УДК 517.9

ОБ УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ПОЛИНОМИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТОЙ

А.С. Макаров

В работе изучается абстрактное линейное дифференциальное уравнение соболевского типа с необратимым оператором при производной, относительная резольвента которого может иметь полиномиальный рост на бесконечности. Установлено существование разрешающей аналитической С-полугруппы этого уравнения и доказано существование и единственность решения задачи Коши при начальных данных из некоторого множества.

1. Пусть U и F – банаховы пространства, оператор $L:U\to F$ линейный и непрерывный, т.е. $L\in\mathcal{L}(U,F)$, а оператор $M:\mathrm{dom}M\to F$ замкнутый и линейный с областью определения $\mathrm{dom}M$ плотной в U.

Следуя [1], введем L-резольвентное множество оператора M $\rho^L(M)=\{\mu\in\boldsymbol{C}:\exists(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(F,U)\}$. Для $\mu\in\rho^L(M)$ определим правую и, соответственно, левую L-резольвенты оператора M $R_\mu^L(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ и $L_\mu^L(M)=L(\mu L-M)^{-1}$. Правая и левая L-резольвенты являются аналитическими функциями на L-резольвентном множестве. Справедливы правое и, соответственно, левое L-резольвентные тождества [1]:

$$R_\mu^L(M)-R_\lambda^L(M)=(\lambda-\mu)\,R_\mu^L(M)\,R_\lambda^L(M);\tag{1}$$

$$L_\mu^L(M)-L_\lambda^L(M)=(\lambda-\mu)\,L_\mu^L(M)\,L_\lambda^L(M).\tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует коммутируемость операторов $R_\mu^L(M)$, $R_\lambda^L(M)$, $L_\mu^L(M)$, $L_\lambda^L(M)$.

Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u}=Mu.\tag{3}$$

Уравнение (3) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R_\mu^L(M)\dot{u}=(\mu L-M)^{-1}Mu\tag{4}$$

и

$$L_\mu^L(M)\dot{u}=M(\mu L-M)^{-1}f,\tag{5}$$

рассматриваемых, соответственно, в пространствах U и F.

В случае существования обратного оператора L^{-1} уравнение (3) сводится к уравнению

$$\dot{u}=Su,\tag{6}$$

где $S=L^{-1}M$. Уравнение вида (6) при условии, что резольвента оператора S имеет не более, чем степенной рост на бесконечности, изучалось, например, в работах [2, 3]. В данной статье уравнение (3) рассматривается при предположении, что ядро $\ker L\neq\{0\}$ и L-резольвента оператора M имеет на бесконечности подстепенной рост.

2. Пусть $\theta\in(\frac{\pi}{2};\pi)$, $\sigma\in\boldsymbol{R}$ и сектор $S_{\theta,\sigma}=\{\mu\in\mathbf{C}:\ |\arg(\mu-\sigma)|<\theta,\mu\neq\sigma\}\subset\rho^L(M)$.

Рассмотрим однопараметрические семейства $\{U^t,t\geq0\}$ и $\{F^t,t\geq0\}$ линейных операторов, действующих в пространствах U и F соответственно, которые определяются равенствами

$$U^t=\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{\mu t}}{(\mu-a)^n}\,R_\mu^L(M)d\mu,\qquad F^t=\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{\mu t}}{(\mu-a)^n}\,L_\mu^L(M)d\mu.\tag{7}$$

Здесь $n\in\boldsymbol{N}$, контур

В силу леммы 2 это означает, что вектор ψ является M-присоединенным вектором оператора L высоты не больше $2n+1$. Но по лемме 3 его высота не больше n. Поэтому $\varphi = (R_a^L(M))^n R_\mu^L(M)\psi = 0$.

