УДК 517

ПЕРИОД СУММЫ ДВУХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.Ю. Эвнин

В работе полностью решен вопрос, каким может быть основной период периодической функции, являющейся суммой двух периодических функций с известными основными периодами. Изучается также случай отсутствия основного периода у периодической суммы периодических функций.

Мы рассматриваем действительнозначные функции действительного переменного.

В энциклопедическом издании [1] в статье «Периодические функции» можно прочитать: «*Сумма периодических функций с разными периодами является периодической только тогда, когда их периоды соизмеримы*». Это утверждение справедливо для непрерывных функций[1], но не имеет места в общем случае. Контрпример весьма общего вида был построен в [4]. В данной статье мы выясняем, каким может быть основной период периодической функции, являющейся суммой двух периодических функций с известными основными периодами.

Предварительные сведения

Напомним, что функция f называется *периодической*, если для некоторого числа $T \neq 0$ при любом x из области определения $D(f)$ числа $x + T$ и $x - T$ принадлежат $D(f)$ и выполняется равенство $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$. При этом число T называют *периодом* функции.

Наименьший положительный период функции (если, конечно, он существует) будем называть *основным* периодом. Известен следующий факт.

Теорема 1. *Если у функции есть основной период T_0, то любой период функции имеет вид nT_0, где $n \neq 0$ – целое число.*

Числа T_1 и T_2 называют *соизмеримыми*, если существует такое число T_0, которое целое число раз «укладывается» и в T_1, и в T_2: $T_1 = n_1T_0$, $T_2 = n_2T_0$, $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$. В противном случае числа T_1 и T_2 называют *несоизмеримыми*. Соизмеримость (несоизмеримость) периодов означает, таким образом, что их отношение есть число рациональное (иррациональное).

Из теоремы 1 следует, что у функции, имеющей основной период, любые два периода соизмеримы.

Классическим примером функции, не имеющей наименьшего периода, является *функция Дирихле,* равная 1 в рациональных точках, и нулю – в иррациональных. Любое рациональное число, отличное от нуля, является периодом функции Дирихле, а любое иррациональное число не является ее периодом. Как видим, и здесь любые два периода соизмеримы.

Приведем пример непостоянной периодической функции, имеющей несоизмеримые периоды.

Пусть функция $f(x)$ в точках вида $m+n\sqrt{2},\ m,\ n \in \mathbf{Z}$, равна 1, а в остальных точках равна нулю. Среди периодов этой функции есть 1 и $\sqrt{2}$.

Период суммы функций с соизмеримыми периодами

Теорема 2. *Пусть f и g – периодические функции с основными периодами mT_0 и nT_0, где m и n – взаимно простые числа. Тогда основной период их суммы (если он существует), равен $\dfrac{mnT_0}{k}$, где k – натуральное число, взаимно простое с числом mn.*

Доказательство. Пусть $h = f + g$. Очевидно, что число mnT_0 является периодом h. В силу теоремы 1 основной период h имеет вид $\dfrac{mnT_0}{k}$, где k – некоторое натуральное число. Предположим, что k не является взаимно простым с числом m, то есть $k = dk_1$, $m = dm_1$, где $d > 1$ – наи-

[1] Красивое доказательство того, что сумма любого конечного числа непрерывных функций с попарно несоизмеримыми периодами непериодична, содержится в статье [2]. См. также [3].

При $m = n = 0$ получаем $\left\{\frac{s_1}{q}\right\} = 0,$ т.е. s_1 делится на q, а любой период функции f кратен T_1. Доказано, что T_1 – основной период функции f.

Аналогичные рассуждения применимы и к функции g.

Перейдем теперь к функции h. Так же, как и выше, устанавливаем, что период функции h должен быть вида $T_h = \frac{s_1 T_1 + s_2 T_2}{q},$ где s_1 и s_2 – целые числа. Из соотношений

$$h(0) = 0 = h(T_h) = \frac{\left[\frac{s_2}{p}\right]}{k_2} - \frac{\left[\frac{s_1}{p}\right]}{k_1} + \sqrt{2}\left(\left\{\frac{s_1}{p}\right\} + \left\{\frac{s_2}{p}\right\}\right) \qquad (3)$$

