УДК 517.53

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ – ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ПОСЛЕДНЕЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СТРОКИ. РАЦИОНАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

В.М. Адуков, О.Л. Ибряева

В статье рассматривается асимптотика знаменателей аппроксимаций Паде–Чебышева рациональной функции для последней промежуточной строки таблицы Паде–Чебышева. В явном виде найдены все предельные точки множества полюсов аппроксимаций Паде–Чебышева для данного случая.

1. Введение

Классическое определение аппроксимаций Паде для степенных рядов легко может быть перенесено на случай рядов по системе ортогональных многочленов. Однако теория сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений в настоящее время пока далека от завершения. Основные результаты были получены С.П. Суетиным [1–3] и Д.С. Любинским, А. Сиди [4]. Полная теория имеется только для одной строчной последовательности аппроксимаций (аналог теоремы Монтессу де Болора, доказанный С.П. Суетиным [1–2]).

В статье [5] был предложен метод исследования равномерной сходимости для так называемой последней промежуточной строки классической таблицы Паде. Соображения устойчивости позволили показать, что асимптотическое поведение знаменателей аппроксимации Паде для мероморфной функции и ее рациональной части одинаково. Тем самым задача исследования равномерной сходимости аппроксимаций Паде для данной строки была сведена к рациональному случаю.

Частным случаем ортогональных разложений являются разложения по системе многочленов Чебышева $T_k(z)$, $k=1,2,\ldots$. Мы собираемся перенести методы и результаты [5] на случай аппроксимаций Паде–Чебышева. Мы полагаем, что предельное поведение аппроксимаций Паде–Чебышева для мероморфной функции и для ее рациональной части также будет одинаковым. Поэтому в этой работе мы изучаем рациональный случай.

2. Постановка задачи

Обозначим $\mathit{\Gamma}_\lambda$ – эллипс с фокусами в точках $-1,1$ и D_λ – его внутренность. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в D_λ за исключением точек $z_1,\ldots,z_\ell$, в которых она имеет полюсы кратностей $s_1,\ldots,s_\ell$, и $\lambda = s_1+\ldots+s_\ell$. Будем предполагать, что $z_1,\ldots,z_\ell \notin [-1,1]$.

Проведем через $z_1,\ldots,z_\ell$ систему эллипсов с фокусами в точках $-1,1$. Пусть внутри эллипса с максимальной суммой полуосей лежит ρ полюсов. Обозначим этот эллипс – $\mathit{\Gamma}_\rho$, а его внутренность – D_ρ. Пусть $\mathit{\Gamma}_0$ – любой эллипс, не содержащий полюсов $z_1,\ldots,z_\ell$, и D_0 – его внутренность. Функция $f(z)$ может быть разложена в D_0 в ряд по многочленам Чебышева: $f(z)=\frac{f_0}{2}+f_1T_1(z)+\ldots$ (см., например, [6]).

Рациональную функцию $R_{n,m}(z)=\frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$, такую, что многочлены $P_{n,m}(z), Q_{n,m}(z)$ удовлетворяют условиям $\deg P_{n,m}(z)\le n, \deg Q_{n,m}(z)\le m, Q_{n,m}(z)\not\equiv 0$, и выполняется соотношение

$$f(z)Q_{n,m}(z)-P_{n,m}(z)=O\left(T_{n+m+1}\right)\equiv \sum_{k=n+m+1}^{\infty} a_kT_k(z),$$

будем называть *линейной аппроксимацией Паде–Чебышева типа (n,m)*.