Пусть f принадлежит теперь левой части равенства (21). Тогда $f = (L_a^L(M))^n L_\mu^L(M)g$, $g \in F$. Кроме того $(L_a^L(M))^n L_\mu^L(M) f = 0$. Следовательно, $(L_a^L(M))^{2n}(L_\mu^L(M))^2 g = 0$ или $(R_a^L(M))^{2n}(R_\mu^L(M))^2(aL-M)^{-1} g = 0$, т.е. $(aL-M)^{-1} g \in \ker\,(R_a^L(M))^{2n}(R_\mu^L(M))^2$. Это означает согласно лемме 2, что вектор $(aL-M)^{-1}g$ является M-присоединенным высоты не больше $2n+1$. Но его высота не может быть больше n. Поэтому $(R_a^L(M))^n R_\mu^L(M)(aL-M)^{-1} g = 0$ или, применив к последнему равенству оператор L, $f = (L_a^L(M))^n L_\mu^L(M) g = 0$. ▲

Определение 3. Замкнутое множество $\Phi \subset B$ называется фазовым пространством уравнения (9), если

1) любое решение v уравнения (9) лежит в Φ, т.е. $\forall t > 0 \;\; v(t) \in \Phi$;

2) для любого v_0 из некоторого плотного в Φ множества Φ_0 существует единственное решение задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (9).

Обозначим U^1 (F^1) замыкание $\mathrm{im}L_\mu(U)$ $(\mathrm{im}L_\mu(F))$.

Теорема 4. Пусть операторы L и M удовлетворяют условию А). Тогда U^1 (F^1) является фазовым пространством уравнения (4) ((5)).

Доказательство. Если u – решение уравнения (4), то, как показано в [7], $\forall \lambda \in \rho^L(M)$, $\forall k \in \mathbf{N}$

$$u = (R_\lambda^L(M))^k (\lambda - \frac{d}{dt})^k u.$$

Положив здесь $\lambda = a$, $k = n$ и использовав это равенство при $\lambda = \mu$ и $k = 1$, получим:

$$u = (R_a^L(M))^n (a - \frac{d}{dt})^n R_\mu^L(M)(\mu - \frac{d}{dt})u = (R_\lambda^L(M))^n R_\mu^L(M)(a - \frac{d}{dt})^n(\mu - \frac{d}{dt})u.$$

Отсюда следует, что $u \in \mathrm{im}L_\mu(U) \subset U^1$. Пусть $u_0 \in \mathrm{im}L_\mu(U)$, т.е. $u_0 = C_U R_\mu^L(M)x_0$, $x_0 \in U$. Тогда функция $u(t) = U^t R_\mu^L(M)x_0$ в силу теоремы 3 является решением задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (4). Докажем единственность этого решения. Пусть v – другое решение задачи Коши $v(0) = u_0$ для уравнения (4). Рассмотрим на [0, t] функцию $w(s) = U^{t-s} R_\alpha^L(M)v(s)$. Найдем

$$w'(s) = R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu(t-s)}\frac{R_\mu^L(M)}{(\mu-a)^n}(v'(s) - \mu v(s))d\mu =$$

$$= R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu-a)^n}(R_\mu^L(M)v'(s) - \mu R_\mu^L(M)v(s))d\mu =$$

$$= R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu-a)^n}(R_\mu^L(M)v'(s) - (\mu L - M)^{-1}Mv(s) - v(s))d\mu =$$

$$= R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu-a)^n}(R_\mu^L(M)v'(s) - (\mu L - M)^{-1}Mv(s))d\mu - R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu-a)^n}d\mu = 0.$$

Следовательно, $w(0) = w(t)$, т.е.

$$U^t R_\alpha^L(M)v(0) = C_U R_\alpha^L(M)v(t) \text{ или } U^t R_\alpha^L(M)C_U R_\mu^L(M)x_0 - C_U R_\alpha^L(M)v(t) = 0.$$

Отсюда

$$C_U R_\alpha^L(M)(U^t R_\mu^L(M)x_0 - v(t)) = C_U R_\alpha^L(M)(u(t) - v(t)) = 0.$$

Поэтому $u(t)-v(t)\in \ker L_{\alpha}(U)$. Кроме того, как показано выше, $u(t)-v(t)\in \operatorname{im}L_{\mu}(U)= \operatorname{im}L_{\alpha}(U)$. Тогда в силу равенства (20), $u(t)=v(t)$. Доказательство для уравнения (5) проводится аналогично. ▲

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов// УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 4 (298). – С. 47–74.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 275 с.

3. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. – М.: Наука, 1999. – 175 с.

4. Мельникова И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы и *C*-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач// УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 6(300). – С. 11–150.

5. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИИЛ, 1962.

6. Федоров В.Е. Полугруппы и группы операторов с ядрами. – Челябинск: ЧелГУ, 1988. – 78 с.

7. Федоров В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений типа Соболева: Дисс….канд. физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 1996.

Поступила в редакцию 30 ноября 2004 г.