

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ БИОФИЗИКИ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

С.В. Ермаков, В.И. Заляпин

**В работе отражены результаты численного исследования системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Прямой условной регуляризацией получено решение системы, восстанавливающее динамику радионуклидов в организме человека с течением времени по современным измерениям содержания  $^{90}\text{Sr}$  в эмали зубов. Работа поддержана грантом РФФИ-УРАЛ 04-01-96073.**

Известно, что в результате техногенных катастроф, а также отсутствия надежных технологий переработки и хранения радиоактивных отходов, как среда обитания (бассейн реки Теча, Чел. область), так и жители прибрежных населенных пунктов подверглись радиоактивному загрязнению – внешнему (за счет повышенного вблизи реки гамма-фона) и внутреннему (от смеси радионуклидов, поступающих в организм с водой и продуктами питания местного производства) облучению [1]. Основной вклад в дозу внутреннего облучения вносит  $^{90}\text{Sr}$ . Знание уровней и динамики его поступления, позволяет рассчитать накопленную дозу облучения на органы и ткани. Традиционно [2, 3] для восстановления динамики поступления  $^{90}\text{Sr}$  используются результаты прижизненных измерений его содержания в эмали передних зубов у лиц, проживавших весь период сбросов на загрязненной территории, и в местах, где река была основным источником питьевой воды.

Анализ основных биологических и физических закономерностей динамики процесса вывода радионуклидов из организма человека позволил установить [4, 5], что задача нахождения функций  $u_1(\tau)$  – коэффициента перехода  $^{90}\text{Sr}$  из желудочно-кишечного тракта в эмаль передних зубов, и  $u_2(t)$  – модифицированной скорости поступления  $^{90}\text{Sr}$  в момент времени  $t$ , при некоторых дополнительных предположениях, может быть сведена к задаче решения системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^s \alpha(t-s+10, t) u_1(t-s+10) u_2(t) dt = \varphi_1(s), & 0 \leq s \leq 10 \\ \int_0^s \alpha(t, t-s+10) u_1(t) u_2(t-s+10) dt = \varphi_2(s), & 0 \leq s \leq 10 \\ u_1(0) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где правая часть системы, векторная функция  $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ , описывает прижизненные модифицированные измерения зубного датчика, а ядро –  $\alpha(t, \tau)$  получено в результате экспертного оценивания определенных биофизических процедур и имеет вид, изображенный на рис. 1.

Примененные в работах [4, 5] соображения – линеаризация с последующей регуляризацией методом невязки получающейся системы линейных интегральных уравнений, позволили получить предварительные результаты в рассматриваемой задаче.

Однако значительный интерес представляет прямое решение поставленной задачи с одновременным исследованием вопроса о необходимости регуляризации – известно (например [6]), что для скалярных уравнений Вольтерра наблюдается так называемая «саморегуляризация» численных процедур, обусловленная диагональной структурой уравнения и реализуемая за счет специального выбора шага дискретизации.

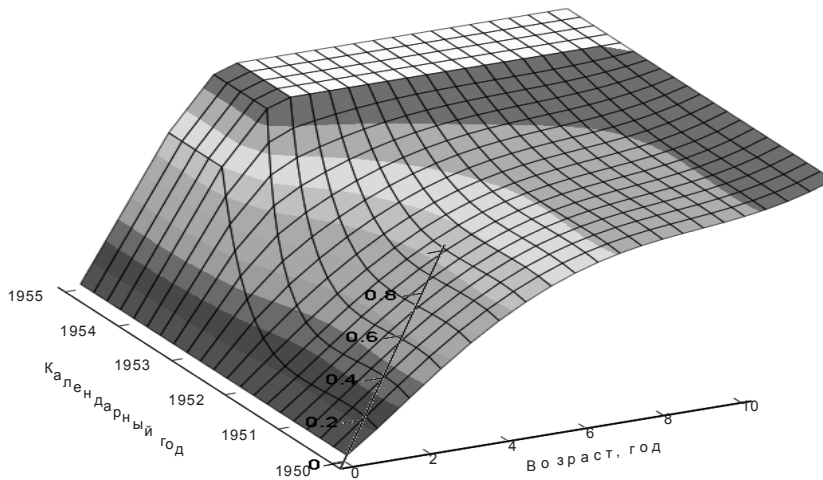


Рис. 1. Рельеф поверхности  $\alpha(t, \tau)$

**1. Модельная система**

Рассмотрим  $u^0(t) = \begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ u_2^0(t) \end{pmatrix}$  – пробную функцию, качественно воспроизводящую характер-

