

НЕМАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ И КРУГОВРАЩЕНИЯ МАЯТНИКА

Ю.П. Сердега

В работе рассмотрены немалые колебания и круговращения физического маятника. Найдены аппроксимирующие зависимости, позволяющие определять периоды немалых колебаний и круговращений маятника в инженерной практике, не прибегая к специальным таблицам, или трудоемким вычислениям.

Проведем исследование движения диска, который можно представить как физический маятник, если подвесить его, выбрав за ось подвеса любую точку за исключением центра масс, и рассмотрим движение этого тела при его *немалых* колебаниях и круговращениях (рис. 1).

Начало неподвижной системы координат OXY совместим с осью подвеса Z , а оси подвижной системы проведем так, чтобы неподвижная ось $X1$ и подвижная X , проходящая через ось подвеса и центр масс, составляли угол отклонения маятника φ .

Дифференциальное уравнение движения физического маятника можно получить из закона изменения момента количества движения тела:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgr_c}{I_0} \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

При малых колебаниях маятника, когда допустимо принять $\sin \varphi = \varphi$, решением дифференциального уравнения (1) является: $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$.

Здесь ω_0 – собственная частота колебаний маятника – $\omega_0 = \sqrt{g/l_{i\delta}}$;

$l_{i\delta}$ – приведенная длина маятника – $l_{np} = \frac{I_0}{r_c m}$;

I_0 – момент инерции маятника относительно оси подвеса;

m – масса физического маятника;

r_c – расстояние от оси подвеса до центра масс.

Соответственно, в этом случае период колебаний физического маятника – $T_0 = 2\pi \sqrt{l_{i\delta}/g}$.

Но при *немалых* колебаниях маятника, когда угол φ **значительно** отличается от $\sin \varphi$ и аналитического решения дифференциального уравнения не существует, период колебания находят, используя таблицы специальных функций, или через поправочный коэффициент по формуле:

$$T = k_t \cdot T_0,$$

где k_t – поправочный коэффициент немалых колебаний:

$$k_t = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)}}. \quad (2)$$

Интеграл, входящий в это выражение, не относится к числу элементарных, однако его можно определить и, не прибегая к нахождению полного эллиптического интеграла первого рода по специальным таблицам, а рассчитать численным методом. На рис. 2 тонкой линией представлена зависимость поправочного коэффициента k_t , рассчитанная по формуле (2) этим методом.

Приближенное решение уравнения (2), когда разложение функции $\sin(\varphi)$ в ряд ограничено двумя членами, дает известное выражение поправочного коэффициента [1]:

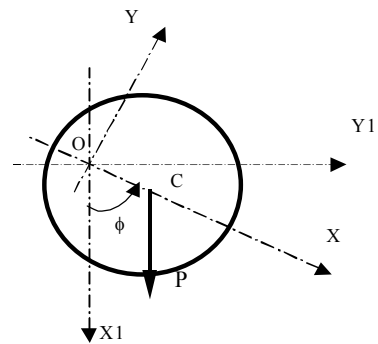


Рис. 1. Физический маятник

Тонкая пунктирная линия, построенная по этой формуле, показывает, что она достаточно близка к действительным значениям (рис. 3) при скоростях $\omega/\omega_0 > 4$, но при малых скоростях, особенно если $\omega/\omega_0 < 1$, погрешность расчета растет и при $\omega/\omega_0 < 0,5$ уже превышает 30% (рис. 4).

Анализ изменения поправочного коэффициента круговращения K_k показывает, что если при малых значениях скоростей (в интервале $0 < \omega/\omega_0 < 1$), его аппроксимировать функцией $K_2(\omega)$:

$$K_2(\omega) = 0,643 \cdot e^{\frac{\pi}{2} [1 - (\omega/\omega_0)^{0,3}]}, \quad (9)$$

а в интервале скоростей $1 < \omega/\omega_0 < 4$ – функцией $K_3(\omega)$:

$$K_3(\omega) = 0,643 \cdot e^{-(\omega/\omega_0 - 1)^{0,46}} + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \left[1 - e^{-(\omega/\omega_0 - 1)^{0,46}}\right], \quad (10)$$

то погрешность расчета K_k по этим формулам в пределах рассматриваемого интервала, как видно из рис. 4, не превысит 1,2% (жирная пунктирная кривая).

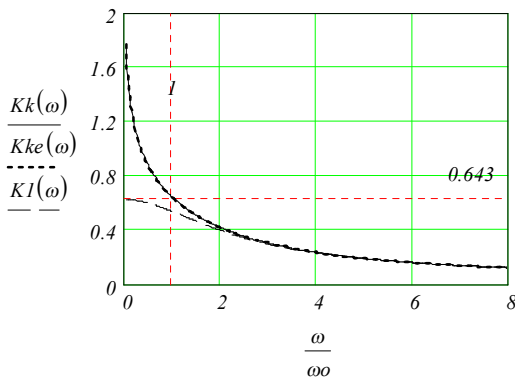
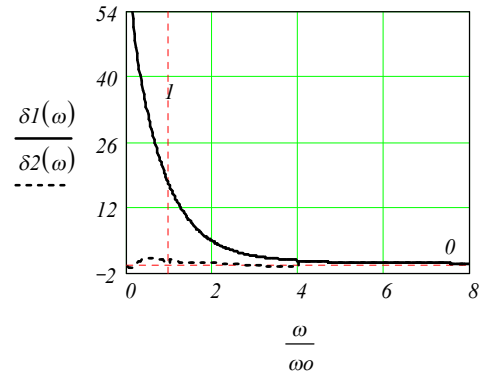


Рис. 3. Поправочные коэффициенты круговращения

Рис. 4. Погрешность K_k по формулам (8)–(10)

Заключение

Найдены аппроксимирующие зависимости для определения периода немалых колебаний маятника в функции его начального угла отклонения, а также периода круговращения маятника в функции скорости прохождения верхнего положения. Дана оценка точности аппроксимирующих формул, рекомендуемых для применения в инженерной практике.

Литература

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1983. –Т. II.– С. 493–504.

Поступила в редакцию 12 января 2005 г.