\right\| \le \left\|Q\right\| + \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$ и, при достаточно малом возмущении последовательности a_0^{n+2m}, получаем $\left\|\tilde{Q}\right\| < \frac{3}{2}\left\|Q\right\|$.

Тогда $\left\|P-\tilde{P}\right\| \le \text{const}\left\|M\right\|\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\| + \dfrac{9}{2}\left\|Q\right\|\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\| = \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$.

Теперь мы можем доказать и устойчивость самих аппроксимаций.

Оценим $\left\|\dfrac{P}{Q}-\dfrac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}\right\| = \left\|\dfrac{P\tilde{Q}-Q\tilde{P}}{Q\tilde{Q}}\right\| = \left\|\dfrac{P\tilde{Q}-PQ+PQ-Q\tilde{P}}{Q\tilde{Q}}\right\| \le \dfrac{\left\|P\right\|}{\left\|Q\right\|\left\|\tilde{Q}\right\|}\left\|\tilde{Q}-Q\right\| + \dfrac{\left\|P-\tilde{P}\right\|}{\left\|\tilde{Q}\right\|}$.

В силу (10), при достаточно малых возмущениях последовательности a_0^{n+2m}, имеем $\dfrac{1}{\left\|\tilde{Q}\right\|} \le \dfrac{1}{\left\|Q\right\| - \left\|\tilde{Q}-Q\right\|} \le \dfrac{1}{\left\|Q\right\| - \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|} < \dfrac{2}{\left\|Q\right\|}$.

Тогда $\left\|\dfrac{P}{Q}-\dfrac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}\right\| < \dfrac{2\left\|P\right\|}{\left\|Q\right\|^2}\left\|\tilde{Q}-Q\right\| + \dfrac{2\left\|P-\tilde{P}\right\|}{\left\|Q\right\|} \le \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$.

Теперь теорема 4.1 полностью доказана.

Заключение

В статье получено достаточное условие существования, единственности и устойчивости решения задачи линейной аппроксимации Паде–Чебышева в терминах существенных индексов $T+H$ последовательности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006. О.Л. Ибряева также благодарит за финансовую поддержку Министерство образования и Правительство Челябинской области, грант № 003.01.06-04.БМ.

Литература

1. Adukov V.M. Generalized Inversion of Block Toeplitz Matrices// Linear Algebra and Its Applications. – 1998. – V. 274. – P. 85–124.

2. Адуков В.М., Ибряева О.Л. О структуре ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц // Вестник ЮУрГУ, Серия «Математика, физика, химия». – 2001. – № 7. – С. 3–12.

3. Ибряева О.Л. Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде–Чебышева // Известия Челябинского научного центра. – 2002. – Вып. 4(17) – С. 1–5.

4. Heinig G., Jankowski P. Kernel structure of Block Hankel and Toeplitz Matrices and Partial Realization// Linear Algebra and Its Applications. – 1992. – V. 175. – C. 1–30.

5. Litvinchuk G.S., Spitkovski I.M. Factorization of measurable matrix functions. – Berlin.: Akademie-Verlag, 1987. – 372 p.

6. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Pade table // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 88. – P. 354–369.

Поступила в редакцию 20 сентября 2004 г.