ные особенности решения системы (1) в соответствии с соображениями, приведенными в [4], и рассмотрим модельную систему

$$\begin{cases} \int_0^s \alpha(t-s+10, t) u_1^0(t-s+10) u_2^0(t) dt = \varphi_1^0(s), & 0 \leq s \leq 10 \\ \int_0^s \alpha(t, t-s+10) u_1^0(t) u_2^0(t-s+10) dt = \varphi_2^0(s), & 0 \leq s \leq 10 \\ u_1^0(0) = 1, \end{cases} \quad (2)$$

правые части которой получены подстановкой пробной функции  $u^0(t)$  в систему (1).

В качестве пробных функций были взяты функции

$$u_1^0(t) = e^{-t}, \quad u_2^0(t) = \frac{4000}{1+t^3},$$

воспроизводящие характерные особенности поведения настоящих решений системы (1).

Соответствующие правые части приведены на рис. 2.

Полученная система анализировалась следующими вычислительными процедурами:

- нелинейная система уравнений, полученная из (2) дискретизацией интегральных соотношений, решалась итерационным методом Ньютона–Рафсона;
- квазирешение системы (2) отыскивалось методом наименьших квадратов с исследованием системы необходимых условий итерационным методом Ньютона–Рафсона;
- квазирешение системы отыскивалось МНК. При этом был реализован алгоритм прямого поиска экстремума (метод Хука–Дживса, градиентные методы);
- для решения системы использовался алгоритм регуляризации методом невязки. Минимизация сглаживающего функционала осуществлялась с помощью прямых процедур.

С целью исследования устойчивости вычислительных алгоритмов одновременно теми же методами решалась возмущенная система, правые части которой получались из точных правых частей случайным «зашумлением»:  $\hat{\varphi}(s) = \varphi(s) + \varepsilon(s)$ ,  $\varepsilon(s) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_2(s) \end{pmatrix}$ . Порядок зашумления исход-

Увеличение параметра дискретизации приводит к неустойчивости вычислительной процедуры. Если еще при  $n = 25$  точность получаемых таким способом решений вполне удовлетворительна, то уже при  $n = 50$  наблюдаются характерные для неустойчивых процедур «биения» (рис. 11) и решения значительно отличаются от модельных.

**6. Метод невязки. Реальные данные**

Метод невязки с  $n = 10$  был применен для решения системы (1) с реальными правыми частями (рис. 12). Результаты расчетов приведены на рис. 13.

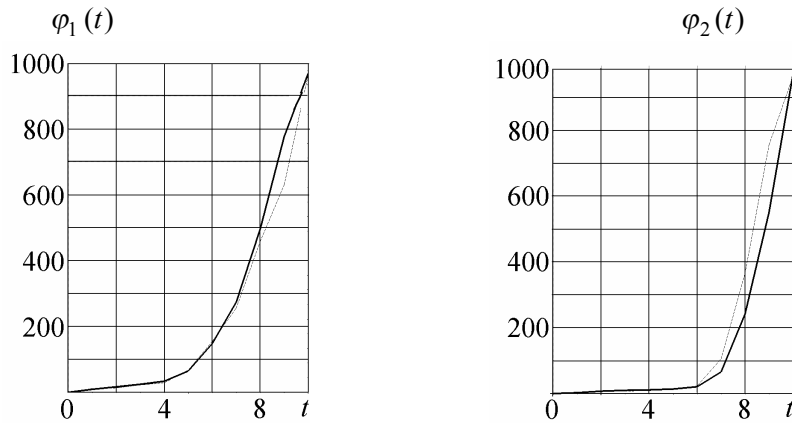


Рис. 12. Реальные данные – показания зубного датчика. Слева –  $\varphi_1$ , справа –  $\varphi_2$