получаем, что числа s_1 и s_2 должны быть кратны p, т.е. при некоторых целых λ_1 и λ_2 имеем $s_1 = \lambda_1 p$, $s_2 = \lambda_2 p$. Тогда соотношение (3) можно переписать в виде

$$\frac{\lambda_2}{k_2} - \frac{\lambda_1}{k_1} = 0.$$

Из равенства $\lambda_2 k_1 = k_2 \lambda_1$ и взаимной простоты чисел k_1 и k_2, вытекает, что λ_2 делится на k_2. Отсюда для некоторого целого числа t справедливы равенства $\lambda_2 = k_2 t$ и $\lambda_1 = k_1 t$, т.е. $T_h = \frac{pt}{q}(k_1 T_1 + k_2 T_2).$

Показано, что любой период функции h кратен периоду $T = \frac{p}{q}(k_1 T_1 + k_2 T_2),$ который, таким образом, является основным. □

Отсутствие основного периода

Теорема 6. *Пусть T_1 и T_2 – произвольные положительные числа. Тогда существуют такие периодические функции f и g, что их основные периоды равны соответственно T_1 и T_2, а их сумма $h=f+g$ периодична, но не имеет основного периода.*

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

I. Периоды T_1 и T_2 несоизмеримы.

Пусть $A = \{mT_1 + nT_2 + kT \mid m, n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbb{Q}\}$. Как и выше, легко показать, что если число представимо в виде $mT_1 + nT_2 + kT$, то такое представление единственно.

Положим, что во всех точках множества $\overline{A}$ функции f и g равны нулю, а на множестве A зададим эти функции следующим образом:

$$f(mT_1 + nT_2 + kT) = nT_2 + kT,\ g(mT_1 + nT_2 + kT) = mT_1 - kT.$$

Несложно убедиться в том, что число T_1 – основной период функции f, число T_2 – основной период g, и при любом рациональном k число kT – период функции $h = f + g$, у которой, таким образом, нет наименьшего периода.

II. Периоды T_1 и T_2 соизмеримы.

Пусть $T_1 = mT_0, T_2 = nT_0,$ где $T_0 > 0,$ m и n – натуральные числа. Введем в рассмотрение множество $B = \left\{\left(l + \sqrt{2}k\right)T_0 \mid l \in \mathbf{Z}, k \in \mathbb{Q}\right\}$.

Положим, что во всех точках множества $\overline{B}$ функции f и g равны нулю, а на множестве B зададим эти функции так:

$$f\left(\left(l + \sqrt{2}k\right)T_0\right) = \left\{\frac{l}{m}\right\} + \sqrt{2}k;\ g\left(\left(l + \sqrt{2}k\right)T_0\right) = \left\{\frac{l}{n}\right\} - \sqrt{2}k.$$

Функция $h = f + g$ на множестве $\overline{B}$ равна нулю, а в точках множества B равна

$$h\left(\left(l + \sqrt{2}k\right)T_0\right) = \left\{\frac{l}{m}\right\} + \left\{\frac{l}{n}\right\}.$$

Нетрудно проверить, что число $T_1 = mT_0$ – основной период функции f, число $T_2 = nT_0$ – основной период g, в то время как среди периодов функции $h = f + g$ есть все числа вида $\sqrt{2}kT_0$, где k – произвольное рациональное число. □

В основе конструкций, доказывающих теорему 6, лежит несоизмеримость периодов функции $h = f + g$ с периодами функций f и g. Приведем в заключение пример таких функций f и g, что все периоды функций f, g и $f + g$ соизмеримы между собой, но у f и g есть основные периоды, а у $f + g$ – нет.

Пусть m – некоторое фиксированное натуральное число, M – множество несократимых нецелых дробей, числители которых кратны m. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in M; \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in m\mathbf{Z}; \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in \mathbf{Z} \setminus m\mathbf{Z}; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in \mathbf{Z}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Тогда $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in M \cup m\mathbf{Z}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Легко видеть, что основные периоды функций f и g равны соответственно m и 1, в то время как сумма $f + g$ имеет периодом любое число вида m/n, где n – произвольное натуральное число, взаимно простое с m.

Литература

1. Математический энциклопедический словарь/ Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1988.

2. Микаэлян Л.В., Седракян Н.М. О периодичности суммы периодических функций// Математическое образование. – 2000. – № 2(13). – С. 29–33.

3. Геренштейн А.В., Эвнин А.Ю. О сумме периодических функций// Математика в школе. – 2002. – № 1. – С. 68–72.

4. Ивлев Б.М. и др. Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9 и 10 кл. – М.: Просвещение, 1978.

Поступила в редакцию 18 августа 2004 г.