

ВОЛНОВодНЫЕ СВОЙСТВА КЛИНОВИДНОЙ ПЛАСТИНЫ

Х.Б. Толипов, С.Ю. Гуревич

В статье рассматривается новый вид волн, распространяющихся вдоль ребра клина. Предложена математическая модель, которая описывает пространственно локализованные волновые пучки, являющиеся основной формой движения вдоль ребра. Выполнены расчеты волновых полей, образующихся вблизи окрестности ребра, которые удовлетворяют уравнениям движения и граничным условиям. Получено дисперсионное соотношение для волноводных мод. Модельные расчеты структуры волнового пучка согласуются с экспериментальными наблюдениями.

В научной литературе содержатся работы, посвященные экспериментальному исследованию волноводного распространения упругих волн вдоль кромки клина [1, 2]. Единственным средством анализа этих волн до настоящего времени являются либо численные расчеты, либо эмпирические зависимости [3, 4].

В рамках известных представлений объяснить характер поведения этой волны не представляется возможным. Так, например, из-за рефракции волна должна сдвигаться к ребру клина, обеспечивая независимость скорости этой волны от угла клина, что противоречит результатам измерений.

В данной работе предложена математическая модель распространения акустической волны вдоль ребра клина, объясняющая особенности ее движения.

Пусть с клином связана цилиндрическая система координат (r, θ, z) с осью z направленной по ребру клина. Малые возмущения частиц среды в терминах волновых потенциалов описываются уравнениями

$$\Delta\Phi + k_c^2\Phi = 0, \quad \Delta\psi_j + k_t^2\psi_j = 0, \quad j=1,2, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $k_h = \frac{\omega}{c_h}$; $h = \ell, t; c_b, c_t$ – скорости распространения объемных продольных и поперечных волн соответственно; ω – круговая частота.

Некоторые свойства формы решения зависят от характера движения волноводных мод.

В частности, из результатов измерений известно, что скорость волны по всей ширине волнового канала остается неизменной [1]. Поэтому эта скорость, по всей вероятности, определится той узкой областью клина, в которой выполняется условие наилучшего возбуждения волны. Следовательно, решение системы (1) должно обладать инвариантностью относительно сдвига оси r . В этой области смещения частиц не должны зависеть от переменной r .

В этом случае параметры движения частиц среды вдоль ребра клина будут зависеть только от двух переменных – z, θ , а у векторного потенциала отлична от нуля будет только компонента ψ_2 .

С учетом этих замечаний уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k_c^2 \Phi &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + k_t^2 \psi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

граничные условия при $\theta = \pm\theta_0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + k_t^2 \psi_2) &= 0; \\ \sigma_{\theta\theta} = -\frac{k_t^2}{2} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial \theta}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

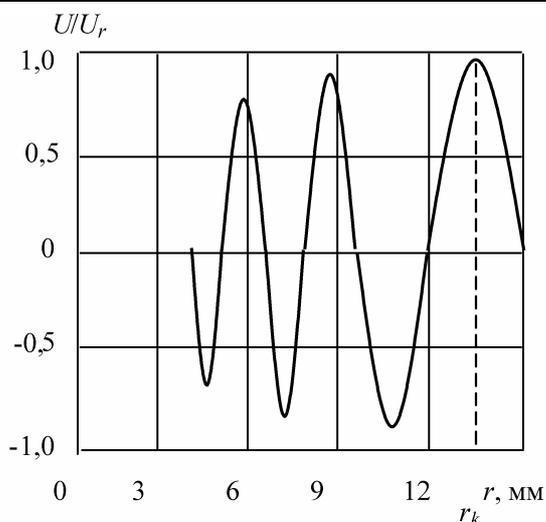


Рис. 2. Характер изменения амплитуды смещений в шестой волноводной моде от пространственной координаты

