УДК 519.6:621.317

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

С.В. Ермаков, Е.В. Харитонова

В работе рассматривается процедура построения функции Грина для многоточечной краевой задачи.

В работе [1] была рассмотрена модель измерений, построенная на базе анализа обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, приводящая к исследованию интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Одним из основных элементов предложенного метода было построение функции Грина для краевой задачи

$$\begin{cases} L(x) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = u(t); \\ U_j(x) = l_j, \ j = 1, \ldots n, \end{cases} \tag{$*$}$$

где $U_j(x)$ – линейные в $C^n_{[a,b]}$ функционалы, для многоточечной задачи имеющие вид $U_j(x) = x(t_j)$, $a \le t_1 < t_1 < \ldots < t_n \le b$

Предполагая фундаментальную систему решений уравнения $L(x) = 0$ известной и обладающей не очень обременительными условиями регулярности (подробнее в [1]), можно легко построить функцию Грина задачи (1) и, тем самым, сформировать ядро интегрального уравнения, восстанавливающего правую часть $u(t)$ по экспериментально наблюденному сигналу $x(t)$.

Однако, в некоторых, практически важных ситуациях, такая процедура построения функции Грина не реализуема из-за сложностей, возникающих при построении фундаментальной системы решений.

В настоящей работе использована известная (например [2]) в теории дифференциальных уравнений конструкция, позволяющая получить функцию Грина для задачи ($*$) и тогда, когда прямое построение фундаментальной системы решений уравнения $L(x) = 0$ не представляется возможным.

1. Интегральное уравнение для функции Грина задачи (1)

Пусть $L_1(x)$ – линейное дифференциальное выражение

$$L_1(x) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$$

с непрерывными на промежутке [*a*, *b*] коэффициентами, $L_2(x) = x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)}$ – его главная часть. Пусть, далее, коэффициенты выражения $L_1(x)$ таковы, что краевые задачи

$$\begin{cases} L_1(x) = u(t); \\ U_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, n; \end{cases} \tag{1}$$

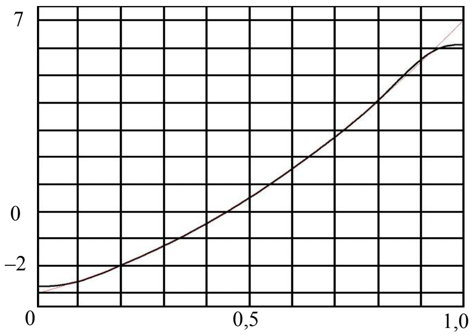
$$\begin{cases} L_2(x) = u(t); \\ U_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{2}$$

однозначно разрешимы и существуют однозначно определяемые функции Грина $G_i(t,\tau), i = 1, 2$, соответственно задач (1) и (2).

Рассмотрим вспомогательную функцию $\tilde{A}(t,\tau) = G_1(t,\tau) - G_2(t,\tau)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Функция* $\tilde{A}(t,\tau)$ *определена на квадрате* $K = \{(t,\tau) : a \le t \le b, a \le \tau \le b\}$, *непрерывна там по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по переменной* t *вплоть до* n*-го порядка включительно.*

По наблюденному точному решению $x(t) = t^2 - t$ восстанавливалась правая часть уравнения. На рис. 2 отображены результаты расчетов – графики решений обратной задачи.



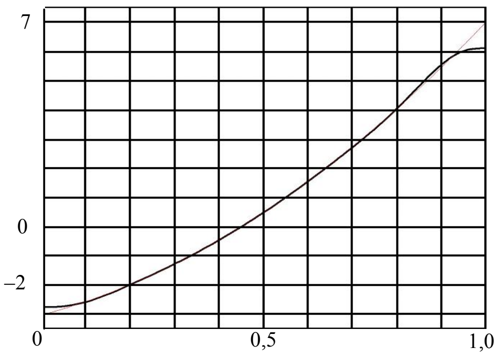


Рис. 2. Решение обратной задачи с помощью функции Грина построенной прямым методом (слева) и методом интегральных уравнений (справа)

Пример 3. Рассматривалась задача

$$x'' + \sin(t)x' - e^{\cos t}x = u(t),\ t \in [-1,1], x(-1) = x(1) = 0.$$

Для $u(t) = e^{\cos t} - t^2 e^{\cos t} + 2t\sin t + 2$ была построена функция Грина, с помощью которой находились решения прямой и обратной задач.

График восстановленного решения обратной задачи по результатам наблюдения $x(t) = t^2 - 1$ приведен на рис. 3.

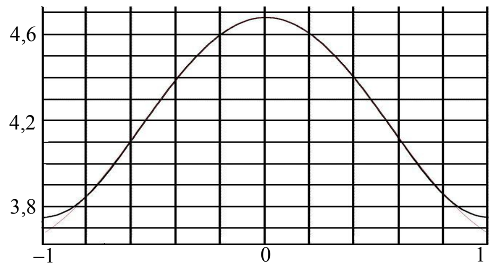


Рис. 3. Решение обратной задачи

Работа поддержана грантом РФФИ-УРАЛ 04-01-96073.

Литература

1. Харитонова Е.В. Численный анализ обратной задачи теории измерений// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 42–48.
2. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1978.

Поступила в редакцию 15 сентября 2005 г.