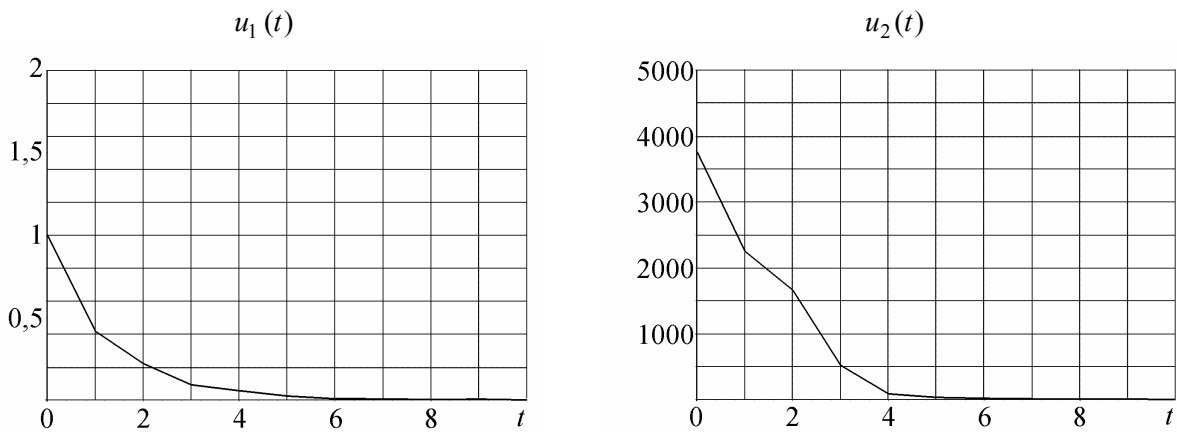


Рис. 13. Функции: слева –  $u_1(t)$ , справа –  $u_2(t)$

Полученный результат хорошо описывает реально наблюдаемую динамику [3] и качественно и количественно согласуется с ранее полученными [5] результатами.

**7. Заключение**

Установлена сильная неустойчивость рассмотренных численных процедур решения системы (1). Частично подтверждено наличие эффекта «саморегуляризации» при специальном подбore параметра дискретизации задачи. Установлено, что классические регуляризующие процедуры оказываются ограниченно эффективными в случае, когда параметр дискретизации не является естественным. Полученные экспериментальные результаты требуют теоретического осмысления.

### Литература

1. Медико-биологические и экологические последствия радиоактивного загрязнения реки Теча// Под ред. А.В. Аклеева, М.Ф. Киселева. – М.: Вторая типография ФУ «Медбиоэкстрем», 2000.
2. Расин И.М. Кинетика накопления стронция-90 и формирование тканевых доз в растущем организме: Дисс. ... канд. биол. наук. – М.: ИБФ, 1970.
3. Degteva M.O., Kozheurov V.P., Tolstykh E.I. et al. The Techa River Dosimetry System: Methods for the reconstruction of internal dose// Health Phys. – 2000. – V. 79. – № 1. – P. 24–35.
4. Заляпин В.И., Кривошапов В.А. Численный анализ одной обратной задачи прикладной биофизики// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2002. – Вып.2. – № 3(12). – С. 3–11.
5. Zalyapin V.I., Krivoschapov V.A., Degteva M.O. Numerical solution of an applied biophysics inverse problem// Inverse problem in science & Engineering. – 2004. – V. 12. – № 4. – P. 379–393.
6. Apartsin A.S., Markova E.V. On numerical solution of the multilinear Volterra equations of the first kind// Proc. of the Intern. conf. on computational mathematics, Pt.2. – Novosibirsk. – 2002. – P. 322–326.

*Поступила в редакцию 6 декабря 2004 г.*