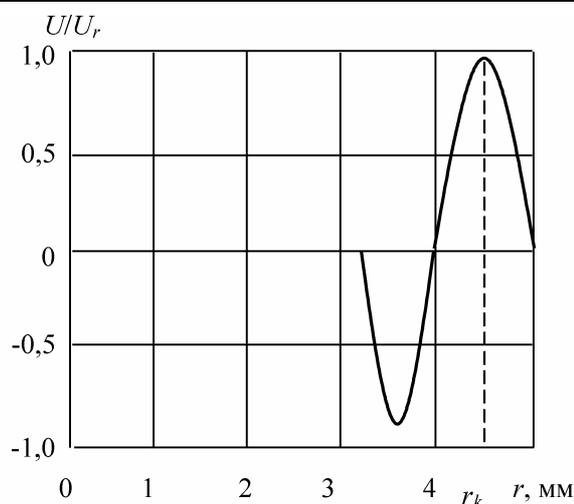


Рис. 3. Характер изменения амплитуды смещений во второй волноводной моде от пространственной координаты

Анализ результатов показал, что число мод антисимметричных волн в клине при определенном угле ограничено. Ширина волнового канала растет с уменьшением угла клина и с возрастанием номера моды. Увеличение угла клина ведет к сужению ширины каналов, и при больших углах ($\theta > 90^\circ$) эти каналы практически сливаются между собой. Этим объясняется отсутствие при этих углах клина экспериментальных кривых скоростей кромочной волны.

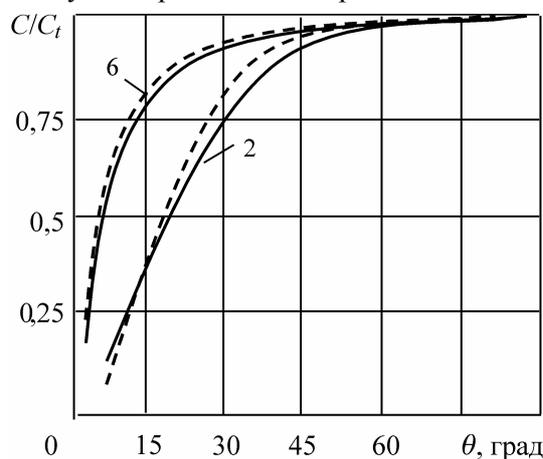


Рис. 4. Зависимости скорости шестой и второй волноводных мод от угла клина

Полученное решение позволяет рассчитать волновое поле вблизи окрестности ребра. Технически при возбуждении колебаний возникают два вида движений: по направлению к ребру клина и существующее только в начальный период времени до образования отраженной стоячей волны, и антисимметричное движение вдоль ребра. Закономерности пространственного изменения структуры поля при удалении от ребра существенно зависят от угла клина.

Симметричные волны являются неустойчивыми в волновом канале, так как вследствие рефракции они будут отклоняться от ребра клина.

В заключение можно отметить, что удовлетворительное совпадение картины поля, возникающей в окрестности ребра с приводимыми расчетами, говорит о правомочности предложенной математической модели, объясняющей волноводный характер распространения волны.

Литература

1. Moss S.L., Maradudin A.A., Cunningham S.L. – Phys. Rev. B. – 1973. – V.8. – P. 2999.
2. Sharon T. M., Maradudin A.A., Cunningham S.L. – Phys. Rev. B. – 1973. – V.8. – P. 6024.
3. Lagasse P.E., Mason I.M. – Electron. Lettr. – 1972. – V.8. – P. 82.
4. Lagasse P.E. – IEEE Trans. Son. Ultrason. 1973. – V.20. – P. 354.
5. Толипов Х.Б. Двумерная задача распространения акустических колебаний в клине// ММ. – 2003. – Т.15. – №10. – С. 105–108.
6. Kh. B. Tolipov, S. Yu. Gurevich. Waveguide properties of the acute wedge plate – eleventh international congress on sound and vibration // 5–8 July 2004, St. Petersburg, Russia.

Поступила в редакцию 24 февраля 2005 г.