УДК 521.52.17

МЕТОД СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Чегодаева

В статье предложен метод симплектичекого интегрирования. На основе его создан симплектические интеграторы разных порядков и проведено их тестирование.

В последнее десятилетие методы симплектического интегрирования стали основным инструментом при исследовании гамильтоновых систем на больших промежутках времени. Связано это с тем, что при значительно большем быстродействии по сравнению с классическими методами эти методы сохраняют основные свойства гамильтоновых систем. Поэтому использование симплектических интеграторов создало предпосылки для решения таких сложных задач, как изучение закономерностей движения малых тел в течение промежутка времени порядка возраста Солнечной системы. Однако прямое применение методов симплектического интегрирования в динамике малых тел Солнечной системы является затруднительным в случае больших эксцентриситетов орбит и наличии тесных сближений с планетами. В данной статье предложен эффективный метод симплектического интегрирования, пригодный для широкого класса орбит.

Рассмотрим основы теории симплектических интеграторов для канонических уравнений движения с гамильтонианом H для системы N тел [1, 12].

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{1}$$

где $i=1,2,..,N$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ – обобщенная координата, $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ – обобщенный импульс.

Используя (1), скорость изменения любой динамической величины $\vec{q}(\vec{x},\vec{p},t)$ может быть записана в виде

$$\frac{d\vec{q}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\vec{q}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial\vec{q}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\vec{q}}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial\vec{q}}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)\equiv\{\vec{q},H\}\equiv F\vec{q}, \tag{2}$$

где $\{,\}$ – скобки Пуассона, F – дифференциальный оператор вида

$$F=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right). \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\vec{q}(t)=e^{\tau F}\vec{q}(t-\tau), \tag{4}$$

где $\vec{q}(t-\tau)$ значение $\vec{q}$ в предыдущий момент времени.

Предположим, что $H=H_A+\varepsilon H_B$, где H_A и H_B являются интегрируемыми гамильтонианами. Симплектический интегратор второго порядка может быть записан в виде

$$\vec{q}(t)=e^{\tau\varepsilon B/2}e^{\tau A}e^{\tau\varepsilon B/2}\vec{q}(t-\tau), \tag{5}$$

где τ – шаг интегрирования, а A и B – дифференциальные операторы вида F для гамильтонианов H_A и H_B соответственно.

Каждый шаг интегрирования для схемы (2) состоит из трех подшагов.

1) полшага решение канонических уравнений движения с гамильтонианом H_B.

2) шаг решение канонических уравнений движения с гамильтонианом H_A.

3) полшага решение канонических уравнений движения с гамильтонианом H_B.

Применение симплектических интеграторов равносильно точному решению уравнений движения (1) с гамильтонианом H_{integr} [2]:

$$H_{\text{integr}}=H+H_{\text{err}}(\tau^p), \tag{6}$$

таким образом, чтобы перигелийное расстояние частиц удовлетворяло условию $q > 26$ а.е. Для орбит с $q < 26$ а.е. должны быть другие коэффициенты B_0, B_1. Как видно на рисунке, точность интегратора второго порядка сохраняется на протяжении всего времени интегрирования частиц. Для псевдошестого порядка видно, особенно для второй частицы, накопление ошибок в гамильтониане. Очевидно, это связано с очень большим шагом интегрирования. Известно, что шаг интегрирования не может превышать 400 дней, ограничение, связанное с периодом обращения Юпитера. Кроме того, интегратор псевдошестого порядка требует больше компьютерного времени, чем интегратор второго порядка.

Заключение. Разработаны методы симплектического интегрирования для кометных орбит. На основе данных методов построены три интегратора. Интегратор, в котором для планет и для частиц используются смешанные координаты, не является универсальным интегратором для кометных орбит, но вполне возможно его применение для определенных классов орбит. Применение смешанных координат для массивных объектов является эффективным выбором системы координат. Интегратор, комбинирующий смешанные координаты для планет и барицентрические координаты для частицы, отлично зарекомендовал себя объектов внешней части Солнечной системы.

Данная работа была поддержана грантами РФФИ-Урал (04-02-96042) и ИНТАС (00-240).

Литература

1. Chambers J.E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massivebodies// Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 1999. – V. 304. – P. 793–799.
2. Chambers J.E., Murison M.A. Pseudo-high-order symplectic integrators// The Astronomical Journal. – 2000. – V. 119. – P. 425–433.
3. Duncan M., Levison H. and Lee M.A multiple time step symplectic algorithm for integrating close encounters// The Astronomical Journal. – 1998. – P. 2067–2077.
4. Emel'yanenko V. An explicit symplectic integrator for cometary orbits// Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2001. – V. 74. – P. 287–295.
5. Laskar J., Robutel P. High order symplectic integrators for perturbed hamiltonian systems// Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2001. – V. 80. – P. 39–62.
6. Mikkola S., Tanikawa K. Explicit symplectic algorithms for time-transformed Hamiltonians // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 1999. – P. 287–295.
7. Mikkola S., Palmer H. Simple derivation of symplectic integrators with first order correctors// Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2000. – V. 77. – P. 305–307.
8. Wisdom J., Holman M. Symplectic maps for the N-body problem// The Astronomical Journal. – 1991. – P. 1528–1538.
9. Wisdom J., Holman M., Touma J. Symplectic correctors. Integration algorithms and classical mechanics// Fields Instituts Community. – 1996. – P. 217–244.
10. Wu X., Huang T.Y., Wan X.S. On correctors of symplectic integrators// Chinese Astronomy and Astrophisics. – 2003. – V. 27. – P. 114–125.
11. Wu X., Huang T.Y., Zhang H., Wan X.S. A note on the algorithm of symplectic integrators// Astrophisics and Space Science. – 2003. – V. 283. – P. 53–65.
12. Yohida H. Construction of higher order symplectic integrators// Physics letters A. – 1990. – V. 150. – P. 262–268.

Поступила в редакцию 10 сентября 2004 г.