Заметим, что коэффициент при $T_j(z)$ в квадратных скобках при всех $j \ge \lambda$ есть $\sum_{i=0}^{\lambda} \delta_i \left(w_l^{j-i} + w_l^{j+i} \right) = 2\sum_{i=0}^{\lambda} \delta_i w_l^j T_i(z_l) = 2w_l^j D(z_l) = 0$ и что выражение $\sum_{i=0}^{\lambda} \delta_i \left(w_l^{|j-i|} + w_l^{j+i} \right)$ преобразовывается до $\sum_{i=j+1}^{\lambda} \delta_i \left(w_l^{i-j} - w_l^{j-i} \right)$. Тогда,

$$\sum_{l=1}^{v} C_l \tau_l \frac{D(z)}{z - z_l} = \sum_{l=1}^{v} \frac{2C_l \tau_l}{\left(w_l - \frac{1}{w_l} \right)} \sum_{j=0}^{\lambda-1}{}' \left[\sum_{i=j+1}^{\lambda} \delta_i \left(w_l^{i-j} - w_l^{j-i} \right) \right] T_j(z).$$

Легко видеть, что $w_l^{i-j} - w_l^{j-i} = \left(w_l - \frac{1}{w_l} \right) \sum_{m=0}^{i-j-1} w_l^{i-j-m-1} \frac{1}{w_l^m} = \left(w_l - \frac{1}{w_l} \right) \sum_{m=0}^{i-j-1} \frac{1}{w_l^{j-i+2m+1}}$.

Окончательно получаем, $\sum_{l=1}^{v} C_l \tau_l \frac{D(z)}{z - z_l} = 2\sum_{j=0}^{\lambda-1}{}' \sum_{i=j+1}^{\lambda} \sum_{m=0}^{i-j-1} \delta_i \sum_{l=1}^{v} C_l \tau_l \frac{1}{w_l^{2m-i+j+1}} T_j(z)$, т.е. что

$$\lim_{n \to \infty} V_n^{(\lambda-\delta-1)}(z) = A_\delta \sum_{l=1}^{v} C_l \tau_l \frac{D(z)}{z - z_l}.$$

Так как $D(z) = \Delta(z)(z - z_1)^{s_1 - 1} \ldots (z - z_v)^{s_v - 1} (z - z_{v+1})^{s_{v+1}} \ldots (z - z_\ell)^{s_\ell}$, то мы приходим к формуле (6).

Итак, мы нашли частичные пределы последовательности знаменателей линейных аппроксимаций Паде–Чебышева типа $(n, \lambda - 1)$ для рациональной функции $r(z)$ по последовательностям Λ_τ. Нетрудно показать, что таким образом мы получили все частичные пределы. Поэтому, в полной аналогии с работой [5], нули семейства многочленов $\{W(z,\tau)\}_{\tau \in \mathbf{F}}$ дают множество всех предельных точек полюсов аппроксимаций Паде–Чебышева типа $(n, \lambda - 1)$.

Геометрия множества нулей $\{W(z,\tau)\}_{\tau \in \mathbf{F}}$ изучена в [5].

Также, как и в [5], мы можем теперь доказать равномерную сходимость подпоследовательности $R_{n,\lambda-1}(z)$, $n \in \Lambda_\tau$ внутри соответствующих областей к функции $f(z)$. Можно также найти и области равномерной сходимости для последовательности $R_{n,\lambda-1}(z)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006.

О.Л. Ибряева благодарит также за финансовую поддержку Правительство Челябинской области (исследовательский проект 007.01.06-05.БХ).

Литература

1. Суетин С.П. О сходимости рациональных аппроксимаций полиномиальных разложений в областях мероморфности заданной функции// Матем. сборник. – 1978. – Т. 105. – № 3. – С. 413–430.
2. Суетин С.П. О теореме Монтессу де Болора для рациональных аппроксимаций ортогональных разложений// Матем. сборник. – 1981. – Т. 114. – № 3. – С. 451–464.
3. Суетин С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда// Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57. – № 1. – С. 45–142.
4. Lubinsky D.S., Sidi A. Convergence of linear and nonlinear Pade approximant from series of orthogonal polynomials// Transaction of the American mathematical society. – 1983. – V. 278. – № 1. – P. 333–345.
5. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory – 2003. – V. 122. – P. 160–207.
6. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том II. Дальнейшее построение теории. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. I. – 464 с.

Поступила в редакцию 19 августа 2005 г.