УДК 517.957:539.374

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина

Исследуется напряженно-деформированное состояние в зоне пластических деформаций менее прочного, чем основной материал, поперечного слоя растягиваемой полосы в условиях плоской деформации. Приближенным интегрированием системы уравнений пластического равновесия при использовании гипотезы плоских сечений получены аналитические выражения для компонент тензора напряжений во всех точках пластического слоя, вычислена предельная нагрузка и наибольшая толщина слоя, при котором соединение равнопрочно механически неоднородной полосе.

1. Введение и основные допущения. Построение математических моделей напряженно-деформированного состояния (НДС) пластических сред в большинстве практически важных задач основано на частичном предугадывании внутреннего состояния среды в форме гипотез, формулирующих некоторые соотношения между напряжениями, деформациями, скоростями деформаций, смещениями, скоростями смещений и т.д., или накладывающих какие-то ограничения на соответствующие функции. В работе, при изучении НДС мягкой прослойки растягиваемой полосы, материал которой переходит в состояние пластического течения раньше основного материала полосы, принята так называемая гипотеза плоских сечений, что позволило найти приближенные аналитические выражения для компонент тензора напряжений в любой момент нагружения во всех точках пластического слоя, вычислить предельную нагрузку и наибольшую толщину слоя, когда соединение (полоса с мягкой прослойкой) равнопрочно однородной полосе без мягкой прослойки. Предполагается, что слой имеет две ортогональные оси симметрии (основные соотношения будут получены для частного случая прямоугольника). В процессе нагружения основной металл деформируется упруго, а при значительных напряжениях участки, расположенные вблизи пластического слоя, вовлекаются в пластическую деформацию. При выводе основных формул материал слоя и основной металл считаются идеально жесткопластическими и удовлетворяющими обычным в таких случаях допущениям [1]. В качестве уравнения пластичности принято условие Мизеса. Полученные результаты переносятся на упрочняемые материалы заменой в условии полной пластичности предела текучести материала слоя на пластическую постоянную, характеризующую момент потери устойчивости процесса пластического деформирования слоя.

Свяжем слой с декартовой системой координат, направив ось OX по продольной для слоя оси симметрии слоя, ось OY – по продольной для полосы оси симметрии (поперечной оси симметрии слоя).

2. Математическая постановка задачи. НДС пластической среды при плоской деформации определяется, как известно [1], системой уравнений

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\,. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0. \qquad (2)$$

$$\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4(\tau_{xy})^2=4. \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \qquad (4)$$

$$\sigma_{cp} = 2 + \frac{(k-1)(3-k)}{2} + \frac{A^2(k+1-4\chi)^3}{6(k+1)^3}.$$

Введем обозначение. Пусть $y = a\,\mathrm{tg}\,d(x),\ x \in (0;+\infty]$ – функция, обратная к функции $x = y\ \mathrm{tg}y,\ y \in [0;\pi/2)$. Тогда для вычисления постоянной A из уравнения (30) следует формула

$$A = \frac{1}{\chi} a\,\mathrm{tg}\,d\left(\frac{2(k^2-1)(1+0,75(k-1)^2\chi)}{k+1-4\chi}\right).$$

Для малых значений аргумента $a\,\mathrm{tg}\,d(x) \cong \sqrt{x}$; это приближенное равенство приводит к формуле

$$A^2 = \frac{2(k^2-1)(1+0,75(k-1)^2)}{(k+1-4\chi)\chi},$$

Откуда

$$\sigma_{cp} = 2 + \sigma_{yn},\ \sigma_{yn} = \frac{(k-1)(3-k)}{2} + \frac{(k-1)(k+1-4\chi)^2}{3(k+1)^2\chi}. \qquad (35)$$

Полоса, содержащая прослойку из менее прочного материала малой толщины, может не уступать по прочности однородной полосе из основного материала за счет контактного упрочнения прослойки. Для определения наибольшей толщины прослойки в полосе, равнопрочной однородной полосе из того же материала, но без прослойки, надо приравнять среднее предельное напряжение растяжения в однородной полосе напряжению, вычисленному по формуле (35). В безразмерных напряжениях соответствующее уравнение имеет вид

$$2 + \sigma_{yn} = 2k.$$

Решая его, получим с ошибкой, не превышающей 1%, $\chi_p = \dfrac{2(k+1)}{3k^2+6k+19}$. В частности, при $k < 1,5$ $\chi_p = 0,14$, то есть практически постоянна.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-08-18179а.

Литература

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
2. Дильман В.Л., Отсемин А.А. Анализ методом линий скольжения вязкой прочности сварного соединения с подрезом прямошовных труб большого диаметра// Проблемы прочности. – 2004. – № 3. – С. 72–82.
3. Дильман В.Л., Отсемин А.А. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии// Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 6. – С. 115–124.

Поступила в редакцию 22 июня 2005 г.